第 35 卷　第 1 期　华侨大学学报(自然科学版)　Vol. 35　No. 1
2014 年 1 月　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　Jan. 2014

文章编号:1000-5013(2014)01-0117-04　doi:10.11830/ISSN.1000-5013.2014.01.0117

一种联图的 Cordial 性

倪臣敏[1]，刘峙山[2]，卢福良[3]

(1. 华侨大学 厦门工学院高等数学教学系，福建 厦门 361021;
2. 仰恩大学 数学系，福建 泉州 362014;
3. 临沂大学 数学系，山东 临沂 276005)

摘要: 引入第一类图 G 的概念，即若存在一个标号 f，使得 $|v_0(G)-v_1(G)|\leqslant 1, e_0(G)\geqslant e_1(G)$，则称 G 为第一类图. 证明了第一类图 G 与路 P 的联图 $G\vee P$，当 P 的阶数大于等于 G 的最大度的 2 倍加 2，即 $|P|\geqslant 2\Delta(G)+2$ 时，都是 Cordial 图，并进一步给出图 G 是第一类图的两个充分条件.

关键词: 第一类图；路；联；Cordial 图

中图分类号: O 157.5　　**文献标志码:** A

自 1987 年 Cahit 提出 Cordial 图的概念[1]至今，各种图的 Cordial 性的研究不断出现[1-10]，如有关联图的 Cordial 性的结果研究[2-5]. $C_m\vee K_n$，mC_n，$P_m\vee K_n$，$P_m\vee K_{1,n}$ 的 Cordial 性已在一定条件下得到解决，但 C_m，K_n，P_m，K_n 都是十分具体的，简单的图. 文献[3]研究由 G 导出的图 $P_t(G)$(即把 G 的所有边都用长为 t 的路来代替后得到的新图)的 Cordial 性，但有关结论都是在 G 是 Cordial 图的前提条件下给出的；文献[4]给出了 $P_t(K_{2n})$，$P_t(K_{2n+1})$ 的 Cordial 性证明结论. 但有关联图 $G\vee P$ 的 Cordial 性均未作深入的研究. 本文引入了第一类图的概念，证明了这类图中的任意一个图 G，只要路 P 的阶数 $|P|\geqslant 2\Delta(G)+2$，$G\vee P$ 就是 Cordial 图.

1　相关定义

文中均为无向有限的简单图，标号为 0-1 标号. 对于图 G 的顶点集合 $V(G)$ 的标号 f，以 $f(u,v)=|f(u)-f(v)|$ 导出 G 的边集合 $E(G)$ 的标号. 记

$$\begin{cases} V_i = V_i(G) = \{v \mid v \in V(G), f(v) = i\}, \\ E_{i,j}(G) = E_{j,i}(G) = \{u,v \mid u,v \in E(G), f(u) = i, f(v) = j \text{ 或 } f(u) = j, f(v) = i\}, \\ \{i,j\} = \{0,1\}, \qquad E_0 = E_{0,0} \cup E_{1,1}, \qquad E_1 = E_{0,1} \cup E_{1,0}, \end{cases}$$

并以 v_0, v_1, e_0, e_1 分别表示它们的基数.

当同一图 G 有更细的标号时，引入更细的标号，如用 $v_0(f)=v_0(f;G)$，表示图 G 中标号 f 为 0 的顶点集合的基数.

文中标 i 的顶点或者边简称为 i 点或者 i 边，其中 $i=0,1$.

定义 1[11]　设 G 和 H 是两个不相交的图，称 $G\vee H$ 为 G 和 H 的联图. 其中，$V(G\vee H)=V(G)\cup V(H)$，$E(G\vee H)=E(G)\cup E(H)\cup\{uv|u\in V(G),\ v\in V(H)\}$.

定义 2[1]　如果对于图 G，存在一个标号 f，使得

1) $|v_0(G)-v_1(G)|\leqslant 1$;

2) $|e_0(G)-e_1(G)|\leqslant 1$.

则称 G 为 Cordial 图，f 是 G 的 Cordial 标号.

收稿日期: 2012-12-19

通信作者: 倪臣敏(1980-)，女，讲师，主要从事图论与组合学，图像处理与分析的研究. E-mail:cmni@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11226288)

2 主要结果及其证明

设 f 是图 G 的一个标号,令 $d_i(x)=d_i(f;x)$ 表示与顶点 x 关联的 i 边的数目,$i=0,1$. 显然有 $d_0(x)+d_1(x)=d_G(x)$,$e_i(G)=\frac{1}{2}\sum_{x\in V(G)}d_i(x)$,$i=0,1$.

引理 1 设 f 是图 G 的一个标号,$x\in V(G)$,g 是仅把顶点 x 的 f 标号改变后得到的图 G 的标号,则有

$$e_0(g;G)-e_0(f;G)=d_1(f;x)-d_0(f;x).$$

证明 因为 $d_1(f;x)=d_0(f;x)$,又 g 与 f 导出的边标号恰好只对于与顶点 x 关联的边不同,所以有

$$e_0(g;G)-e_0(f;G)=d_0(g;x)-d_0(f;x)=d_1(f;x)-d_0(f;x).$$

证毕.

引理 2 设 f 是图 G 的一个标号,$\{x,y\}\subset V(G)$,且 $f(x)\neq f(y)$,g 是仅对换 x,y 的 f 标号后得到的 G 的标号,则有 $v_0(f)=v_0(g)$ 且有

1) 当 $xy\notin E(G)$ 时,有

$$e_0(g;G)-e_0(f;G)=d_1(f;x)+d_1(f;y)-[d_0(f;x)+d_0(f;y)];\tag{1}$$

2) 当 $xy\in E(G)$ 时,有

$$e_0(g;G)-e_0(f;G)=d_1(f;x)+d_1(f;y)-[d_0(f;x)+d_0(f;y)]-2.\tag{2}$$

证明 由 G 的定义可知,显然有 $v_0(f)=v_0(g)$,则

1) 对换 x,y 的标号相当于先改变 x 标号,再改变 y 的标号,由引理 1 可得,式(1)成立;

2) 与 1)的情况比较可得,改变 x 标号时,边 xy 由 1 边变成 0 边,故式(2)中的 $d_1(f;y)$ 比式(1)中的 $d_1(f;y)$ 少 1,而式(2)中的 $d_0(f;y)$ 比式(1)中的 $d_0(f;y)$ 大 1. 因此,式(2)的右端比式(1)的右端少 2,故可得等式(2).

定义 3 若图 G 存在一个标号 f,使得

$$|v_0(G)-v_1(G)|\leqslant 1,\qquad e_0(G)\geqslant e_1(G),$$

则称 G 为第一类图;否则,称 G 为第二类图.

引理 3 若 G 为第一类图,则 G 或有标号 h,使得

$$|v_0(h;G)-v_1(h;G)|\leqslant 1,$$

$$\frac{e(G)}{2}\leqslant e_0(h;G)\leqslant\frac{e(G)}{2}+\Delta(G);$$

或有标号 g,使得

$$|v_0(g;G)-v_1(g;G)|\leqslant 1,$$

$$\frac{e(G)}{2}-\Delta(G)\leqslant e_0(g;G)\leqslant\frac{e(G)}{2}.$$

证明 因 G 为第一类图,故有标号 f,使得

$$|v_0(G)-v_1(G)|\leqslant 1,\qquad e_0(G)\geqslant e_1(G).$$

当 $e_0(G)=e_1(G)$ 时,f 即引理的 h,故可设 $e_0(G)>e_1(G)$. 分两种情况进行讨论.

1) 当 $|G|$ 是奇数时,令 $V(G)=\{x_1,x_2,\cdots,x_l;y_1,y_2,\cdots,y_l;z\}$,$f(x_i)=f(z)=0$,$f(y_i)=1$,$i=1,\cdots,l$,则有

$$0<e_0(G)-e_1(G)=\frac{1}{2}\{\sum_{i=1}^{l}[d_0(x_i)+d_0(y_i)-d_1(x_i)-d_1(y_i)]+d_0(z)-d_1(z)\}.$$

若 $d_0(z)>d_1(z)$,改变 z 的标号,可得 $v_0=v_1-1$,由引理 1 知,$e_0(G)$ 减少,但减少量不超过 $\Delta(G)$. 若 $d_0(z)\leqslant d_1(z)$,则存在某个 i,使得 $d_0(x_i)+d_0(y_i)-d_1(x_i)-d_1(y_i)>0$. 对换 x_i,y_i 的标号,由引理 2 可知,$e_0(G)$ 减少,且当 $x_iy_i\notin E(G)$ 时,$e_0(G)$ 的减少量为 $d_0(x_i)+d_0(y_i)-d_1(x_i)-d_1(y_i)\leqslant d_0(x_i)+d_0(y_i)\leqslant 2\Delta(G)$;且当 $x_iy_i\in E(G)$ 时,因 x_i,y_i 的标号不同,故 $d_1(x_i)\geqslant 1$,$d_1(y_i)\geqslant 1$,$d_1(x_i)+d_1(y_i)\geqslant 2$. 由引理 2 可知:$e_0(G)$ 的减少量为 $d_0(x_i)+d_0(y_i)+2-d_1(x_i)-d_1(y_i)\leqslant d_0(x_i)+d_0(y_i)\leqslant 2\Delta(G)$;

若 $e_0(G)$ 变小后，仍有 $e_0(G)>e_1(G)$，可再继续上面的步骤，直到出现 $e_0(G)\leqslant e_1(G)$ 为止.

令最后保持 $e_0(G)>e_1(G)$ 的标号为 h，出现 $e_0(G)\leqslant e_1(G)$ 的标号为 g，则有 $e_0(h;G)>e_1(h;G)$，$e_0(g;G)\leqslant e_1(g;G)$. 因 $e_0(G)+e_1(G)=e(G)$，故有 $e_1(g;G)\leqslant e(G)/2<e_0(h;G)$. 在每对换一对顶点的标号时，$e_0(G)$ 的减少量不超过 $2\Delta(G)$，即 $e_0(h;G)-e_0(h;G)\leqslant 2\Delta(G)$，从而易得引理 3 的两个不等式.

对换 x_i，y_i 的标号并不影响 G 中 0 点和 1 点的数目，所以有

$$|v_0(h;G)-v_1(h;G)|=|v_0(g;G)-v_1(g;G)|=|v_0(f;G)-v_1(f;G)|\leqslant 1.$$

2）当 $|G|$ 是偶数时，不出现上面的 z，保留前面关于 x_i，y_i 的标号变化时的证明即可证.

引理 4　设 f 是 n 阶路 $P=P_{u_1,\cdots,u_n}$ 的一个标号(其中 $n\geqslant 4$)，$|E_{0,0}(P)|>0$，$|E_{1,1}(P)|>0$，则 P 存在另一标号 g，满足 $v_0(g)=v_1(f)$，$e_0(g)=e_1(f)-2$.

证明　不妨设 $f(u_i)=f(u_{i+1})=0$，$f(u_j)=f(u_{j+1})=1$，其中 $i+1<j$，$i=1,2,\cdots,n-3$，并设 u_{i+1} 与 u_j 之间无 0 边. 那么，必有 $f(u_{i+2})=1$，$f(u_{i+3})=0$，$f(u_{i+4})=1$，$\cdots$，$f(u_{j-1})=0$.

对换 u_{i+1} 与 u_{i+2} 的标号，$v_0(P)$ 和 $e_0(P)$ 并不改变，但是新的 0 边 $u_{i+2}u_{i+3}$ 与 0 边 u_ju_{j+1} 的距离变小. 用此方法变换直到 $u_{j-2}u_{j-1}$ 的标号为 0，此时，再对换 u_{j-1} 和 u_j 的标号，即得所需标号 g.

引理 5　对于任意的 n 阶路 $P=P_{u_1,\cdots,u_n}$(其中 $n\geqslant 3$)及 $K=\{0,1,2,\cdots,n-2\}$，都存在标号 f，使得

$$|v_0(P)-v_1(P)|\leqslant 1,\qquad e_0(P)\in K.$$

证明　当 $n=3$ 时，可以直接验证结论. 当 $n\geqslant 4$ 时，先把 $u_1,\cdots,u_{[\frac{n+1}{2}]}$ 都标号为 0，$u_{[\frac{n+1}{2}]+1},\cdots,u_n$ 都标为 1，此时 $|v_0(P)-v_1(P)|\leqslant 1$，$e_0(P)=n-2$. 然后用引理 4 的方法，使得 $e_0(P)$ 逐次减少 2，$e_0(P)$ 可取 $n-2$，$n-4$，$\cdots$.

容易看出当 n 为偶数时，末项为 0；当 n 为奇数时末项为 1. 若开始把 $u_1,\cdots,u_{[\frac{n+1}{2}]-1}$ 以及 u_n 标为 0，把 $u_{[\frac{n+1}{2}]}$，$u_{[\frac{n+1}{2}]+1}$，$\cdots$，u_{n-1} 标为 1，然后用引理 4，可使得 $e_0(P)$ 逐次可取 $n-3$，$n-5$，$\cdots$. 以上两个 $e_0(P)$ 取值集合的并恰为 $\{0,1,\cdots,n-1,n-2\}$.

定理 1　若 G^* 为第一类图，$G=G^*\vee P$，$|P|\geqslant 2\Delta(G)+2$，则 G 是 Cordial 图.

证明　由题意可知，把 G^* 视为引理 3 中的 G，因为 G^* 与 P 中顶点标号 0，1 可以独立选择，因此利用引理 3，5 的标号，使得 $|v_0(G)-v_1(G)|\leqslant 1$. 再有，对 G 的任意边标号，均有 $e_0(G)+e_1(G)=e(G)$，故 Cordial 图的边标号条件 $|e_0(G)-e_1(G)|\leqslant 1$ 等价于 $|e_0(G)-e(G)/2|\leqslant 1/2$. 因为 G^* 是第一类图，根据引理 3 可分如下两种情况讨论.

情形 1　G^* 有标号 h，使得 $e(G^*)/2\leqslant e_0(h;G^*)\leqslant e(G^*)/2+\Delta(G^*)$，令 $e_0(h;G^*)=e(G^*)/2+\alpha$，其中 $0\leqslant\alpha\leqslant\Delta(G^*)$. 为了使得 $|e_0(P)+e_0(h;G^*)-(e(P)+e(G^*))/2|\leqslant 1/2$，只需选择 P 的一种标号满足 $|e_0(P)-e(P)/2+\alpha|\leqslant 1/2$，即只要使得 $e_0(P)-e(P)/2$ 的取值为 $-\alpha$ 或 $-\alpha\pm 1/2$ 即可. 而根据引理 5，$e_0(P)-e(P)/2$ 的取值集合为 $\{-\frac{|P|-1}{2},1-\frac{|P|-1}{2},\cdots,|P|-2-\frac{|P|-1}{2}\}$. 集合中序列的公差为 1，又因 $|P|-1\geqslant\Delta(G^*)+1\geqslant 2\alpha+1$，即有 $(1-|P|)/2\leqslant-(\alpha+1/2)$. 所以 $e_0(P)-e(P)/2$ 必然可以取到 $-\alpha$ 或 $-\alpha\pm 1/2$.

情形 2　G^* 有标号 g，使得 $e(G^*)/2-\Delta(G^*)\leqslant e_0(g;G^*)\leqslant e(G^*)/2$. 令 $e_0(g;G^*)=e(G^*)/2+\beta$，其中 $-\Delta(G^*)\leqslant\beta\leqslant 0$. 故只需选择 P 的标号，使得 $e_0(P)-e(P)/2$ 取值 $-\beta$ 或 $-\beta\pm 1/2$ 即可. 由于有 $|P|-2-(|P|-1)/2=(|P|-3)/2\geqslant\Delta(G^*)-1/2\geqslant-\beta-1/2$，故 $e_0(P)-e(P)/2$ 必然可以取到 $-\beta$ 或 $-\beta\pm 1/2$.

3　第一类图的充分条件及其证明

定理 2　1）若奇阶图 G 的 $V(G)=\{x_1,x_2,\cdots,x_k,y_1,y_2,\cdots,y_k,z\}$ 满足 $x_iy_i\notin E(G)$，$i=1,2,\cdots,k$，则 G 为第一类图.

2）若偶阶图 G 的 $V(G)=\{x_1,x_2,\cdots,x_k,y_1,y_2,\cdots,y_k\}$ 满足 $x_iy_i\notin E(G)$，$i=1,2,\cdots,k$，则 G 为第一类图.

证明　1）给 G 一个标号 f，使得 $f(x_i)=f(z)=0$，$f(y_i)=1$，$i=1,2,\cdots,k$. 若 $e_0(f;G)\geqslant e_1(f;G)$，则 G 即为第一类图.

若 $e_0(f;G)<e_1(f;G)$,则有

$$0<e_0(f;G)-e_1(f;G)=\frac{1}{2}\{\sum_{i=1}^{k}[d_1(x_i)+d_1(y_i)-d_0(x_i)-d_0(y_i)]+d_1(z)-d_0(z)\}.$$

当 $d_1(z)>d_0(z)>0$ 时,改变 z 的标号,$e_0(G)$变大,则当某个 i 使得 $d_1(x_i)+d_1(y_i)-d_0(x_i)-d_0(y_i)>0$ 时,由引理 2 的式(1)可知,对换 x_i,y_i 的标号,$e_0(G)$增加.将此步骤进行若干次,必能得到一种标号,使得 $e_0(G)\geqslant e_1(G)$.命题得证.

2)证明方法与 1)的方法类似,在此略过.

定理 3 如果 $\Delta(G)\leqslant|G|/2-1$,则 G 为第一类图.

证明 考虑 G 的补图 $\bar{G}$,由已知条件知 $\delta(G)\geqslant|G|/2$.由 Dirac 定理知,$\bar{G}$ 有 Hamilton 圈 H,在 H 中相邻的每对顶点在 G 中不相邻,故 G 满足定理 2 的条件,从而 G 为第一类图.

参考文献:

[1] CAHIT I. Cordial graghs: A weak version of graceful and harmonious graphs[J]. Ars Combin,1987(23):201-208.

[2] JOSEPH A G. A dynamic survey of graph labeling[J]. Electronic Journal of Combinatorics,2009(16):49-53.

[3] ANDAR M,BOXWALA S,LIMAYE N B. On the cordiality of the t-uniform homeomorphs-I[J]. Ars Combin,2003(66):313-318.

[4] ANDAR M,BOXWALA S,LIMAYE N B. On the cordiality of the t-uniform homeomorphs-II[J]. Ars Combin,2003(67):213-220.

[5] 倪臣敏,刘峙山,陈丽娜.关于一点联的 Cordial 性的一个结果的推广[J].延边大学学报:自然科学版,2007,33(2):94-97.

[6] XIE Yan-tao,CHE Ying-tao,LIU Zhi-shan. The cordiality on the union of 3-regular connected graph and cycle[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics,2010,25(2):244-248.

[7] 刘群,刘峙山.最大边数的 Cordial 图的构造[J].数学研究,2003,36(4):437-439.

[8] 刘峙山,堵根民.三正则连通图的 Cordial 性[J].数学研究,2007,40(1):114-116.

[9] GHEBLEH M,KHOEILAR R. A note on "H-cordial graphs"[J]. Bull Inst Combin Appl,2001(31):60-68.

[10] KIRCHHERR W W. NEPS operations on cordial graphs[J]. Discrete Math,1993(115):201-209.

[11] BONDY J A,MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. New York: American Elsevier,1976:117-118.

On the Cordiality of a Union of Graphs

NI Chen-min[1], LIU Zhi-shan[2], LU Fu-liang[3]

(1. Teaching Department of High Mathematics of Institue of Technology, Huaqiao University, Xiamen 361021, China;
2. Department of Mathematics, Yangen Universiyty, Quanzhou 362014, China;
3. Department of Mathematics, Linyi Universiyty, Linyi 276005, China)

Abstract: The first class of graphs is introduced. If a graph has a lebaling f, s. t. $|v_0(G)-v_1(G)|\leqslant 1$, $e_0(G)\geqslant e_1(G)$, it is called to be the first class of graphs. Let G be a graph of this class and P be a path with $|P|\geqslant 2\Delta(G)+2$, it is proved that $G\vee P$ is a Cordial graph, and two sufficient conditions are given to make G to be the first class of graphs.

Keywords: the first class of graphs; path; union; cordial graph

(**责任编辑**:陈志贤 **英文审校**:黄心中)