第35卷 第2期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.35 No.2
2014年3月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Mar. 2014

文章编号:1000-5013(2014)02-0222-05 **doi:**10.11830/ISSN.1000-5013.2014.02.0222

缺失数据下两个逆高斯总体的估计与检验

骆道忠

(华侨大学 数学科学学院,福建 泉州 362021)

摘要: 讨论部分缺失数据下逆高斯总体两参数的估计,证明估计的强相合性与渐近正态性.同时,给出检验两总体参数相等的检验统计量,及其极限分布,并讨论基于精确分布的检验问题.

关键词: 逆高斯分布;缺失数据;似然比检验;极限分布

中图分类号: O 212.1 **文献标志码:** A

逆高斯分布是与高斯分布有关的另一分布,在很多方面都有非常重要的应用,如可靠性理论、寿命数据模型等[1].因此,对其进行研究具有极其重要的意义.利用统计推断方法解决此类问题时,数据缺失情况经常出现[2].对于缺失数据下两个单参数分布总体,很多文献都有较深入的讨论[3-7],但对于两参数总体的统计推断问题讨论的较少,并且关于逆高斯分布总体的统计问题也未用类似的方法研究过.本文将讨论两个逆高斯分布总体都不全在观测者掌控下两参数的估计与假设检验问题.

1 基本假设与估计

假设有两个逆高斯分布总体,其概率密度函数为

$$f_i(x;\mu_i;\lambda_i)=\begin{cases}(\dfrac{\lambda_i}{2\pi x^3})^{1/2}\exp(-\dfrac{\lambda_i(x-\mu_i)^2}{2\mu_i^2 x}), & x>0,\quad i=1,2,\\ 0, & x\leqslant 0,\quad i=1,2.\end{cases}$$

其中:$\mu_i>0$,$\lambda_i>0$为未知参数.分别独立观测两逆高斯总体各n次,样本依次为$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$与$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$,但样本X_j以概率$1-p_1$丢失.这样对第一个总体抽样观测实际得到(X_j,δ_j),$j=1,2,\cdots,n$,其中,$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$与$(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)$独立,$\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$独立同分布,且$\delta_1\sim b(1,p_1)$.$\delta_j=1$表示得到观测$X_j$;而$\delta_j=0$,$X_j$表示没有得到观测值,重新将第一个总体实际得到的$n_1$个观测值(当$n_1=0$时,应继续抽样)表示为$Z_1,Z_2,\cdots,Z_{n_1}$,显然有$n_1=\sum\limits_{j=1}^{n}\delta_j$,$\sum\limits_{j=1}^{n_1}Z_j=\sum\limits_{j=1}^{n}X_j\delta_j$.同样的,对第二个总体抽样时,$Y_j$以概率$1-p_2$丢失,实际观测到的值为$(Y_j,\eta_j)$,$j=1,2,\cdots n$,其中,$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$与$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$独立,$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$独立同分布,且$\eta_1\sim b(1,p_2)$.$\eta_j=1$,表示得到观测$Y_j$;而$\eta_j=0$,$Y_j$表示没有得到观测值,重新将第二个总体实际得到的$n_2$个观测值(当$n_2=0$时,应继续抽样)表示为$W_1,W_2,\cdots,W_{n_2}$,则有$n_2=\sum\limits_{j=1}^{n}\eta_j$,$\sum\limits_{j=1}^{n_2}W_j=\sum\limits_{j=1}^{n}Y_j\eta_j$.

先求λ_1,μ_1的极大似然估计,似然函数为

$$L(\mu_1,\lambda_1)=\prod_{j=1}^{n_1}f_1(Z_j;\mu_1,\lambda_1)=\prod_{j=1}^{n_1}(\frac{\lambda_1}{2\pi Z_j^3})^{1/2}\exp(-\frac{\lambda_1(Z_j-\mu_1)^2}{2\mu_1^2 Z_j}).$$

经过取对数,求偏导,易得λ_1,μ_1的极大似然估计分别为

收稿日期: 2012-11-28

通信作者: 骆道忠(1976-),男,讲师,主要从事数理统计的研究.E-mail:ldzblue@163.com.

基金项目: 华侨大学高层次人才科研启动项目(11BS220,10BS215)

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} Z_j \triangleq \bar{Z},$$

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{n_1}{\sum_{j=1}^{n_1}\left(\frac{1}{Z_j} - \frac{1}{\bar{Z}}\right)}.$$

同理,求得 λ_2,μ_2 的极大似然估计分别为

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} W_j \triangleq \bar{W},$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{n_2}{\sum_{j=1}^{n_2}\left(\frac{1}{W_j} - \frac{1}{\bar{W}}\right)}.$$

在假设 H'_0：$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$($\lambda$ 未知)下,同样易求得 μ_1,μ_2,λ 的极大似然估计分别为

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} Z_j \triangleq \bar{Z},$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} W_j \triangleq \bar{W},$$

$$\hat{\lambda} = \frac{n_1+n_2}{\sum_{j=1}^{n_1}\left(\frac{1}{Z_j} - \frac{1}{\bar{Z}}\right) + \sum_{j=1}^{n_2}\left(\frac{1}{W_j} - \frac{1}{\bar{W}}\right)}.$$

2　主要结果及其证明

引理 1　若 X 服从逆高斯分布,则有

$$EX = \mu,\qquad DX = \frac{\mu^3}{\lambda},\qquad E\frac{1}{X} = \frac{1}{\mu}+\frac{1}{\lambda},\qquad D\frac{1}{X} = \frac{2}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda\mu}.$$

证明　依定义计算即可.

引理 2[8]　设 $X\sim\Gamma(\alpha_1,\lambda)$,$Y\sim\Gamma(\alpha_2,\lambda)$,且 X 与 Y 相互独立,则 $X/(X+Y)\sim \mathrm{B}(\alpha_1,\alpha_2)$.

引理 3[9]　在前述记号下,$\sum_{j=1}^{n_1}\left(\frac{1}{Z_j}-\frac{1}{\bar{Z}}\right)\sim\frac{1}{\lambda_1}\chi^2(n_1-1)$,$\sum_{j=1}^{n_2}\left(\frac{1}{W_j}-\frac{1}{\bar{W}}\right)\sim\frac{1}{\lambda_2}\chi^2(n_2-1)$.

定理 1　1) $\hat{\mu}_i\to\mu_i$,a. s. ,$i=1,2$;2) $\hat{\lambda}_i\to\lambda_i$,a. s. ,$i=1,2$.

证明　只须证明 $i=1$ 时的情况.

1) 注意 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立,$\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$ 独立,且$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$与$(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)$独立,据强大数定理可得 $\frac{n_1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_j\to p_1$,a. s. ,且$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\delta_j\to EX_1E\delta_1=p_1\mu_1$,a. s. . 由 Slutsky 定理可得 $\hat{\mu}_1=\frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1}Z_j=\frac{n}{n_1}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\delta_j\to\frac{1}{p_1}p_1\mu_1=\mu_1$,a. s. .

2) 令 $g(t)=1/t$,则 $g(t)$在 μ_1 处连续,由 1) 得

$$\frac{1}{\bar{Z}} = g(\bar{Z}) = g(\hat{\mu}_1)\to g(\mu_1) = \frac{1}{\mu_1},\text{a. s. }.$$

运用大数定理及引理 1 又可得

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{X_j}\delta_j\to E\frac{1}{X_1}E\delta_1 = p_1\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\lambda_1}\right),\text{a. s. },$$

又
$$\frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1}\left(\frac{1}{Z_j}-\frac{1}{\bar{Z}}\right) = \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1}\frac{1}{Z_j}-\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{n}{n_1}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{X_j}\delta_j-\frac{1}{\bar{Z}},$$

故
$$\frac{1}{\hat{\lambda}_1} = \frac{n}{n_1}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{X_j}\delta_j-\frac{1}{\bar{Z}}\to\frac{1}{p_1}p_1\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\lambda_1}\right)-\frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{\lambda_1},\text{a. s. }.$$

于是
$$\hat{\lambda}_1 = g(\frac{1}{\hat{\lambda}_1}) \to g(\frac{1}{\lambda_1}) = \lambda_1, \text{a. s.}.$$

定理 2 1) $\sqrt{n}(\hat{\mu}_i - \mu_i) \xrightarrow{L} N(0, \frac{\mu_i^3}{p_i\lambda_i}), i=1,2$;

2) $\sqrt{n}(\frac{1}{\hat{\lambda}_i} + \frac{1}{\hat{\mu}_i} - \frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\mu_i}) \xrightarrow{L} N(0, \frac{1}{p_i}(\frac{1}{\mu_i\lambda_i} + \frac{2}{\lambda_i^2})), i=1,2$.

证明 只须证明 $i=1$ 时的情况.

1) $\sqrt{n}(\hat{\mu}_i - \mu_i) = \sqrt{n}(\frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} Z_j - \mu_1) = \sqrt{n}(\frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n} X_j\delta_j - \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n}\mu_1\delta_j) = \frac{n}{n_1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu_1)\delta_j$.

注意到 $E(X_1-\mu_1)\delta_1 = E(X_1-\mu_1)E\delta_1 = 0, D(X_1-\mu_1)\delta_1 = E[(X_1-\mu_1)\delta_1]^2 = E(X_1-\mu_1)^2E\delta_1^2 = p_1DX_1 = p_1\frac{\mu_1^3}{\lambda_1}$,据中心极限定理可得

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu_1)\delta_j}{\sqrt{np_1\frac{\mu_1^3}{\lambda_1}}} \xrightarrow{L} N(0,1) \text{ 或 } \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu_1)\delta_j \xrightarrow{L} N(0, p_1\frac{\mu_1^3}{\lambda_1}).$$

从而由 Slutsky 定理可得 $\sqrt{n}(\hat{\mu}_1 - \mu_1) \xrightarrow{L} N(0, p_1\frac{\mu_1^3}{\lambda_1})$.

$$\begin{aligned} 2)\ \sqrt{n}(\frac{1}{\hat{\lambda}_1} + \frac{1}{\hat{\mu}_1} - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\mu_1}) &= \sqrt{n}[\frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1}(\frac{1}{Z_j} - \frac{1}{\bar{Z}}) + \frac{1}{\hat{\mu}_1} - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\mu_1}] = \\ &\sqrt{n}[\frac{n}{n_1}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{X_j}\delta_j - (\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\lambda_1})] = \\ &\frac{n}{n_1}[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(\frac{1}{X_j} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\lambda_1})\delta_j], \end{aligned}$$

因为 $E(\frac{1}{X_1} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\lambda_1})\delta_1 = E(\frac{1}{X_1} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\lambda_1})E\delta_1 = 0, D[(\frac{1}{X_1} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\lambda_1})\delta_1] = E[(\frac{1}{X_1} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\lambda_1})\delta_1]^2 = E(\frac{1}{X_1} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\lambda_1})^2E\delta_1^2 = p_1D\frac{1}{X_1} = p_1(\frac{1}{\mu_1\lambda_1} + \frac{2}{\lambda_1^2})$,据中心极限定理可得

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}(\frac{1}{X_j} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\lambda_1})\delta_j}{\sqrt{np_1(\frac{1}{\mu_1\lambda_1} + \frac{2}{\lambda_1^2})}} \xrightarrow{L} N(0,1).$$

于是
$$\sqrt{n}(\frac{1}{\hat{\lambda}_1} + \frac{1}{\hat{\mu}_1} - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\mu_1}) \xrightarrow{L} N(0, \frac{1}{p_1}(\frac{1}{\mu_1\lambda_1} + \frac{2}{\lambda_1^2})).$$

推论 1 $\frac{\sqrt{n}[(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2) - (\mu_1 - \mu_2)]}{\sqrt{\frac{\hat{\mu}_1^3}{p_1\hat{\lambda}_1} + \frac{\hat{\mu}_2^3}{p_2\hat{\lambda}_2}}} \xrightarrow{L} N(0,1)$.

证明 由定理 2 及 Slutsky 定理易得.

3 假设检验问题

1) 考虑假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu$(μ 未知),则检验统计量 $\frac{\sqrt{n}(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2)}{\sqrt{\frac{\hat{\mu}_1^3}{p_1\hat{\lambda}_1} + \frac{\hat{\mu}_2^3}{p_2\hat{\lambda}_2}}} \xrightarrow{L} N(0,1)$.

2) 当 $n_1 > 1, n_2 > 1$ 时,考虑假设 $H'_0: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$($\lambda$ 未知),此时似然比统计量为

$$R = \frac{\sup\limits_{\lambda,\mu_1,\mu_2} L_1(\lambda,\mu_1,\mu_2)}{\sup\limits_{\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2} L_2(\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2)} =$$

$$\frac{[\hat{\lambda}^{n_1+n_2}]^{1/2}\prod_{j=1}^{n_1}(\frac{1}{2\pi Z_j})^{1/2}\prod_{j=1}^{n_2}(\frac{1}{2\pi W_j})^{1/2}\exp\{-\frac{\hat{\lambda}}{2}(\sum_{j=1}^{n_1}\frac{(Z_j-\hat{\mu}_1)^2}{\hat{\mu}_1^2 Z_j}+\sum_{j=1}^{n_2}\frac{(W_j-\hat{\mu}_2)^2}{\hat{\mu}_2^2 W_j})\}}{[\hat{\lambda}_1^{n_1}\hat{\lambda}_2^{n_2}]^{1/2}\prod_{j=1}^{n_1}(\frac{1}{2\pi Z_j})^{1/2}\prod_{j=1}^{n_1}(\frac{1}{2\pi W_j})^{1/2}\exp\{-(\frac{\hat{\lambda}_1}{2}\sum_{j=1}^{n_1}\frac{(Z_j-\hat{\mu}_1)^2}{\hat{\mu}_1^2 Z_j}+\frac{\hat{\lambda}_2}{2}\sum_{j=1}^{n_1}\frac{(W_j-\hat{\mu}_2)^2}{\hat{\mu}_2^2 W_j})\}}=$$

$$(\frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda}_1})^{n_1/2}(\frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda}_2})^{n_2/2}\frac{\exp\{-\frac{\hat{\lambda}}{2}(\sum_{j=1}^{n_1}(\frac{1}{Z_j}-\frac{1}{\overline{Z}})+\sum_{j=1}^{n_2}(\frac{1}{W_j}-\frac{1}{\overline{W}}))\}}{\exp\{-(\frac{\hat{\lambda}_1}{2}\sum_{j=1}^{n_1}(\frac{1}{Z_j}-\frac{1}{\overline{Z}})+\frac{\hat{\lambda}_2}{2}\sum_{j=1}^{n_2}(\frac{1}{W_j}-\frac{1}{\overline{W}}))\}}=(\frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda}_1})^{n_1/2}(\frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda}_2})^{n_2/2}.$$

由 Wilks 定理[10]可得如下结论.

定理 3　在假设下 H'_0：$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$（$\lambda$ 未知）下，有 $-2\ln R\xrightarrow{L}\chi^2(1)$.

现在从小样本角度分析，有

$$R=(\frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda}_1})^{n_1/2}(\frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda}_2})^{n_2/2}=$$

$$\left(\frac{n_1+n_2}{n_1}\frac{\sum_{j=1}^{n_1}(\frac{1}{Z_j}-\frac{1}{\overline{Z}})}{\sum_{j=1}^{n_1}(\frac{1}{Z_j}-\frac{1}{\overline{Z}})+\sum_{j=1}^{n_2}(\frac{1}{W_j}-\frac{1}{\overline{W}})}\right)^{n_1/2}\left(\frac{n_1+n_2}{n_2}\frac{\sum_{j=1}^{n_2}(\frac{1}{W_j}-\frac{1}{\overline{W}})}{\sum_{j=1}^{n_1}(\frac{1}{Z_j}-\frac{1}{\overline{Z}})+\sum_{j=1}^{n_2}(\frac{1}{W_j}-\frac{1}{\overline{W}})}\right)^{n_2/2}=$$

$$\frac{(n_1+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}{n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}}M^{n_1/2}(1-M)^{n_2/2}.$$

式中：$M=\frac{\sum_{j=1}^{n_1}(\frac{1}{Z_j}-\frac{1}{\overline{Z}})}{\sum_{j=1}^{n_1}(\frac{1}{Z_j}-\frac{1}{\overline{Z}})+\sum_{j=1}^{n_2}(\frac{1}{W_j}-\frac{1}{\overline{W}})}$. 在原假设 H'_0：$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$（$\lambda$ 未知）及 n_1，n_2 给定条件下，利用引理 2 及引理 3 很容易证明：$M\sim B(\frac{n_1-1}{2},\frac{n_2-1}{2})$. 其中，$B(\frac{n_1-1}{2},\frac{n_2-1}{2})$表示参数为$\frac{n_1-1}{2}$，$\frac{n_2-1}{2}$的贝塔分布. 这里只需考虑 $M\in(0,1)$，取 $f(M)=\frac{n_1}{2}\ln M+\frac{n_2}{2}\ln(1-M)$，求得$\frac{n_1}{n_1+n_2}$是 $f(M)$在$(0,1)$内唯一的最大值点，且 $f(M)$在$(0,\frac{n_1}{n_1+n_2})$上单调增加，在$(\frac{n_1}{n_1+n_2},1)$单调减少. 由此可知

$$R\geqslant C\Leftrightarrow(M)^{n_1/2}(1-M)^{n_2/2}\geqslant d_0(n_1,n_2)\Leftrightarrow d_1(n_1,n_2)\leqslant M\leqslant d_2(n_1,n_2).$$

其中：$d_k(n_1,n_2)$，$k=0,1,2$ 表示 n_1，n_2 的函数. 因此，要求似然比检验的接受域，只须考虑形如$\{d_1(n_1,n_2)\leqslant M\leqslant d_2(n_1,n_2)\}$的接受域.

对于给定的显著水平 α（α 一般很小），利用全概率公式易得接受域为$\{B_{\alpha/2}(\frac{n_1-1}{2},\frac{n_2-1}{2})\leqslant M\leqslant B_{1-\alpha/2}(\frac{n_1-1}{2},\frac{n_2-1}{2})\}$的检验是关于 H'_0 的检验. 于是，可将此检验当作是由似然比统计量精确分布导出的检验.

关于此分布总体两参数相等的检验都得到解决. 另外，同样可讨论样本数不等的两逆高斯总体.

4　随机模拟

表 1 为 $\lambda_1=1$，$\mu_1=1$ 时的模拟结果. 表 1 中：$|\hat{\lambda}_1-\lambda_1|$，$|\hat{\mu}_1-\mu_1|$表示参数估计值与真值之差的绝对值. 表 1 中给出的皆为随机模拟 1 000 次的平均值. 表 2 为 $n=500$，$\alpha=0.01$，$p_1=p_2=0.95$ 时的结果，表 2 中：Δ 表示随机模拟 1 000 次的覆盖率.

由表 1 可知：当 p_1 固定时，随着 n 的增加，估计的偏差变小；当 n 固定时，随着 p_1 的增大，估计的偏差也变小，这是因为 p_1 的增大，会使缺失数据变少的结果. 但不论如何，这都与文中的结果是相符的. 由

表 2 可知:在 α 很小时,改变 μ_1,μ_2 的值基本上不会影响置信区间的覆盖率(都在 99%以上). 总的来说,文中给出的检验统计量还是令人满意的.

表 1 $\lambda_1=1$,$\mu_1=1$ 时的模拟结果

Tab. 1 Simulation results with $\lambda_1=1$,$\mu_1=1$

n	p_1	$\lvert\hat{\lambda}_1-\lambda_1\rvert$	$\lvert\hat{\mu}_1-\mu_1\rvert$	n	p_1	$\lvert\hat{\lambda}_1-\lambda_1\rvert$	$\lvert\hat{\mu}_1-\mu_1\rvert$
10 000	0.95	0.011 917 8	0.008 252 7	5 000	0.80	0.017 890 5	0.012 957 0
10 000	0.90	0.012 198 3	0.008 495 4	1 000	0.95	0.036 528 3	0.025 627 3
10 000	0.80	0.012 914 3	0.008 850 9	1 000	0.90	0.037 561 1	0.025 787 7
5 000	0.90	0.016 849 8	0.012 265 5	1 000	0.85	0.038 257 1	0.026 603 8
5 000	0.85	0.017 365 9	0.012 557 9	1 000	0.80	0.039 498 1	0.028 072 1

表 2 $n=500$,$\alpha=0.01$,$p_1=p_2=0.95$ 时的模拟结果

Tab. 2 Simulation results with $n=500$,$\alpha=0.01$,$p_1=p_2=0.95$

λ	μ_1	μ_2	Δ	λ	μ_1	μ_2	Δ	λ	μ_1	μ_2	Δ
1	2	1	0.994	2	2	1	0.992	3	2	1	0.994
1	2	3	0.995	2	2	3	0.992	3	2	3	0.992
1	3	3	0.994	2	3	3	0.993	3	3	3	0.993

参考文献:

[1] FOLKS J L,CHHIKARA R S. The inverse Gaussian distribution and its statistical applications[J]. Journal of the Royal Statistical Society Series B Methodological,1978,40(3):263-289.

[2] LITTLE R J A,RUBIN D B. Statistical analysis with missing data[M]. New York:Wiley,1987:21-32.

[3] 刘银萍. 具部分缺失数据两个指数总体的估计与检验[J]. 吉林大学学报:理学版,2002,40(3):255-257.

[4] 马明月,宋立新. 具有部分缺失数据两个双参数总体的估计[J]. 吉林师范大学学报:自然科学版,2004(2):14-18.

[5] 刘银萍,安丽微. 缺失数据情形下两个 Poisson 分布总体参数的估计与检验[J]. 吉林师范大学学报:自然科学版,2011(2):11-13.

[6] 陈菲,刘玉春. 具有部分缺失数据时两个 Weibull 的估计和检验[J]. 吉林师范大学学报:自然科学版,2010(2):67-70.

[7] 田霆,陈祥钟,黄春棋,等. 定时截尾缺失数据下指数分布的统计推断[J]. 华侨大学学报:自然科学版,2010,31(1):109-112.

[8] 茆诗松,王静龙,濮晓龙. 高等数理统计[M]. 北京:高等教育出版社,1998:79-81.

[9] TEEDIE M C K. Statistical properties of inverse gaussian distributions. I[J]. Annals of Mathematical Statistics,1957,28(2):362-377.

[10] 陈希孺. 数理统计引论[M]. 北京:科学技术出版社,1985:324-332.

Estimation and Test for Two Inverse Gaussian Populations with Partially Missing Data

LUO Dao-zhong

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: We deal with the estimation of two parameters for the inverse Gaussian distribution with partially missing data, and prove the strong consistency and asymptotic normality of the estimators. Moreover, statistic on testing the equality of two populations and its limit distribution are given, and the testing on exact distribution is also discussed.

Keywords: inverse Gaussian distribution; missing data; test for likelihood-ratio; limit distribution

(责任编辑:钱筠 英文审校:黄心中)