第 35 卷　第 2 期　　华侨大学学报（自然科学版）　　Vol. 35　No. 2
2014 年 3 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Mar. 2014

文章编号:1000-5013(2014)02-0238-03　　doi:10.11830/ISSN.1000-5013.2014.02.0238

向量测度的算子分解

黄雪冰，施慧华

（华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021）

摘要： 利用向量测度与算子的一一对应关系，给出可列可加测度的算子表示，并进一步由推广的 Yosida-Hewitt 定理证明定义在 $B(\Omega,\Sigma)=\overline{\mathrm{span}}\{\chi_A,A\in\Sigma\}$ 上的取值于自反空间 X 的算子，可唯一分解成 w^*-范序列连续算子与纯连续算子之和.

关键词： w^*-范序列；连续算子；纯连续算子；向量测度；Yosida-Hewitt 定理

中图分类号： O 177.2　　**文献标志码：** A

1　预备知识

20 世纪 30 年代，Hidebrandt[1] 关于 $L_\infty[0,1]$ 对偶的表示，提出了测度与算子之间的对应关系. Fichtenholtz 等[2] 利用积分建立有界的有限可加测度全体构成的集合，记为 $ba(\Omega,\Sigma)$，与 $B(\Omega,\Sigma)$ 对偶之间的等距同构．其中：(Ω,Σ) 是可测空间，$B(\Omega,\Sigma)=\overline{\mathrm{span}}\{\chi_A,A\in\Sigma\}$．赋予范数 $\|f\|=\sup\limits_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|$，$\forall f\in B(\Omega,\Sigma)$，利用全变差对 $ba(\Omega,\Sigma)$ 赋予范数 $\|\mu\|=|\mu|(\Omega)$，$\forall\mu\in ba(\Omega,\Sigma)$，则有如下定理．

定理 1　存在 $ba(\Omega,\Sigma)$ 与 $B^*(\Omega,\Sigma)$ 之间的一个等距同构，由 $x^*f=\int_\Omega f(\omega)\mathrm{d}\mu$，$\forall f\in B(\Omega,\Sigma)$ 决定. 因而，对任意的 $x^*\in B^*(\Omega,\Sigma)$ 存在唯一的 $\mu\in ba(\Omega,\Sigma)$，使得上式成立；反之，对任意 $\mu\in ba(\Omega,\Sigma)$ 存在唯一的 $x^*\in B^*(\Omega,\Sigma)$，使得上式成立，即 x^* 与 μ 存在一一对应关系. 特别地，若 Σ 是由 Ω 中的所有子集构成，则 $ba(\Omega,\Sigma)$ 等距同构于 $B^*(\Omega,\Sigma)\equiv(l_\infty(\Omega))^*$.

而后出现了各种各样的测度与算子表示定理，包括著名的 Riesz 表示定理和 Randon-Nikodym 定理等[3-5]. 特别地，针对向量值测度与算子之间的等价刻画亦有多种表述，其中之一即为 Day[6] 提出的定理．记定义于 $B(\Omega,\Sigma)$ 取值 Banach 空间的线性连续算子全体为 $L(B(\Omega,\Sigma),X)$，定义于 Σ 上的 X-值有界有限可加测度全体为 $ba_X(\Omega,\Sigma)$，则有如下定理．

定理 2　存在 $L(B(\Omega,\Sigma),X)$ 与 $ba_X(\Omega,\Sigma)$ 之间一个等距同构 $U\leftrightarrow m$，由 $U(f)=\int_\Omega f(\omega)\mathrm{d}m$，$\forall f\in B(\Omega,\Sigma)$ 决定，且有 $\|U\|=\|m\|(\Omega)$. 其中，$\|m\|$ 表示 m 的半变差.

2　可列可加测度的算子特征

记 (Ω,Σ) 为一可测空间，X 是 Banach 空间.

定义 1　设函数 $m:\Sigma\to X$，则有 ⅰ）m 称为 Ω 上的有限可加测度，如果对任意不交 $A,B\in\Sigma$，有 $m(A\cup B)=m(A)+m(B)$；ⅱ）有限可加测度 m 称为可列可加的，如果对 Σ 中的任一两两不交的序列 $\{\Omega_j\}$，在范数拓扑下成立 $m(\bigcup_j\Omega_j)=\Sigma_j m(\Omega_j)$；ⅲ）有限可加测度 m 称为是有界的，如果其半变差是有限的，即有 $\|m\|(\Omega)\equiv\sup\{|x^*m|(\Omega):x^*\in X^*,\|x^*\|\leqslant1\}<\infty$.

收稿日期： 2013-01-19

通信作者： 施慧华(1981-)，女，讲师，主要从事基础数学泛函分析的研究. E-mail：shh817@hqu.edu.cn.

基金项目： 国家自然科学基金专项数学天元基金资助项目(11226129)；华侨大学高层次人才科研启动项目(10BS215)

注释 1　因 $B(\Omega,\Sigma)\subset l_\infty(\Omega)$，故文中 $B(\Omega,\Sigma)$ 上的 w^*-拓扑是由 $l_\infty(\Omega)$ 的 w^*-拓扑限制在 $B(\Omega,\Sigma)$ 上得到的.

定理 3　有界有限可加测度 $m:\Sigma\to X$ 是可列可加的当且仅当其对应算子 $U:B(\Omega,\Sigma)\to X$ 是 w^*-范序列连续.

证明　充分性. 设 U 是 $B(\Omega,\Sigma)$ 上的 w^*-范序列连续算子，对任一单减且交为空的序列 $\{E_n\}\subset\Sigma$ 和任意 $x\in l_1(\Omega)$ 由 $\{E_n\}$ 的特性可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega x\chi_{E_n}\mathrm{d}\mu=0$，从而 $\{\chi_{E_n}\}w^*$ - 收敛于 0. 因此，当 $n\to\infty$，在范数意义下有 $U(\chi_{E_n})=\int_\Omega\chi_{E_n}\mathrm{d}m=m(E_n)\to 0$，即可得 m 是可列可加的.

必要性. 设 m 是有界可列可加测度，不失一般性可设 $\|m\|(\Omega)=1$，则任意 $A\in\Sigma$，有 $\|m\|(A)\leqslant 1$. 为证 U 是 w^*-范序列连续的，由 U 的线性性只需证明其在 χ_Ω 处 w^*-范序列连续. 令 $\{f_n\}\subset B(\Omega,\Sigma)$ w^*-收敛于 χ_Ω，由一致有界性定理可得 $\{f_n\}$ 有界，记其界为 $M\in\mathbf{R}^+$. 对于任一给定 $\varepsilon>0$ 和任意 $n\in\mathbf{N}$，令 $A_n=\{\omega\in\Omega:\|f_n(\omega)-1\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\forall m\geqslant n\}$. 可验证 A_n 是 Σ-可测的，且满足 $A_n\subset A_{n+1}$ 和 $\bigcup_{n=1}^\infty A_n=\Omega$. 令 $A_0=\varnothing$，$\Omega_n=A_n\backslash A_{n-1}(n\in\mathbf{N})$，则 $\{\Omega_n\}$ 是 Ω 的一个 σ-分划. 令 $\delta=\frac{\varepsilon}{2(M+1)}$. 由 m 的可列可加性知，存在 $N\in\mathbf{Z}$，对 $n\geqslant N$ 有 $\|m(\bigcup_{j>n}\Omega_j)\|<\delta$. 从而对所有 $n\geqslant N$ 有

$$\|U(f_n-\chi_\Omega)\|=\|\int_\Omega(f_n(\omega)-1)\mathrm{d}m\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+(1+M)\delta=\varepsilon.$$

ε 的任意性说明了 U 在 χ_Ω 是 w^*-范序列连续的.

推论 1　特别当 $X=\mathbf{R}$ 时，m 是可列可加的当且仅当其对应泛函 $U:B(\Omega,\Sigma)\to\mathbf{R}$ 是 w^*-序列连续.

3　$\boldsymbol{B(\Omega,\Sigma)}$ 上 $\boldsymbol{X}$ 值算子的分解

定义 2[7]　Ω 上的非负有限可加测度 μ 称为是纯有限可加的，若对任意非负可列可加测度 λ，且满足 $\lambda\leqslant\mu$，均有 $\lambda=0$；而 Ω 上的有限可加测度 μ 称为是纯有限可加的，若其变差测度 $|\mu|$ 是纯有限可加的.

定理 4　设 $m:\Sigma\to X$ 是有界有限可加测度，则 m 能唯一表示成 $m=m_1+m_2$. 其中，$m_i:\Sigma\to X^{**}$ 是有限可加且对任意 $x^*\in X^*$ 有：1) $x^*m_1:\Sigma\to\mathbf{R}$ 是可列可加的；2) $x^*m_2:\Sigma\to\mathbf{R}$ 是纯有限可加的.

注释 2　当 X 是自反空间时，由上述定理可知 m_1 是弱可列可加，结合 Pettis 定理[8]，可得 m_1 是可列可加.

为了给出纯有限可加测度的算子特征刻画，在文献[9]中定义了纯连续.

定义 3　设 X 是可对偶的 Banach 空间，$P\subset X$ 是可再生锥，即 $X=P-P$. 则有

ⅰ) 若 $f\in X^*$ 具有正分解 $f=f^+-f^-$，其中 f^+ 和 f^- 均为正泛函，且满足是 w^*-序列连续的，则称 f 有一个 w^*-序列连续正分解；

ⅱ) $f\in X^*$ 称为纯连续，若其具有正分解 $f=f^+-f^-$ 且满足：对任意 w^*-序列连续泛函 $g\in X^*$ 的任意 w^*-序列连续正分解 $g=g^+-g^-$，由 $f^+-f^-\geqslant g^+-g^-$ 可得 $g=0$.

注释 3　令 $P=\{f\in B(\Omega,\Sigma):f(\omega)\geqslant 0\}$，则有 $B(\Omega,\Sigma)=P-P$. 进一步令 C 是由 $B(\Omega,\Sigma)$ 上的正泛函构成的集合，有 $C=\{F\in B^*(\Omega,\Sigma):F(f)\geqslant 0,\forall f\in P\}$，则有 $B^*(\Omega,\Sigma)=C-C$，从而任意的 $F\in B^*(\Omega,\Sigma)$ 均可分解成两个正泛函 F^+，F^- 之差，即 $F=F^+-F^-$ 且 $\|F\|=\|F^+\|+\|F^-\|$. 另一方面，根据实值有限可加测度的 Hahn 分解定理，任意的 $\mu\in ba(\Omega,\Sigma)$ 存在唯一的非负测度 μ^+，μ^- 有 $\mu=\mu^+-\mu^-$ 且 $|\mu|=\mu^++\mu^-$. 由定理 1 及分解唯一性可知，μ^+ 与 F^+ 对应，μ^- 与 F^- 对应，记 $|F|=F^++F^-$，则 $|\mu|$ 与 $|F|$ 一一对应.

定理 5　任意的 $\mu\in ba(\Omega,\Sigma)$，μ 为纯有限可加当且仅当其对应的泛函 $g\in B^*(\Omega,\Sigma)$ 为纯连续的.

证明　$\forall\mu\in ba(\Omega,\Sigma)$，$\mu$ 为纯有限可加，由定理 1 知存在对应泛函 $g\in B^*(\Omega,\Sigma)$，由 $g(x)=\int_\Omega x\mathrm{d}\mu$ 决定，其中 $\forall x\in B(\Omega,\Sigma)$. 设 $f\in B^*(\Omega,\Sigma)$ 为任意的 w^*-序列连续泛函，且满足 $|f|=f^++f^-\leqslant g^++g^-=|g|$，记 λ 是 f 所对应的测度，则由推论 1 可知，λ 是可列可加. 结合注释 3 可知 $|\lambda|\leqslant|\mu|$，μ 的纯

有限可加性保证了$\lambda=0$,从而$f=0$,即有g纯连续的.定理的必要性得证;而定理的充分性可由上述类似地给予证明.

定理6 任意的$U\in L(B^*(\Omega,\Sigma),X)$均可唯一分解成$U=U_1+U_2$,其中$U_i:B(\Omega,\Sigma)\to X^{**}$,且对于任意的$x^*\in X^*$,有1) $x^*U_1:B(\Omega,\Sigma)\to\mathbf{R}$是$w^*$-序列连续,即$U_1$是$w^*$-$w^*$序列连续;2) $x^*U_2:B(\Omega,\Sigma)\to\mathbf{R}$是纯连续的.

证明 对任意$U\in L(B^*(\Omega,\Sigma),X)$,由定理2存在对应$m\in ba_X(\Omega,\Sigma)$,由$U(f)=\int_\Omega f(\omega)\mathrm{d}m$决定.其中$\forall f\in B(\Omega,\Sigma)$.由定理4可将$m$唯一分解成$m_1,m_2$且满足定理4的结论.将定理2中的$X$换成$X$的二次对偶$X^{**}$,同理可得$L(B^*(\Omega,\Sigma),X^{**})$与$ba_{X^{**}}(\Omega,\Sigma)$之间的一个等距同构,从而记$U_1$,$U_2\in L(B^*(\Omega,\Sigma),X^{**})$为$m_1,m_2$对应的算子.则有$U=U_1+U_2$,且对于任意$x^*\in X^*$,依推论1,由$x^*m_1$的可列可加性可得$x^*U_1$是$x^*$-序列连续,即$U_1$是$w^*$-$w^*$序列连续;依定理5,由$x^*m_2$的纯有限可加性可得$x^*U_2$是纯连续.

结合定理3,注释2与定理6,可得如下推论.

推论2 当X是自反Banach空间时,任意$U\in L(B(\Omega,\Sigma),X)$均可唯一分解成$U=U_1+U_2$,其中$U_i:B(\Omega,\Sigma)\to X$,且有:1) $U_1:B(\Omega,\Sigma)\to X$是$w^*$-范序列连续;2) $\forall x^*\in X^*$,$x^*U_2:B(\Omega,\Sigma)\to\mathbf{R}$是纯连续的.

参考文献:

[1] RUDIN W. Functional analysis[M]. New York:Mc Graw-Hill Higher Education,1991:117-120.

[2] DINCULEANU N. Linear operations on spaces of totally measurable functions[J]. Rev Roumsine Math Pures Appl, 1965(10):1493-1524.

[3] GROTHENDIECK A. Sur les applications linéaires faiblement compactes D′espaces du type $C(K)$ [J]. Canada J Math,1953(5):129-173.

[4] BARTLE R G,DUNFORD N,SCHWARTZ J. Weak compactness and vector measures[J]. Canada J Math,1955(7):289-305.

[5] DIESTEL J,UHL J J J. Vector measures[M]. Rhode Island:American Mathematical Soliety,1977:59-186.

[6] DAY M M. Normed linear spaces[M]. New York:Springer-Verlag,1973:195-197.

[7] YOSIDA K,HEWITT E. Finitely additive measures[J]. Trans Amer Math Soc,1952,72(1):46-66.

[8] DUNFORD N,SCHWARTZ J T. Linear operators part I[M]. New York:John-Wiley and Sons,1958:318-319.

[9] CHENG Li-xing,SHI Hui-hua. A functional characterization of measures and the Banach-Ulam problem[J]. J Math Anal Appl,2011,374(2):558-565.

Operator Decomposition of Vector Measures

HUANG Xue-bing, SHI Hui-hua

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Using the isometrim between vector measures and operators, we give the operator representation for countably additive measures, then by applying extended Yosida-Hewitt theorem we show that a operator, which defined on $B(\Omega,\Sigma)=\overline{\mathrm{span}}\{\chi_A,A\in\Sigma\}$ and valued in the reflexive Banach space, X can be uniquely decomposed into the sum of a w^*-norm sequentially continuous operator and a purely continuous operator.

Keywords: w^*-norm sequentially continuous; continuous operator; purely continuous operator; vector measures; Yosida-Hewitt theorem

(责任编辑:钱筠 英文审校:黄心中)