第35卷 第1期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 35 No. 1
2014年1月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan. 2014

文章编号:1000-5013(2014)01-0112-05 doi:10.11830/ISSN.1000-5013.2014.01.0112

一类四阶奇异非线性积分边值问题正解的存在性

王全义，邹黄辉

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 研究一类四阶奇异非线性积分边值问题正解的存在性问题. 利用锥压缩锥拉伸不动点定理及一些分析技巧,建立该边值问题存在一个及多个正解的一些新结果.所得结果推广并改进了先前的相关结果.

关键词： 锥；正解；非线性积分边值问题；不动点定理

中图分类号： O 175.8 **文献标志码：** A

1 预备知识

两端简单支撑的弯曲弹性梁的平行状态可用四阶两点边值问题

$$\left.\begin{aligned} &u^{(4)}(t) = f(t,u(t),u''(t)) = 0, \qquad t\in(0,1),\\ &u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

来描述[1],关于这类边值问题的正解存在性已受到广泛的研究[2-5],微分方程的积分边值问题在热传导、等离子物理、化学工程、流体力学等方面具有广泛的应用背景. 因此，微分方程的积分边值问题受到许多学者的广泛关注[6-10]. 本文将研究四阶奇异非线性积分边值问题

$$\left.\begin{aligned} &u^{(4)}(t) = w(t)f(t,u(t),-u''(t)), \qquad t\in(0,1),\\ &u''(0)+\int_0^1 h(s,-u''(s))\mathrm{d}\eta(s)=0,\\ &u''(1)+\int_0^1 k(s,-u''(s))\mathrm{d}\xi(s)=0,\\ &u(0)=u(1)=0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

的正解的存在性. 式(2)中：$f\in C([0,1]\times[0,+\infty)\times[0,+\infty),(-\infty,+\infty))$；$h$，$k\in C([0,1]\times[0,+\infty),[0,+\infty))$；$w\in C((0,1),[0,+\infty))$；$\xi(s)$和$\eta(s)$在$[0,1]$上是非减的；在边值条件(2)中的积分是 Riemann-Stieljes 积分.

显然，非线性项$f(t,u,p)$是可变号的，且$w(t)$在$t=0,1$可能是奇异的. 此外，当$\xi(s)\equiv 0$，$\eta(s)\equiv 0$，$w(t)\equiv 1$时，边值问题(2)退化为问题(1). 对于具非线性积分边界条件的四阶非线性微分方程的边值问题(2)的正解存在性问题很少有人研究过.

假设下面的条件成立：

H_1) 当$\frac{1}{12}\min\{t,1-t\}p\leqslant u\leqslant\frac{1}{2}p$，$t\in[0,1]$时，$f(t,u,p)\geqslant 0$；

H_2) $0<\int_0^1 s(1-s)w(s)\mathrm{d}s=:M<+\infty$；

H'_1) 设$f\in C([0,1]\times[0,+\infty)\times(0,+\infty],(-\infty,+\infty))$，且当$\frac{1}{12}\min\{t,1-t\}p\leqslant u\leqslant\frac{1}{2}p$，$t\in[0,1]$时，$f(t,u,p)\geqslant 0$.

收稿日期： 2012-12-24

通信作者： 王全义(1955-),男,教授,主要从事常微分方程和泛函微分方程的研究. E-mail:wqy1955@163.com.

基金项目： 国家自然科学基金数学天元基金资助项目(11226145)

2 一些引理

设 X 是 Banach 空间，$K\subset X$ 非空，且满足

1）对任意 $u,v\geqslant 0$，任意 $x,y\in K$，有 $ux+vy\in K$；

2）若 $x\in K$，$-x\in K$，则 $x=0$，那么称 K 为 X 中的一个锥.

记空间 $E=C^2[0,1]$，在 E 中定义范数 $\|x\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x|$，则 E 在范数 $\|x\|$ 下成为一个 Banach 空间. 在 E 中定义一个锥 K，记 $K_r=\{x\in K:\|x\|\leqslant r\}$，$\partial K_r=\{x\in K:\|x\|=r\}$，$\overline{K}_{r,R}=\{x\in K:r\leqslant\|x\|\leqslant R\}$，其中：$0<r<R$.

引理 1[11]　设 X 是 Banach 空间，P 是 X 中的一个锥，Ω_1 和 Ω_2 是 X 中的开集，$0\in\Omega_1$，$\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$，$T:P\cap\bar{\Omega}_2/\Omega_1\to P$ 是全连续算子，如果下列条件之一满足，即

1）若 $x\in P\cap\partial\Omega_1$，则 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$；若 $x\in P\cap\partial\Omega_2$，则 $\|Tx\|\geqslant\|x\|$；

2）若 $x\in P\cap\partial\Omega_1$，则 $\|Tx\|\geqslant\|x\|$；若 $x\in P\cap\partial\Omega_2$，则 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$.

那么算子 T 在 $P\cap(\bar{\Omega}_2/\Omega_1)$ 中有不动点.

引理 2　函数 $G(t,s)$ 定义为

$$G(t,s)=\begin{cases}s(1-t), & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ t(1-s), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\end{cases}\tag{3}$$

那么，当 $t,s\in[0,1]$时，有

$$G(t,s)\leqslant G(t,t),\quad G(t,s)\leqslant G(s,s),\quad G(t,s)\geqslant m(t)m(s),\quad G(t,s)\geqslant m(t)G(s,s).$$
$$m(t)=\min\{t,1-t\},\qquad t\in[0,1].\tag{4}$$

引理 3　假设条件 H_1)，H_2)成立，若如下的边值问题

$$\left.\begin{aligned}&x''(t)=-w(t)f\Big(t,\int_0^1 G(t,s)x(s)\mathrm{d}s,x(t)\Big),\qquad t\in(0,1),\\ &x(0)=\int_0^1 h(s,x(s))\mathrm{d}\eta(s),\qquad x(1)=\int_0^1 k(s,x(s))\mathrm{d}\xi(s)\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

有一个正解 $x(t)$，$x(t)\geqslant\min\{t,1-t\}\|x\|$，$t\in[0,1]$，$G(t,s)$由式(3)定义，那么积分边值问题(2)至少有一个正解 $u(t)$，且$\dfrac{1}{12}\geqslant\min\{t,1-t\}\|x\|\leqslant u(t)\leqslant\dfrac{1}{8}\|x\|$，$t\in[0,1]$.

引理 4　假设条件 H_1)，H_2)成立，如果的积分方程

$$\begin{aligned}x(t)=&\int_0^1 G(t,s)w(s)f\Big(s,\int_0^1 G(s,v)x(v)\mathrm{d}v,x(s)\Big)\mathrm{d}s+\\ &(1-t)\int_0^1 h(s,x(s))\mathrm{d}\eta(s)+t\int_0^1 k(s,x(s))\mathrm{d}\xi(s)\end{aligned}\tag{6}$$

有一个正解 $x=x(t)$，$G(t,s)$由式(3)定义，那么 $x=x(t)$是边值问题（5）的一个正解.

为了应用引理 1，锥定义为

$$K=\{x\in C[0,1]:x(t)\geqslant m(t)\|x\|,t\in[0,1]\}.\tag{7}$$

$m(t)$由式(4) 给出. 算子 $T:K\to C[0,1]$定义为

$$\begin{aligned}(Tx)(t)=&\int_0^1 G(t,s)w(s)f\Big(s,\int_0^1 G(s,v)x(v)\mathrm{d}v,x(s)\Big)\mathrm{d}s+\\ &(1-t)\int_0^1 h(s,x(s))\mathrm{d}\eta(s)+t\int_0^1 k(s,x(s))\mathrm{d}\xi(s),\qquad x\in K.\end{aligned}\tag{8}$$

引理 5　假设条件 H_1)，H_2)成立，那么 $T(K)\subset K$，而且 $T:K\to K$ 是全连续的.

3 正解的存在性

记 $f^\beta=\limsup\limits_{p\to\beta}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1,2u\leqslant p}\dfrac{f(t,u,p)}{p}$，$h^\beta=\limsup\limits_{p\to\beta}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\dfrac{h(t,p)}{p}$，$k^\beta=\limsup\limits_{p\to\beta}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\dfrac{h(t,p)}{p}$，

$f_\beta=\liminf\limits_{p\to\beta}\min\limits_{0\leqslant t\leqslant 1,2u\leqslant p}\dfrac{f(t,u,p)}{p}$，$h_\beta=\liminf\limits_{p\to\beta}\min\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\dfrac{h(t,p)}{p}$，$k_\beta=\liminf\limits_{p\to\beta}\min\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\dfrac{k(t,p)}{p}$，

$$I_1=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\{\int_0^1 G(t,s)w(s)\mathrm{d}sf^0+(1-t)\int_0^1 h^0\mathrm{d}\eta(s)+t\int_0^1 k^0\mathrm{d}\xi(s)\},$$

$$I_2=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\{\int_0^1 G(t,s)w(s)f_{\infty}m(s)\mathrm{d}s+(1-t)\int_0^1 h_{\infty}m(s)\mathrm{d}\eta(s)+t\int_0^1 k_{\infty}m(s)\mathrm{d}\xi(s)\},$$

$$I_3=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\{\int_0^1 G(t,s)w(s)f_0m(s)\mathrm{d}s+(1-t)\int_0^1 h_0m(s)\mathrm{d}\eta(s)+t\int_0^1 k_0m(s)\mathrm{d}\xi(s)\},$$

$$I_4=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\{\int_0^1 G(t,s)w(s)\mathrm{d}sf^{\infty}+(1-t)\int_0^1 h^{\infty}\mathrm{d}\eta(s)+t\int_0^1 k^{\infty}\mathrm{d}\xi(s)\},$$

$$I_5=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\{\int_0^1 G(t,s)w(s)\mathrm{d}s+(1-t)\int_0^1\mathrm{d}\eta(s)+t\int_0^1\mathrm{d}\xi(s)\},$$

$G(t,s)$和$m(t)$分别由式(3),式(4)给出.

如果条件 H_2)成立,显然 I_5 是有界的,且 $0<I_5\leqslant M+M_0$,其中:$M_0=\int_0^1\mathrm{d}\eta(s)+\int_0^1\mathrm{d}\xi(s)$.

定理1 假设条件 H_1),H_2)成立,如果 $f_{\infty}\geqslant 0$,$I_1<1<I_2$,则边值问题(2)至少有一个正解.

证明 考虑式(8)定义的算子 $T:K\to C[0,1]$,由引理5可知 $T:K\to K$ 是全连续的.又因为 $I_1<1$,$0<I_5\leqslant M+M_0$,因此存在 $\varepsilon_1>0$,使得 $I_1+\varepsilon_1I_5<1$.对此 $\varepsilon_1>0$,存在 $r_1>0$,使得当 $t\in[0,1]$,$0<p\leqslant r_1$,$2u\leqslant p$ 时,就有

$$f(t,u,p)\leqslant(f^0+\varepsilon_1)p,\quad h(t,p)\leqslant(h^0+\varepsilon_1)p,\quad k(t,p)\leqslant(k^0+\varepsilon_1)p.\tag{9}$$

那么由式(6)~式(9),当 $t\in[0,1]$,$t\in\partial K_{r_1}$ 时,可得

$$\begin{aligned}0\leqslant(Tx)(t)=&\int_0^1 G(t,s)w(s)f(s,\int_0^1 G(s,v)x(v)\mathrm{d}v,x(s))\mathrm{d}s+(1-t)\int_0^1 h(s,x(s))\mathrm{d}\eta(s)+\\&t\int_0^1 k(s,x(s))\mathrm{d}\xi(s)\leqslant\int_0^1 G(t,s)w(s)(f^0+\varepsilon_1)x(s)\mathrm{d}s+(1-t)\int_0^1(h^0+\varepsilon_1)x(s)\mathrm{d}\eta(s)+\\&t\int_0^1(k^0+\varepsilon_1)x(s)\mathrm{d}\xi(s)\leqslant(\int_0^1 G(t,s)w(s)(f^0+\varepsilon_1)\mathrm{d}s+(1-t)\int_0^1(h^0+\varepsilon_1)\mathrm{d}\eta(s)+\\&t\int_0^1(k^0+\varepsilon_1)\mathrm{d}\xi(s))\|x\|=(\int_0^1 G(t,s)w(s)f^0\mathrm{d}s+(1-t)\int_0^1 h^0\mathrm{d}\eta(s)+\\&t\int_0^1 k^0\mathrm{d}\xi(s))\|x\|+\varepsilon_1(\int_0^1 G(t,s)w(s)\mathrm{d}s+(1-t)\int_0^1\mathrm{d}\eta(s)+t\int_0^1\mathrm{d}\xi(s))\|x\|\leqslant\\&(I_1+\varepsilon_1I_5)\|x\|\leqslant\|x\|.\end{aligned}$$

故有

$$\|Tx\|\leqslant\|x\|,\qquad x\in\partial K_{r_1}.\tag{10}$$

因为 $I_2>1$,$m(0)=m(1)=0$,故存在 $\varepsilon_2>0$,$0<\delta<1/2$,使得

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\{\int_{\delta}^{1-\delta}G(t,s)w(s)f_{\infty}m(s)\mathrm{d}s+(1-t)\int_{\delta}^{1-\delta}h_{\infty}m(s)\mathrm{d}\eta(s)+t\int_{\delta}^{1-\delta}k_{\infty}m(s)\mathrm{d}\xi(s)\}-\varepsilon_2I_5>1,$$

对 $\varepsilon_2>0$,存在 $r_{22}>0$,使得当 $t\in[0,1]$,$0\leqslant 2u\leqslant p$,$p\geqslant r_{22}$时,有

$$f(t,u,p)\geqslant(f_{\infty}-\varepsilon_2)p,\quad h(t,p)\geqslant(h_{\infty}-\varepsilon_2)p,\quad k(t,p)\geqslant(k_{\infty}-\varepsilon_2)p.\tag{11}$$

取 $r_2=\max\{r_1+1,\delta^{-1}r_{22}\}$,所以当 $t\in[\delta,1-\delta]$,$x\in\partial K_{r_2}$ 时,有

$$x(t)\geqslant m(t)\|x\|\geqslant\delta\cdot r_2\geqslant r_{22}.\tag{12}$$

于是当 $x\in\partial K_{r_2}$,$t\in[0,1]$时,由式(7),(11),(12)可得

$$\begin{aligned}(Tx)(t)=&\int_0^1 G(t,s)w(s)f(s,\int_0^1 G(s,v)x(v)\mathrm{d}v,x(s))\mathrm{d}s+\\&(1-t)\int_0^1 h(s,x(s))\mathrm{d}\eta(s)+t\int_0^1 k(s,x(s))\mathrm{d}\xi(s)\geqslant\\&\int_{\delta}^{1-\delta}G(t,s)w(s)(f_{\infty}-\varepsilon_2)x(s)\mathrm{d}s+(1-t)\int_{\delta}^{1-\delta}(h_{\infty}-\varepsilon_2)x(s)\mathrm{d}\eta(s)+\\&t\int_{\delta}^{1-\delta}(k_{\infty}+\varepsilon_2)x(s)\mathrm{d}\xi(s)\geqslant\\&\int_{\delta}^{1-\delta}G(t,s)w(s)f_{\infty}m(s)\|x\|\mathrm{d}s+(1-t)\int_{\delta}^{1-\delta}h_{\infty}m(s)\|x\|\mathrm{d}\eta(s)+\end{aligned}$$

$$t\int_{\delta}^{1-\delta}k_{\infty}m(s)\parallel x\parallel \mathrm{d}\xi(s)-\varepsilon_2\left(\int_0^1 G(t,s)w(s)\mathrm{d}s+(1-t)\int_0^1\mathrm{d}\eta(s)+t\int_0^1\mathrm{d}\xi(s)\right)\parallel x\parallel \geqslant$$
$$\left(\int_{\delta}^{1-\delta}G(t,s)w(s)f_{\infty}m(s)\mathrm{d}s+(1-t)\int_{\delta}^{1-\delta}h_{\infty}m(s)\mathrm{d}\eta(s)+\right.$$
$$\left.t\int_{\delta}^{1-\delta}k_{\infty}m(s)\mathrm{d}\xi(s)\right)\parallel x\parallel-\varepsilon_2 I_5\parallel x\parallel.$$

故有

$$\parallel Tx\parallel\geqslant\left[\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left\{\int_{\delta}^{1-\delta}G(t,s)w(s)f_{\infty}m(s)\mathrm{d}s+(1-t)\int_{\delta}^{1-\delta}h_{\infty}m(s)\mathrm{d}\eta(s)+\right.\right.$$
$$\left.\left.t\int_{\delta}^{1-\delta}k_{\infty}m(s)\mathrm{d}\xi(s)\right\}+t\int_{\delta}^{1-\delta}k_{\infty}m(s)\mathrm{d}\xi(s)\right\}-\varepsilon_2 I_5\Big]\cdot\parallel x\parallel\geqslant\parallel x\parallel. \tag{13}$$

由引理 4，式(10)，(13)知算子 $T:K\cap(\overline{K}_{r_2}/K_{r_1})\rightarrow K$ 满足引理 1 中的所有条件. 因此由引理 1 知有一个不动点 $x^0\in\overline{K}_{r_1,r_2}$，$r_1\leqslant\parallel x^0\parallel\leqslant r_2$，且 $x^0(t)\geqslant\min\{t,1-t\}\parallel x^0\parallel$，$t\in[0,1]$. 由式(8)，引理 3，4 知边值问题(2)至少有一个正解 u^0，且$\frac{1}{24}r_1\leqslant\parallel u^0\parallel\leqslant\frac{1}{8}r_2$，$u^0(t)\geqslant\min\{t,1-t\}\parallel u^0\parallel$，$t\in[0,1]$. 定理 1 证毕.

在定理 1 的证明中，假设 $1<I_2<+\infty$. 但是对于 $I_2=+\infty$，容易证明定理 1 也是成立的.

定理 2　假设条件 H_1)，H_2)成立，如果 f_{∞}，$f^0\geqslant 0$，$I_4<1<I_3$，则边值问题(2)至少有一个正解.

在定理 2 中假设 $1<I_3<+\infty$，但是当 $I_3=+\infty$时，容易证明定理 2 的证明也是成立的.

假设以下条件成立：

H'_2）$0<\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\int 1_0 G(t,s)w(s)\mathrm{d}s=:M''<+\infty$.

由引理 2 得，条件 H_2)，H'_2)是等价的.

定理 3　设条件 H_1)，H'_2)成立，而且假设存在 4 个常数 $\rho_1,\rho_2,\delta,\lambda$，且 $\rho_1>0$，$\rho_2>0$，$\rho_1\neq\rho_2$，$0<\delta<1/2$，$0\leqslant\lambda<1$ 使得条件 H_3)为

$$f(t,u,p)\leqslant\frac{(1-\lambda)\rho_1}{M''},\qquad t\in[0,1],\quad u\in\left[0,\frac{\rho_1}{8}\right],\quad p\in[0,\rho_1],$$
$$\max\{h(t,p):t\in[0,1],p\in[0,\rho_1]\}\cdot\int_0^1\mathrm{d}\eta(s)\leqslant\lambda\rho_1,$$
$$\max\{k(t,p):t\in[0,1],p\in[0,\rho_1]\}\cdot\int_0^1\mathrm{d}\xi(s)\leqslant\lambda\rho_1.$$

条件 H_4)为

$$w(t)f(t,u,p)\geqslant\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\delta^2\right)^{-1}\rho_2,\quad(t,u,p)\in[\delta,1-\delta]\times\left[0,\frac{\rho_2}{8}\right]\times[\delta\rho_2,\rho_2].$$

那么积分边值问题 (2)至少有一个正解 u，使得 $\parallel u''\parallel=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\{|u''(t)|\}$在 ρ_2 和 ρ_2 之间.

因为当 $h(t,p)\equiv 0$，$k(t,p)\equiv 0$，$\xi(s)\equiv 0$，$\eta(s)\equiv 0$，$w(t)\equiv 1$，边值问题 (2) 退化为边值问题(1). 这时在定理 3 中，$M''=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s=1/8$，并且如果取 $\lambda=0$，$\delta=1/4$，那么立即可得

推论 1　假设 H'_1)成立，又存在两个正数 ρ_1,ρ_2 且 $\rho_1\neq\rho_2$ 使得

H'_3）$f(t,u,-p)\leqslant 8\rho_1$，　$t\in[0,1]$，$u\in\left[0,\frac{\rho_1}{8}\right]$，$p\in[0,\rho_1]$；

H'_4）$f(t,u,-p)\geqslant\frac{32}{3}\rho_2$，　$(t,u,p)\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]\times\left[0,\frac{\rho_2}{8}\right]\times\left[\frac{\rho_2}{4},\rho_2\right]$.

那么边值问题(1)至少有一个正解 u，使得 $\parallel u''\parallel=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\{|u''(t)|\}$在 ρ_2 和 ρ_2 之间.

显然，推论 1 中的 $f(t,u,-p)$是可以变号的，并且也不要求 $\max f_0$，$\min f_0$，$\max f_{\infty}$，$\min f_{\infty}\notin\{0,+\infty\}$，而且推论 1 中的条件 H'_3)，H'_4)也大大弱于文献[5]的定理中的条件 H_5)，H_6)，因此推论 1 大大优于文献[5]的定理 3.1. 从而定理 3 推广和改进了文献[5]的定理 3.1.

定理 4　假设条件 H_1)，H_2)成立，如果 f_{∞}，$f_0\geqslant 0$，$I_2>1$，$I_3>1$，且存在 $b>0$，使得 $b<\int_0^1 G(s,$

$s)w(s)M_6\mathrm{d}s+\max\left\{\int_0^1 M_7\mathrm{d}\eta(s),\int_0^1 M_8\mathrm{d}\xi(s)\right\}$，其中

$$M_6=\max\{f(t,u,p):t\in[0,1],\quad u\in[0,b/8],\quad p\in[0,b]\},$$
$$M_7=\max\{h(t,p):t\in[0,1],\quad p\in[0,b]\},$$
$$M_8=\max\{k(t,p):t\in[0,1],\quad 0\leqslant p\leqslant b\},$$

那么边值问题(2)至少有两个正解.

在定理4中，假设 $1<I_2,I_3<+\infty$,但是当 $I_2=+\infty$ 或 $I_3=+\infty$ 时,定理4仍然成立.

参考文献:

[1] GPTA C P. Existence and uniqueness theorem for a bending of an elastic beam equation[J]. Appl Anal,1988,26(2):289-304.

[2] MA Ru-yun,XU Ling. Existence of positive solutions of a nonlinear fourth-order boundary value problem[J]. Applied Mathematics Letters,2010,23(5):537-543.

[3] MA Ru-yun,XU Jia. Bifurcation from interval and positive solutions of a nonlinear fourth-order boundary value problem[J]. Nonlinear Analysis,2010,72(1):113-122.

[4] CUI Yu-jun,ZOU Yu-mei. Existence and Uniqueness theorems for fourth-order singular boundary value problems [J]. Computers and Mathematics with Applications,2009,58(7):1449-1456.

[5] LIU Bing. Positive solutions of fourth order two-point boundary value problems[J]. Appl Math Comput. 2004,148(2):407-420.

[6] 张兴秋.奇异四阶积分边值问题正解存在唯一性[J].应用数学学报,2010,33(1):38-50.

[7] MA Hui-li. Symmetric positive solutions for nonlocal boundary value problems of fourth order[J]. Nonlinear Analysis,2008,68(3):645-651.

[8] ZHANG Xue-mei,GE Wei-gao. Positive solutions for a class of boundary-value problems with integral boundary conditions[J]. Computers and Mathematics with Applications,2009,58(2):203-215.

[9] KONG Ling-ju. Second order singular boundary value problems with integral boundary conditions[J]. Nonlinear Analysis,2010,72(5):2628-2638.

[10] 邹黄辉,王全义.一类四阶微分方程积分边值问题正解的存在性[J].华侨大学学报:自然科学版,2011,32(6):699-704.

[11] 郭大均.非线性范函分析[M].济南:山东科学技术出版社,2002:314-315.

Existence of Positive Solutions for a Class of Fourth-Order Singular Nonlinear Integral Boundary Value Problems

WANG Quan-yi, ZOU Huang-hui

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: We study the problem on the existence of positive solutions for a class of fourth-order singular nonlinear integral boundary value problem. By employing the fixed point theorem in cones and some analytical skills, we obtain some new results on the existence of one or multiple positive solutions for the boundary value problems. Our results extend and improve some previous results.

Keywords: cone; positive solution; nonlinear integral boundary value problem; fixed point theorem

(**责任编辑**:陈志贤 **英文审校**:黄心中)