第 35 卷　第 2 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 35　No. 2
2014 年 3 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Mar. 2014

文章编号:1000-5013(2014)02-0232-06　　doi:10.11830/ISSN.1000-5013.2014.02.0232

一类四阶微积分方程的紧差分格式

任全伟，庄清渠

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 针对由铰链梁横向振动模型而建立的四阶微积分方程，提出紧差分格式进行求解，利用 Newton 型迭代法处理积分项，给出差分格式解的存在性、收敛性和稳定性的证明. 数值结果表明：格式的精度为 $O(h^4)$.

关键词： 四阶微积分方程；紧差分格式；迭代算法；收敛性；稳定性

中图分类号： O 241.8　　**文献标志码：** A

在研究铰链梁横向振动的过程中，可得四阶微积分方程边值问题为

$$\left.\begin{aligned} & y^{(4)}-\varepsilon y''-\frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi (y')^2\mathrm{d}x\right)y''=p(x), \quad 0<x<\pi, \\ & y(0)=y(\pi)=y''(0)=y''(\pi)=0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式(1)中：ε 是正常数；$p(x)$是区间$[0,\pi]$上的连续函数，且 $p(x)\leqslant 0$，$\forall\, x\in[0,\pi]$. 近年来，许多科研工作者已经对该四阶微积分方程进行了研究. 文献[1]给出了该方程的推导过程. 文献[2]给出了该方程的有限元估计. 文献[3]给出了该方程有限元估计的误差分析. 随后，文献[4]提出用牛顿迭代法来求解该方程，大大提高了方程求解的收敛速度，而且数值解具有 $O(h^2)$的精度. 本文进一步考虑该方程的紧差分格式逼近，在保持方程求解收敛速度的同时，得到具有 $O(h^4)$精度的数值解.

1　古典解的先验估计

首先，根据文献[5]，令 $\phi(x)=-y''(x)$，则式(1)可写为

$$\left.\begin{aligned} & -\phi''+\varepsilon\phi+\frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi (y')^2\mathrm{d}x\right)\phi=p(x), \quad 0<x<\pi, \\ & -y''-\phi=0, \quad 0<x<\pi, \\ & y(0)=y(\pi)=\phi(0)=\phi(\pi)=0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其次，仿照文献[6]，令 $\xi=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi (y')^2\mathrm{d}x\right)$，则式(2)可写为

$$\left.\begin{aligned} & -\phi''+(\varepsilon+\xi)\phi=p, \quad 0<x<\pi, \\ & -y''-\phi=0, \quad 0<x<\pi, \\ & y(0)=y(\pi)=\phi(0)=\phi(\pi)=0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

将 ξ 看作一个参数，则式(3)的解可表示为 $\phi=\phi(x,\xi)$，$y=y(x,\xi)$. 再令 $g(\xi)=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi (y(x,\xi)')^2\mathrm{d}x\right)$. 则通过求解方程 $g(\xi)=\xi$就可得原方程的解. 由文献[4]可知，ξ可看作区间$\left[0,\frac{\pi\|p\|}{2(\varepsilon+4/\pi^2)}\right]$内的一个正数.

为了给出式(3)古典解的先验估计，假设所考虑的微分方程定解问题具有所需阶数的光滑解，则记

收稿日期： 2012-12-03

通信作者： 庄清渠(1980-)，男，讲师，主要从事微分方程数值解的研究. E-mail:qqzhuang@hqu.edu.cn.

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11126330)；福建省自然科学基金资助项目(2011J05005)

$H_0^1(0,\pi)$为通常的 Hilbert 空间，则对 $u(x)\in H_0^1(0,\pi)$，记

$$\|u\|_\infty=\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}|u(x)|,\qquad \|u\|=(\int_0^\pi u^2(x))^{1/2},\qquad |u|_1=(\int_0^\pi(u'(x))^2\mathrm{d}x)^{1/2}.$$

引理 1　若 $u(x)\in H_0^1(0,\pi)$，则有 $\|u\|_\infty\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2}|u|_1$，$\|u\|\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{6}}|u|_1$.

引理 1 的证明可参阅文献[7]. 由引理 1 及式(3)可得如下结论.

定理 1　设 $\phi(x)$，$y(x)$是式(3)的解，则有

$$|\phi|_1\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{6}}\|p\|,\qquad \|\phi\|\leqslant\frac{\|p\|}{6/\pi^2+\varepsilon+\xi},\qquad \|\phi\|_\infty\leqslant\frac{\pi^2}{2\sqrt{6}}\|p\|_\infty,$$

$$|y|_1\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\|p\|}{6/\pi^2+\varepsilon+\xi},\qquad \|y\|\leqslant\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{\|p\|}{6/\pi^2+\varepsilon+\xi},\qquad \|y\|_\infty\leqslant\frac{\pi^4}{24}\|p\|_\infty.$$

2　紧差分格式

利用泰勒公式[8]的积分余项公式，可得如下引理.

引理 2　如果 $g(x)\in C^6[c-h,c+h]$，则有

$$\frac{1}{12}[g''(c-h)+10g''(c)+g''(c+h)]=$$

$$\frac{1}{h^2}[g(c+h)-2g(c)+g(c-h)]+\frac{h^4}{240}g^{(6)}(\eta),\qquad \eta\in(c-h,c+h).$$

为了建立式(3)的紧差分格式，首先，将区间$[0,\pi]$作 m 等分，记 $h=\pi/m$，$x_i=ih$，$0\leqslant i\leqslant m$. $\Omega_h=\{x_i\,|\,0\leqslant i\leqslant m\}$. 称定义在 Ω_h 上的函数为网格函数. 并记 $\delta_x^2u_i=\frac{1}{h^2}(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})$. 下面引入紧差分算子，设 $\omega=\{\omega_i\,|\,0\leqslant i\leqslant m\}$，定义算子 $\mathscr{A}$ 为

$$(\mathscr{A}\omega)_i=\begin{cases}\frac{1}{12}(\omega_{i-1}+10\omega_i+\omega_{i+1}), & 1\leqslant i\leqslant m-1,\\ \omega_i, & i=0,m.\end{cases}$$

在 x_i 处考虑式(3)，则有

$$\left.\begin{aligned}&-\phi''(x_i)+(\varepsilon+\xi)\phi(x_i)=p(x_i), && 1\leqslant i\leqslant m-1,\\ &-y''(x_i)=\phi(x_i), && 1\leqslant i\leqslant m-1,\\ &y(0)=y(\pi)=\phi(0)=\phi(\pi)=0.\end{aligned}\right\}$$

用算子 $\mathscr{A}$ 作用于上式可得

$$\left.\begin{aligned}&-\mathscr{A}\phi''(x_i)+(\varepsilon+\xi)\mathscr{A}\phi(x_i)=\mathscr{A}p(x_i), && 1\leqslant i\leqslant m-1,\\ &-\mathscr{A}y''(x_i)=\mathscr{A}\phi(x_i), && 1\leqslant i\leqslant m-1,\\ &y(0)=y(\pi)=\phi(0)=\phi(\pi)=0.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

由引理 2 可得

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{A}\phi''(x_i)=\delta_x^2\phi(x_i)+\frac{h^4}{240}\frac{\partial^6\phi}{\partial x^6}(\xi_i), && \xi_i\in(x_{i-1},x_{i+1}),\\ &\mathscr{A}y''(x_i)=\delta_x^2y(x_i)+\frac{h^4}{240}\frac{\partial^6 y}{\partial x^6}(\eta_i), && \eta_i\in(x_{i-1},x_{i+1}).\end{aligned}\right\}$$

分别记 $R_i=\frac{h^4}{240}\frac{\partial^6\phi}{\partial x^6}(\xi_i)$，$\widetilde{R}_i=\frac{h^4}{240}\frac{\partial^6 y}{\partial x^6}(\eta_i)$. 将上式代入式(4)，并用 ϕ_i，y_i 分别代替 $\phi(x_i)$，$y(x_i)$，忽略小量项 $O(h^4)$，可得差分格式为

$$\left.\begin{aligned}&-\delta_x^2\phi_i+\frac{(\varepsilon+\xi)}{12}(\phi_{i+1}+10\phi_i+\phi_{i-1})=(p_{i+1}+10p_i+p_{i-1})/12, && 1\leqslant i\leqslant m-1,\\ &-\delta_x^2y_i=\frac{1}{12}(\phi_{i+1}+10\phi_i+\phi_{i-1}), && 1\leqslant i\leqslant m-1,\\ &y_0=y_m=\phi_0=\phi_m=0.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

由上述过程可知该差分格式的截断误差为 $O(h^4)$.

定理 2 差分格式(5)是唯一可解的.

证明 考虑齐次方程组

$$\left.\begin{aligned}&-\delta_x^2\phi_i+\frac{(\varepsilon+\xi)}{12}[\phi_{i+1}+10\phi_i+\phi_{i-1}]=0, \qquad 1\leqslant i\leqslant m-1,\\&\phi_0=\phi_m=0.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

令 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m-1}\{|\phi_i|\}=M$,现设 $M=0$,则 $\exists k\in[1,m-1]$使得$|\phi_k|=M$,且$|\phi_{k+1}|$和$|\phi_{k-1}|$中至少有一个小于 M. 则由

$$(2+10\,\frac{(\varepsilon+\xi)h^2}{12})\phi_k=(1-\frac{(\varepsilon+\xi)h^2}{12})\phi_{k-1}+(1-\frac{(\varepsilon+\xi)h^2}{12})\phi_{k+1}$$

两边取绝对值可得

$$2M\leqslant[2+10\,\frac{(\varepsilon+\xi)h^2}{12}]\,|\,\phi_k\,|=|\,(1-\frac{(\varepsilon+\xi)h^2}{12})\phi_{k-1}+(1-\frac{(\varepsilon+\xi)h^2}{12})\phi_{k+1}\,|\leqslant$$

$$|\,(1-\frac{(\varepsilon+\xi)h^2}{12})\phi_{k-1}\,|+|\,(1-\frac{(\varepsilon+\xi)h^2}{12})\phi_{k+1}\,|<M+M=2M.$$

因此,可得 $M=0$,这与 $M>0$ 相矛盾,所以方程组(6)只有零解.

另外,由于差分方程组

$$\left.\begin{aligned}&-\delta_x^2y_i=0, \qquad 1\leqslant i\leqslant m-1,\\&y_0=y_m=0\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

的系数矩阵是对称正定的,从而也只有零解. 因此,差分格式对应的齐次方程组只有零解,所以差分格式(5)是唯一可解的.

下面讨论差分格式的收敛性. 令

$$U_0=\{u\mid u=\{u_i\mid 1\leqslant i\leqslant m-1,u_0=u_m=0\}\ \text{为}\ \Omega_h\ \text{上的网格函数}\}.$$

记 $\delta_xu_{i-1/2}=\dfrac{1}{h}(u_i-u_{i-1})$,并且定义范数 $\|u\|_{\infty,h}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m-1}|\,u_i\,|$, $\|u\|_h=[h(\dfrac{1}{2}u_0^2+\sum\limits_{i=1}^{m-1}u_i^2+\dfrac{1}{2}u_m^2)]^{1/2}$, $|\,u\,|_{1,h}=[h\sum\limits_{i=1}^{m}(-\delta_xu_{i-1/2})^2]^{1/2}$.

引理 3 若 $u\in U_0$,则有

$$|\,u\,|_{1,h}^2=h\sum_{i=1}^{m}(-\delta_x^2u_i)u_i,\tag{8}$$

$$\|u\|_{\infty,h}\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,|\,u\,|_{1,h},\tag{9}$$

$$\|u\|_h\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{6}}\,|\,u\,|_{1,h}.\tag{10}$$

引理 3 的证明可参阅文献[7].

定理 3 设 $\phi=\{\phi_i\,|\,0\leqslant i\leqslant m\}$, $y=\{y_i\,|\,0\leqslant i\leqslant m\}$为差分格式(5)的解. 则有

$$\|\phi\|_h\leqslant\frac{\pi^{5/2}}{6}\|p\|_{\infty,h},\tag{11}$$

$$|\,\phi\,|_{1,h}\leqslant\frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{6}}\|p\|_{\infty,h},\tag{12}$$

$$\|\phi\|_{\infty,h}\leqslant\frac{\pi^2}{2\sqrt{6}}\|p\|_{\infty,h},\tag{13}$$

$$\|y\|_h\leqslant\frac{\pi^{9/2}}{36}\|p\|_{\infty,h},\tag{14}$$

$$|\,p\,|_{1,h}\leqslant\frac{\pi^{7/2}}{12}\|p\|_{\infty,h},\tag{15}$$

$$\|y\|_{\infty,h}\leqslant\frac{\pi^4}{24}\|p\|_{\infty,h}.\tag{16}$$

证明　在式(5)中第一个方程两边同乘以 $h\phi_i$，并对 i 求和，可得

$$h\sum_{i=1}^{m-1}(-\delta_x^2\phi_i)\phi_i+\sum_{i=1}^{m-1}\frac{(\varepsilon+\xi)}{12}h(\phi_{i+1}+10\phi_i+\phi_{i-1})\phi_i=\frac{h}{12}\sum_{i=1}^{m-1}(p_{i+1}+10p_i+p_{i-1})\phi_i.$$

因 $\varepsilon,\xi>0$，故有

$$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{(\varepsilon+\xi)}{12}h(\phi_{i+1}+10\phi_i+\phi_{i-1})\phi_i\geqslant\frac{(\varepsilon+\xi)}{12}h\sum_{i=1}^{m-2}[(\phi_i+\phi_{i+1})^2+8\phi_i^2+8\phi_{m-1}^2]\geqslant 0.$$

而由 Schwartz 不等式可得

$$\frac{1}{12}h\sum_{i=1}^{m-1}(p_{i+1}+10p_i+p_{i-1})\phi_i\leqslant\sqrt{h\sum_{i=1}^{m-1}p_i^2}\cdot\sqrt{h\sum_{i=1}^{m-1}\phi_i^2}=\|p\|_h\cdot\|\phi\|_h.$$

因此，由式(8)可得

$$\left.\begin{aligned}&|\phi|_{1,h}^2\leqslant\|p\|_h\cdot\|\phi\|_h,\\&\|p\|_h=\sqrt{h\sum_{i=1}^{m-1}p_i^2}\leqslant\|p\|_{\infty,h}\sqrt{\sum_{i=1}^{m-1}h}\leqslant\sqrt{\pi}\,\|p\|_{\infty,h}.\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

由式(10)，(17)可得

$$\|\phi\|_h\leqslant\frac{\pi^{5/2}}{6}\|p\|_{\infty,h}.$$

即式(11)成立. 利用式(9)，(10)，并结合式(17)可得

$$|\phi|_{1,h}\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{6}}\|p\|_h\leqslant\frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{6}}\|p\|_{\infty,h},$$

$$\|\phi\|_{\infty,h}\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2}|\phi|_{1,h}\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{\pi}\,\|p\|_{\infty,h}=\frac{\pi^2}{2\sqrt{6}}\|p\|_{\infty,h}.$$

即式(12)，(13)成立.

同理，在 $-\delta_x^2y_i=\mathscr{A}(\phi)_i$ 两边同乘以 hy_i，并对 i 求和得

$$h\sum_{i=1}^{m-1}(-\delta_x^2y_i)y_i=\sum_{i=1}^{m-1}\frac{h}{12}(\phi_{i+1}+10\phi_i+\phi_{i-1})y_i.$$

同样，由式(8)与 Schwartz 不等式可知

$$|y|_{1,h}^2\leqslant\|y\|_h\cdot\|\phi\|_h.$$

由式(10)，(11)可得

$$|y|_{1,h}^2\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{6}}\|\phi\|_h\cdot\|y\|_{1,h},$$

$$|y|_{1,h}\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{6}}\|\phi\|_h\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{\pi}\,\|\phi\|_{\infty,h}\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{\pi}\,\frac{\pi}{2\sqrt{6}}\|p\|_{\infty,h}=\frac{\pi^{7/2}}{12}\|p\|_{\infty,h}.$$

式(15)得证. 利用式(9)，(10)，(13)得

$$\|y\|_h\leqslant\frac{\pi^{9/2}}{36}\|p\|_{\infty,h},$$

$$\|y\|_{\infty,h}\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{2}|y|_{1,h}\leqslant\frac{\pi^4}{24}\|p\|_{\infty,h}.$$

从而式(14)，(16)得证. 由式(4)，(5)及定理 3 可得如下结论.

定理 4　假设 $y(x_i)$为边值问题(4)的解，y_i 为差分格式(5)的解. 记 $e_i=\phi(x_i)-\phi_i$，$\tilde{e}_i=y(x_i)-y_i$，$0\leqslant i\leqslant m$，则有

$$\|e\|_{\infty,h}\leqslant\frac{\pi^2}{480\sqrt{6}}M_1h^4,\qquad\|\tilde{e}\|_{\infty,h}\leqslant\frac{\pi^2}{480\sqrt{6}}M_2h^4.$$

其中，$M_1=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\pi}|\phi^{(6)}(x)|$；$M_2=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\pi}|y^{(6)}(x)|$.

定理 5　差分格式(5)是稳定的.

证明　假设在计算 $\mathscr{A}p(x_i)$，$\mathscr{A}\phi(x_i)$时，分别有微小的误差 g_i，$\tilde{g}_i$，设 η_i，v_i 是下列问题的解，即

$$\left.\begin{aligned}&-\delta_x^2\eta_i+(\varepsilon+\xi)\mathscr{A}\eta_i=\mathscr{A}p(x_i)+g_i, &&1\leqslant i\leqslant m-1,\\&-\delta_x^2 v_i=\mathscr{A}\phi_i+\tilde{g}_i, &&1\leqslant i\leqslant m-1,\\&v_0=v_m=\eta_0=\eta_m=0.\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

将式(4)和(18)相减可得

$$\left.\begin{aligned}&-\delta_x^2\lambda_i+\mathscr{A}(\varepsilon+\xi)\lambda_i=g_i, &&1\leqslant i\leqslant m-1,\\&-\delta_x^2\tilde{\lambda}_i=\tilde{g}_i, &&1\leqslant i\leqslant m-1,\\&\tilde{\lambda}_i=\tilde{\lambda}_m=\lambda_0=\lambda_m=0.\end{aligned}\right\}$$

其中,$\lambda_i=\eta_i-\phi_i$;$\tilde{\lambda}_i=v_i-y_i$.

由定理3可得

$$\|\lambda\|_{\infty,h}\leqslant\frac{\pi^2}{2\sqrt{6}}\max_{1\leqslant i\leqslant m-1}|g_i|,$$

$$\|\tilde{\lambda}\|_{\infty,h}\leqslant\frac{\pi^2}{2\sqrt{6}}\max_{1\leqslant i\leqslant m-1}|\tilde{g}_i|.$$

当$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m-1}|g_i|$,$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m-1}|\tilde{g}_i|$很小时,$|\lambda|$,$|\tilde{\lambda}|$也很小,所以差分格式(5)是稳定的.

3 方程的求解

如前所述,可以通过求解 $g(\xi)=\xi$ 得到方程(3)的解,进而可求得原问题(1)的数值解.然而,在多数情况下,方程 $g(\xi)=\xi$ 的古典解是难以求得的.因此,采用 Newton 迭代算法[9]来求解 $f(\xi)=g(\xi)-\xi=0$.具体迭代求解过程有如下4个步骤.

1) 给定初始值 ξ_0,如 $\xi_0=0$.

2) 已知 ξ_k,$k=0,1,2,\cdots$,依次求解下列方程,即

$$\left.\begin{aligned}&-\delta_x^2\phi_i+\frac{(\varepsilon+\xi_k)}{12}(\phi_{i+1}+10\phi_i+\phi_{i-1})=\frac{1}{12}(p_{i+1}+10p_i+p_{i-1}), &&1\leqslant i\leqslant m-1,\\&-\delta_x^2 y_i=\frac{1}{12}(\phi_{i+1}+10\phi_i+\phi_{i-1}), &&1\leqslant i\leqslant m-1,\\&y_0=y_m=\phi_0=\phi_m=0.\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

3) 根据格式

$$\xi_{k+1}=\xi_k-f(\xi_k)/f'(\xi_k),\qquad k=0,1,2,\cdots,\quad \xi_0\geqslant 0$$

来计算 ξ_{k+1},其中,$f(\xi_k)$,$f'(\xi_k)$可分别采用如下数值算法.由分部积分可知

$$g(\xi)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi y(x,\xi)\phi(x,\xi)\mathrm{d}x.$$

因此,$f(\xi_k)$可利用数值积分[10]来逼近,即

$$f(\xi_k)=g(\xi_k)-\xi_k\approx\frac{2}{\pi}h\sum_{i=1}^{m-1}y_k(x_i)\phi_k(x_i)-\xi_k.$$

$f'(\xi_k)$可采用数值微分[11]的形式进行替代,即

$$f'(\xi_k)\approx(f(\xi_k+h)-f(\xi_k))/h,\tag{20}$$

$$f'(\xi_k)\approx(f(\xi)-f(\xi_k-h))/h.\tag{21}$$

4) 若$|\xi_k-\xi_{k+1}|<$TOL(TOL为迭代控制精度),迭代终止;否则,令 $\xi_k=\xi_{k+1}$,转至2).

4 数值结果

为便于表达和计算,在式(1)中选取参数 $\varepsilon=2$,并采用式(20)进行计算.

例1 $p(x)=-4\sin x$.

此时方程的精确解为 $y(x)=-\sin x$.当 TOL$=10^{-10}$时,数值解和精确解最大误差的绝对值,以及不同节点处数值解的最大误差,如表1所示.表1中:$E_\infty(h)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m-1}|y(x_i)-y_i|$.由表1可知:数值解在范数$\|\cdot\|_{\infty,h}$下具有4阶精度,且随步长的减小,迭代所需的次数也减小.

表 1　部分节点处数值解的误差的绝对值和数值解的最大误差

Tab. 1　Absolute value of the error on the nodes and maximum error of the numerical solution

h	k	$\pi/10$	$\pi/5$	$2\pi/5$	$4\pi/5$	$E_\infty(h)$	$E_\infty(h)/E_{\infty(h/2)}$
$\pi/10$	9	1.2591×10^{-5}	2.3950×10^{-5}	3.8752×10^{-5}	2.3950×10^{-5}	4.0746×10^{-5}	—
$\pi/20$	7	7.8464×10^{-8}	1.4924×10^{-6}	2.4149×10^{-6}	1.4924×10^{-6}	2.5391×10^{-6}	16.0471
$\pi/40$	7	4.9005×10^{-8}	9.3214×10^{-8}	1.5082×10^{-7}	9.3214×10^{-8}	1.5858×10^{-7}	16.0113
$\pi/80$	7	3.0623×10^{-9}	5.8249×10^{-9}	9.4249×10^{-9}	5.8249×10^{-9}	9.9099×10^{-9}	16.0027
$\pi/160$	6	1.8779×10^{-10}	3.5720×10^{-10}	5.7796×10^{-10}	3.5719×10^{-10}	6.0777×10^{-10}	16.3070

5　结论

提出紧差分格式求解一类四阶微积分方程，证明了格式的存在性、收敛性和稳定性. 数值结果表明格式是有效的，且具有 $O(h^4)$的精度.

参考文献：

[1] FEIREISL E. Exponential attractors for non-autonomous systems: Long-time behaviour of vibrating beams[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences，1992，15(4)：287-297.

[2] SHIN J Y. Finite-element approximation of a fourth-order differential equation[J]. Computers and Mathematics with Applications，1998，35(8)：95-100.

[3] OHM M R，LEE H Y，SHIN J Y. Error estimates of finite-element approximations for a fourth-order differential equation[J]. Computers and Mathematics with Applications，2006，52(3/4)：283-288.

[4] DANG Q A，LUAN V T. Iterative method for solving a nonlinear fourth order boundary value problem[J]. Computers and Mathematics with Applications，2010，60(1)：112-121.

[5] SEMPER B. Finite element methods for suspension bridge models[J]. Computers and Mathematics with Applications，1993，26(5)：77-91.

[6] 庄清渠，任全伟. 一类四阶微积分方程的差分迭代解法[J]. 华侨大学学报：自然科学版，2012，33(6)：709-714.

[7] 孙志忠. 偏微分方程数值解法[M]. 北京：科学出版社，2012：13-15.

[8] SHIDAMA Y. The Taylor expansions[J]. Formalized Mathematics，2004，12(2)：195-200.

[9] SHERMAN A H. On Newton-iterative methods for the solution of systems of nonlinear equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis，1978，15(4)：755-771.

[10] DAVIS P J，RABINOWITZ P. Methods of numerical integration[M]. New York: Dover Publications，2007：57-60.

[11] GAUTSCHI W. Numerical analysis[M]. Berlin: Birkhauser Boston，2011：168-178.

Compact Difference for a Class of Fourth-Order Integro-Differential Equations

REN Quan-wei, ZHUANG Qing-qu

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: A compact difference scheme is proposed to solve the fourth-order integro-differential equation arising from the transverse vibrations of the hinge model. Newton type iteration methods are presented to deal with the integral term. The existence, convergence and stability of the scheme are also proved. Numerical results show that the accuracy order of the scheme is of $O(h^4)$.

Keywords: fourth-order integro-differential equation; compact difference scheme; iterative algorithm; convergence; stability

(责任编辑：钱筠　　英文审校：黄心中)