第35卷 第2期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 35 No. 2
2014年3月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Mar. 2014

文章编号:1000-5013(2014)02-0227-05　　**doi**:10.11830/ISSN.1000-5013.2014.02.0227

在微分算子作用下调和函数的单叶半径估计

王其文，黄心中

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 基于单叶调和函数系数模估计的猜想，在调和函数 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 的系数模满足猜想条件下，研究 $f(z)$ 在 $L=z\dfrac{\partial}{\partial z}-\bar{z}\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 作用下的单叶半径问题，分别得到精确的单叶半径表达式. 结果表明：在系数模估计满足更一般表达式的条件下，同样也能得到在 L 作用下 $L(f)$ 的精确单叶半径估计.

关键词： 调和函数；微分算子；单叶半径；系数估计

中图分类号： O 174.5　　**文献标志码**： A

1 预备知识

定义在平面区域 $\Omega\subset C$ 上的二阶连续可导复值函数 $f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$，$z=x+\mathrm{i}y\in\Omega$ 称为调和的，是指 f 的 Laplace 算子为 0，即 $\Delta f=4f_{z\bar{z}}=0$. 令 Φ 表示单位圆盘 $D=\{z||z|<1\}$ 上复值调和函数 $f(z)$ 全体，且具有规范化条件 $f(0)=f_z(0)-1=0$，记 $f(z)$ 的 Jacobian 为 $J_f=|f_z|^2-|f_{\bar{z}}|^2$，$z\in D$.

Lewy 在文献[1]中指出 $f(z)$ 是区域 D 上的局部单叶调和函数的充要条件是 $J_f(z)\neq 0$. $f(z)\in\Phi$ 可表示为 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$，其中：$h(z)$ 和 $g(z)$ 在 D 内解析且 $h(z)=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nz^n$，$g(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nz^n$. 令 S_H 表示 Φ 内单叶保向函数类 $f=h+\bar{g}$，当 $f_{\bar{z}}(0)=0$ 时，其子类 $S_H^0=\{f\in S_H: f_{\bar{z}}(0)=0\}$.

Clunie 等[2]定义了在 S_H^0 内的 Koebe 函数，并且给出两个系数猜想. S_H^0 内的 Koebe 函数表达式为

$$K(z)=H(z)+\overline{G(z)}=z+\sum_{n=2}^{\infty}A_nz^n+\overline{\sum_{n=2}^{\infty}B_nz^n}.$$

其中：$A_n=\dfrac{1}{6}(2n+1)(n+1)$，$B_n=\dfrac{1}{6}(2n-1)(n-1)$，$n\geqslant 1$.

当 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}\in S_H^0$ 时，系数猜想为 $|a_n|\leqslant A_n$，$|b_n|\leqslant B_n$，$n\geqslant 1$. 令 K_H 表示由单位圆盘 D 映照到凸区域的保向调和函数 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}\in\Phi$ 组成. 当 $f_{\bar{z}}(0)=0$ 时，其子类 $K_H^0=\{f\in K_H: f_{\bar{z}}(0)=0\}$. 当 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}\in K_H^0$，系数猜想为 $|a_n|\leqslant\dfrac{n-1}{2}$，$|b_n|\leqslant\dfrac{n+1}{2}$，$n\geqslant 1$. 等号可由 $L(z)=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n+1}{2}z^n-\overline{\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n-1}{2}z^n}$ 达到.

到目前为止，上述两个系数猜想还未被解决. 因此，不少学者开展研究其相反问题[3-5]，即若调和函数的系数模估计满足一定的不等式，寻找其单叶半径，考虑相关问题.

给定 $f(z)$ 是 D 上的调和函数，$f(z)$ 在微分算子 L 作用下的复值函数为 $L_f(z)=z\dfrac{\partial f}{\partial z}-\bar{z}\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}}$，$z\in D$. 近年来，利用调和函数子类的特性研究其单叶半径估计问题也有不少结果[5-9]. Abdulhadi 等[6-8]引入并定义了微分算子 $L=z\dfrac{\partial}{\partial z}-\bar{z}\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}$，且考虑调和函数在 L 作用下的性质，如 $L(f)$ 具有保调和性，

收稿日期： 2012-10-17

通信作者： 黄心中(1957-)，男，教授，主要从事函数论的研究. E-mail：huangxz@hqu.edu.cn.

基金项目： 福建省自然科学基金资助项目(2011J0101)

保双调和性,但未必保有界性. 刘名生等[10-11]中利用 Schwarz 引理,分别研究了双调和与调和函数在 L 算子作用下 $L(F)$ 的单叶半径估计问题.

2 主要结果及证明

定理 1 设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$,其中 $h(z)=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nz^n$,$g(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nz^n$ 定义在单位圆盘 D 上,且满足 $|a_n|\leqslant A_n$,$|b_n|\leqslant B_n$,$A_n=\dfrac{(2n+1)(n+1)}{6}$,$B_n=\dfrac{(2n-1)(n-1)}{6}$,则 $L(f)=zf_z-\bar{z}f_{\bar{z}}$ 在 D 上为调和函数且在圆盘 $D_{r_1}=\{z||z|<r_1\}$ 内是单叶的,$r_1\approx 0.061\ 4$ 是 5 次方程 $1-17r+13r^2-21r^3+10r^4-2r^5=0$ 在区间 $(0,1)$ 内的最小正根,结果是精确的.

证明 由假设 $|a_n|\leqslant A_n$,$|b_n|\leqslant B_n$ 可得 $h(z)$,$g(z)$ 在 D 内解析,故 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 在 D 内是调和的. 由 L 的保调和性知 $L(f)$ 在 D 内也是调和的,有

$$L(f)=zf_z-\bar{z}f_{\bar{z}}=z(1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1})-\bar{z}\sum_{n=1}^{\infty}n\bar{b}_n\bar{z}^{n-1}=z+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^n-\sum_{n=1}^{\infty}n\bar{b}_n\bar{z}^n.$$

令 $H(z)=L(f)$,由 $|b_n|\leqslant B_n$,可推出 $b_1=0$. 要证明 $H(z)$ 在 D_{r_1} 上的单叶性,任取 D_r 上的两点 z_1,z_2,用 γ 表示线段 $[z_1,z_2]$,有

$$\begin{aligned}
|H(z_1)-H(z_2)|=&\left|\int_{\gamma}H_z\mathrm{d}z+H_{\bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}\right|=\\
&\left|\int_{\gamma}(1+\sum_{n=2}^{\infty}n^2a_nz^{n-1})\mathrm{d}z-\sum_{n=2}^{\infty}n^2\bar{b}_n\bar{z}^{n-1}\mathrm{d}\bar{z}\right|\geqslant\\
&\left|\int_{\gamma}\mathrm{d}z\right|-\left|\int_{\gamma}(\sum_{n=2}^{\infty}n^2a_nz^{n-1})\mathrm{d}z-\sum_{n=2}^{\infty}n^2\bar{b}_n\bar{z}^{n-1}\mathrm{d}\bar{z}\right|\geqslant\\
&|z_1-z_2|-\int_{[z_1,z_2]}(\sum_{n=2}^{\infty}n^2|a_n||z|^{n-1}+\\
&\sum_{n=2}^{\infty}n^2|b_n||z|^{n-1})|\mathrm{d}_z|\geqslant\\
&|z_1-z_2|[1-\sum_{n=2}^{\infty}n^2(|a_n|+|b_n|)r^{n-1}]\geqslant\\
&|z_1-z_2|[1-\sum_{n=2}^{\infty}n^2(A_n+B_n)r^{n-1}],
\end{aligned}$$

则只要证明 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n^2(A_n+B_n)r^{n-1}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2n^4+n^2}{3}r^{n-1}<1$,$H(z)$ 就在 D_r 内单叶,即证明不等式

$$2\sum_{n=2}^{\infty}n^4r^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}n^2r^{n-1}<3 \tag{1}$$

成立.

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2r^{n-1}=\dfrac{1+r}{(1-r)^3}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3r^{n-1}=\dfrac{r^2+4r+1}{(1-r)^4}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^4r^{n-1}=\dfrac{r^3+11r^2+11r+1}{(1-r)^5}$,将其代入式(1)有

$$\frac{2(r^3+11r^2+11r+1)}{(1-r)^5}+\frac{1+r}{(1-r)^3}<6,$$

即 $1-17r+13r^3+10r^4-2r^5>0$ 成立.

令 r_1 是方程 $1-17r+13r^2-21r^3+10-r^4-2r^5=0$ 的最小正根,则利用 Matlab 软件可以求出 $r_1\approx 0.061\ 4$,从而 $L(f)$ 在 $|z|<r_1$ 内单叶.

考虑 r_1 的精确性问题,令函数 $F_0(z)=2z-H(z)+\overline{G(z)}=z-\sum\limits_{n=2}^{\infty}A_nz^n+\overline{\sum\limits_{n=2}^{\infty}B_nz^n}$,则

$$L_{F_0}(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}nA_nz^n-\overline{\sum_{n=2}^{\infty}nB_nz^n}=H_1(z)+\overline{G_1(z)},$$

$$J_{L(F_0)}(r)=|H'_1(r)|^2-|G'_1(r)|^2=(|H'_1(r)|+|G'_1(r)|)(|H'_1(r)|-|G'_1(r)|)=$$

$$(|H'_1(r)|+|G'_1(r)|)[1-\sum_{n=2}^{\infty}n^2(A_n+B_n)r^{n-1}].$$

令 $J_{L(F_0)}(r)=0$，有 $1-\sum_{n=2}^{\infty}n^2(A_n+B_n)r^{n-1}=0$，可得 $r_1\approx 0.061\,4$. 所以，若 $r>r_1$，函数 $L_{F_0}(z)$ 在 $|z|<r$ 内不是单叶的，这就证明了 r_1 不能取得更大的数.

相对于 S_H^0 类中的凸函数系数猜想，可以证明定理 2.

定理 2　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$，其中 $h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$，$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$ 定义在单位圆盘 D 上，并且系数满足条件 $|a_n|\leqslant\frac{n+1}{2}$，$|b_n|\leqslant\frac{n-1}{2}$，则 $L(f)=zf_z-\bar{z}f_{\bar{z}}$ 在 D 上为调和函数且在圆盘 $D_{r_2}=\{z|\,|z|<r_2\}$ 内是单叶的，$r_2\approx 0.090\,3$ 是 4 次方程 $2r^4-8r^3-11r^2-12r+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内的最小正根，结果是精确的.

证明　由假设 $|a_n|\leqslant\frac{n+1}{2}$，$|b_n|\leqslant\frac{n-1}{2}$，可得 $h(z)$，$g(z)$ 在 D 内解析，故 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 在 D 内是调和的. 由 L 的保调和性知 $L(f)$ 在 D 内也是调和的，有

$$L(f)=zf_z-\bar{z}f_{\bar{z}}=z(1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1})-\bar{z}\sum_{n=1}^{\infty}n\bar{b}_n\bar{z}^{n-1}=z+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^n-\sum_{n=1}^{\infty}n\bar{b}_n\bar{z}^n.$$

令 $H(z)=L(f)$，由 $|b_n|\leqslant\frac{n-1}{2}$，可推出 $b_1=0$. 要证明 $H(z)$ 在 D_{r_2} 上的单叶性，任取 D_r 上的两点 z_1，$_2$，用 γ 表示线段 $[z_1,z_2]$，有

$$|H(z_1)-H(z_2)|=|\int_{\gamma}(1+\sum_{n=2}^{\infty}n^2a_nz^{n-1})\mathrm{d}z-\sum_{n=2}^{\infty}n^2\bar{b}_n\bar{z}^{n-1}\mathrm{d}\bar{z}|\geqslant$$

$$|z_1-z_2|-\int_{[z_1,z_2]}(\sum_{n=2}^{\infty}n^2|a_n||z|^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}n^2|b_n||z|^{n-1})|\mathrm{d}_z|\geqslant$$

$$|z_1-z_2|[1-\sum_{n=2}^{\infty}n^2(|a_n|+|b_n|)r^{n-1}]\geqslant|z_1-z_2|(1-\sum_{n=2}^{\infty}n^3r^{n-1}),$$

只要证明

$$\sum_{n=2}^{\infty}n^3r^{n-1}<1 \tag{2}$$

成立.

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}n^3r^{n-1}=\frac{r^2+4r+1}{(1-r)^4}$，代入式(2)有 $\frac{r^2+4r+1}{(1-r)^4}\leqslant 2$ 成立，即要求 $2r^4-8r^3+11r^2-12r+1>0$ 成立.

令 r_2 是方程 $2r^4-8r^3-11r^2-12r+1=0$ 的最小正根，利用 Matlab 软件可求出 $r_2\approx 0.090\,3$，从而 $L(f)$ 在 $|z|<r_2$ 内单叶.

考虑 r_2 的精确性，令函数 $M_0(z)=2z-H(z)+\overline{G(z)}=z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2}z^n+\overline{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{2}z^n}$，有

$$L_{M_0}(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}z^n-\overline{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{2}z^n}=H_2(z)+\overline{G_2(z)},$$

$$J_{L(M_0)}(r)=|H'_2(r)|^2-|G'_2(r)|^2=(|H'_2(r)|+|G'_2(r)|)(|H'_2(r)|^2-|G'_2(r)|)=$$

$$(|H'_2(r)|+|G'_2(r)|)(1-\sum_{n=2}^{\infty}n^3r^{n-1}).$$

令 $J_{L(M_0)}(r)=0$ 时，有 $1-\sum_{n=2}^{\infty}n^3r^{n-1}=0$，可得 $r=r_2\approx 0.090\ 3$. 所以，当 $r>r_2$，函数 $L_{M_0}(z)$ 在 $|z|<r$ 内就不是单叶的，这就证明了 r_2 不能取得更大的数.

基于以上结果，下面考虑更一般的情形，可得到定理 3.

定理 3 假设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$，其中 $h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$，$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$ 定义在单位圆盘 D 上，满足 $|b_1|<1$ 且 $|a_n|+|b_n|\leqslant\alpha n^2+\beta n+\gamma$，$n\geqslant 2$，$\alpha,\beta,\gamma$ 为非负常数，则 $L(f)=zf_z-\bar{z}f_{\bar{z}}$ 在 D 上为调和且在圆盘 $|z|<r_3$ 内是单叶的，r_3 是多项式 $(1-|b_1|)(1-r)^5-\alpha(r^5-5r^4+11r^3+r^2+16r)-\beta(1-r)(-r^4+4r^3-5r^2+8r)-\gamma(1-r)^2(r^3-3r^2+4r)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内的最小正根，结果是精确的.

证明 由假设 $|a_n|+|b_n|\leqslant\alpha n^2+\beta n+\gamma$ 可得 $f(z)$，$g(z)$ 在 D 内解析，故 $f=h+\bar{g}$ 在 D 内是调和的，从而 $L(f)$ 在 D 内也是调和的，$L(f)=z+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^n-\overline{\sum_{n=1}^{\infty}nb_nz^n}$.

令 $H(z)=L(f)$，要证明 $H(z)$ 在 D_{r_3} 上的单叶性，任取 D_r 上两点 z_1，z_2，用 γ 表示线段 $[z_1,z_2]$，有

$$\begin{aligned}|H(z_1)-H(z_2)|=&\left|\int_\gamma H_z\mathrm{d}z+H_{\bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}\right|=\left|\int_\gamma(1+\sum_{n=2}^{\infty}n^2a_nz^{n-1})\mathrm{d}z-\sum_{n=1}^{\infty}n^2\bar{b}_n\bar{z}^{n-1}\mathrm{d}\bar{z}\right|\geqslant\\&(1-|b_1|)|z_1-z_2|-\int_{[z_1,z_2]}(\sum_{n=2}^{\infty}n^2|a_n||z|^{n-1}+\\&\sum_{n=2}^{\infty}n^2|b_n||z|^{n-1})|\mathrm{d}_z|\geqslant\\&|z_1-z_2|[(1-|b_1|)-\sum_{n=2}^{\infty}n^2(|a_n|+|b_n|)r^{n-1}]\geqslant\\&|z_1-z_2|[(1-|b_1|)-\sum_{n=2}^{\infty}n^2(\alpha n^2+\beta n+\gamma)r^{n-1}],\end{aligned}$$

故只要证明 $\sum_{n=2}^{\infty}n^2(\alpha n^2+\beta n+\gamma)r^{n-1}<1-|b_1|$ 时，$H(z)$就在 D_r 内单叶，即

$$\alpha\sum_{n=2}^{\infty}n^4r^{n-1}+\beta\sum_{n=2}^{\infty}n^3r^{n-1}+\gamma\sum_{n=2}^{\infty}n^2r^{n-1}<1-|b_1| \tag{3}$$

成立. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2r^{n-1}=\frac{1+r}{(1-r)^3}$，$\sum_{n=1}^{\infty}n^3r^{n-1}=\frac{r^2+4r+1}{(1-r)^4}$，$\sum_{n=1}^{\infty}n^4r^{n-1}=\frac{r^3+11r^2+11r+1}{(1-r)^5}$，将其代入式(3)有

$$\frac{\alpha(r^5-5r^4+11r^3+r^2+16r)}{(1-r)^5}+\frac{\beta(-r^4+4r^3-5r^2+8r)}{(1-r)^4}+\frac{\gamma(r^3-3r^2+4r)}{(1-r)^3}<1-|b_1|$$

成立.

r_3 是方程 $(1-|b_1|)(1-r)^5-\alpha(r^5-5r^4+11r^3+r^2+16r)-\beta(-r^4+4r^3-5r^2+8r)-\gamma(r^3-3r^2+4r)=0$ 的最小正根，从而 $L(f)$在$|z|<r_3$ 内单叶.

考虑 r_3 的精确性问题，取 α,β,γ 满足定理 3 中的条件，令 $K_0(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}\alpha n^2z^n+\overline{|b_1|z+\sum_{n=2}^{\infty}(\beta n+\gamma)z^n}$，有 $L_{K_0}(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}\alpha n^3z^n-\overline{|b_1|z+\sum_{n=2}^{\infty}n(\beta n+\gamma)z^n}=H_3(z)+\overline{G_3(z)}$，

$$\begin{aligned}J_{L(M_0)}(r)=&|H'_3(r)|^2-|G'_3(r)|^2=(|H'_3(r)|+|G'_3(r)|)(|H'_3(r)|-|G'_3(r)|)=\\&(|H'_3(r)|+|G'_3(r)|)(|1-\sum_{n=2}^{\infty}\alpha n^4r^{n-1}|-|b_1|-\sum_{n=2}^{\infty}n^2(\beta n+\gamma)r^{n-1}].\end{aligned}$$

当 $r=r_3$ 时，有 $|1-\sum_{n=2}^{\infty}\alpha n^4r_3^{n-1}|=1-\sum_{n=2}^{\infty}\alpha n^4r_3^{n-1}$，则

$$J_{L(M_0)}(r_3)=(|H'_3(r_3)|+|G'_3(r_3)|)(|1-\sum_{n=2}^{\infty}\alpha n^4r_3^{n-1}|-|b_1|-\sum_{n=2}^{\infty}n^2(\beta n+\gamma)r_3^{n-1}]=0.$$

所以，若 $r>r_3$，函数 $L_{K_0}(z)$ 在 $|z|<r$ 内不是单叶的，这就证明了 r_3 不能取得更大的数.

参考文献：

[1] LEWY H. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings[J]. Uspekhi Mat Nauk，1948，3(2)：216-219.

[2] CLUNIE J，SHEIL-SMALL T. Harmonic univalent functions[J]. Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math，1984，9：3-25.

[3] CHEN S，PONNUSAMY S，WANG X. Coefficient estimates and Landou-Bloch's constant for planar harmonic mappings[J]. Bull Malaysian Math Science Soc，2011，34(2)：255-265.

[4] BSHOUTY D，LYZZAIK A. Problems and conjectures in planar harmonic mappings[J]. J Analysis，2010，18：69-81.

[5] CHEN S，PONNUSAMY S，WANG X. Recent results on harmonic and p-harmonic mappings[J]. J Analysis，2010，18：99-128.

[6] ABDULHADI Z，MUHANNA Y A. Landau's theorem for biharmonic mappings[J]. J Math Anal Appl，2008，338(1)：705-709.

[7] ABDULHADI Z，MUHANNA Y A，KHURI S. On some properties of solutions of the biharmonic equation[J]. Appied Mathematics and Computation，2006，177(1)：346-351.

[8] ABDULHADI Z，MUHANNA Y A，KHURI S. On univalent solutions of the biharmonic equation[J]. Journal of Inequalities and Applications，2005，5：469-478.

[9] 夏小青，黄心中. 一类双调和映照的单叶半径估计[J]. 华侨大学学报：自然科学版，2011，32(2)：218-221.

[10] CHEN S，PONNUSAMY S，WANG X. Landau's theorem for certain biharmonic mappings[J]. Applied Mathematics and Computation，2009，208(28)：427-433.

[11] LIU Ming-sheng. Landau's theorems for biharmonic mappings[J]. Complex Variables and Elliptic Equations，2008，53(9)：843-855.

On the Estimates of Univalent Radius for Harmonic Mappings under the Differential Operator

WANG Qi-wen，HUANG Xin-zhong

(School of Mathematical Sciences，Huaqiao University，Quanzhou 362021，China)

Abstract： Let $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ be a harmonic mapping on the unit disk $D=\{z||z|<1\}$，L represents the differential operator $L=z\dfrac{\partial}{\partial z}-\bar{z}\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Under the coefficients satisfying two famous conjecture bounds for univalent harmonic functions on D，we obtain two sharp univalent radii for $L_f(z)=z\dfrac{\partial f}{\partial z}-\bar{z}\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \bar{z}}$. Moreover，with the condition that the coefficients satisfying one general expression，we also obtain the similar sharp result.

Keywords： harmonic mapping；differential operator；univalent radius；coefficient estimate

（**责任编辑**：陈志贤　　**英文审校**：黄心中）