文章编号:1000-5013(2014)01-0107-05 doi:10.11830/ISSN.1000-5013.2014.01.0107

图的拉普拉斯谱半径对应的特征向量性质及其应用

汪秋分,宋海洲

(华侨大学 数学科学学院,福建 泉州 362021)

摘要: 研究图的拉普拉斯谱半径对应的特征向量的性质及应用,并得到一些有关图的移接变形对拉普拉斯谱半径影响的结果.

关键词: 连通图;树;拉普拉斯谱半径;移接变形;特征向量

中图分类号: O 157.5 **文献标志码:** A

设 G 是一个简单的连通图[1],$G=(V,E)$. 其顶点集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,边集 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$. 记顶点 v_i 的度为 d_i,$i=1,2,\cdots,n$. 记 $\boldsymbol{D}(G)=\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$ 和 $\boldsymbol{A}(G)$ 分别为 G 的度对角矩阵和邻接矩阵[2],则 $\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{D}(G)-\boldsymbol{A}(G)$ 为 G 的拉普拉斯矩阵[3]. 显然,$\boldsymbol{L}(G)$ 是半正定、对称和奇异的. 称 $\boldsymbol{L}(G)$ 的特征值为 G 的拉普拉斯特征值,记为 $\mu(G)=\mu_1(G)\geqslant\mu_2(G)\geqslant\cdots\geqslant\mu_n(G)=0$. 特别的,称 $\mu(G)$ 为 G 的拉普拉斯谱半径[4]. 树是含 n 个顶点,$n-1$ 条边的简单连通图. 图 G 中所有的度为 1 的顶点称为图 G 的悬挂点[5]. 记 $N_G(v)$ 表示图 G 中与 v 相邻接的顶点集,d_v 表示图 G 中顶点 v 的度. 有关图的拉普拉斯谱半径的结果有很多,如郭继明[6]的加边或嫁接边对图的拉普拉斯谱半径的影响,袁西英等[7]的树的运算及其 Laplace 谱,郭继明[8]的树的拉普拉斯谱半径,谭尚旺[9]的关于树的拉普拉斯谱半径,张晓东[10]的给定度序列的树的拉普拉斯谱半径,等等. 本文给出了图的拉普拉斯谱半径对应的特征向量的性质及应用,并得到了一些有关图的移接变形对拉普拉斯谱半径影响的结果.

1 相关定义与性质

1.1 图的拉普拉斯谱半径对应的特征向量的定义

介绍其定义之前,先证明一个定理.

定理 1 设 $G=(V,E)$ 是一个简单的连通图,且 $|V|=n$. 记 $\boldsymbol{L}(G)$ 为图 G 的拉普拉斯矩阵,有时也简记为 $\boldsymbol{L}$,$\mu(G)$ 为图 G 的拉普拉斯谱半径. 则对于向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^{n\times1}$,有

1) $\mu(G)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\mu_i\}$,$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 为 $\boldsymbol{L}(G)$ 的 n 个特征值;

2) $\mu(G)=\max\limits_{\|x\|=1}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{L}x)$;

3) 若 $\|\boldsymbol{x}\|=1$,且 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{L}(G)\boldsymbol{x}=\mu(G)$,则 $\boldsymbol{L}(G)x=\mu(G)x$.

证明 1) 由拉普拉斯谱半径的定义容易证明.

2) 由于 $\boldsymbol{L}(G)$ 是一个实对称矩阵,因此,存在一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$,其中,$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 为 $\boldsymbol{L}(G)$ 的 n 个实特征值.

令 $\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)=\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{P}=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$,$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}y$,则有

$$x'\boldsymbol{L}x=y'\boldsymbol{P}'\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}y=y'\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}y=y'\boldsymbol{D}y=\sum_{i=1}^{n}\mu_i y_i^2.$$

收稿日期: 2012-10-17

通信作者: 宋海洲(1971-),男,副教授,主要从事运筹优化的研究. E-mail:hzsong@hqu.edu.cn.

基金项目: 中央高校基本科研业务费资助项目,华侨大学侨办科研基金项目(10HZR26)

又由于 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵,并且有 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}y$. 因此,当 $\|x\|=1$ 时,有 $\|y\|=1$. 不失一般性,可假设 $\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots\leqslant\mu_n$. 因而有

$$\max_{\|x\|=1}(x'\boldsymbol{L}x)=\max_{\|y\|=1}\sum_{i=1}^{n}\mu_i y_i^2\leqslant\max_{\|y\|=1}\sum_{i=1}^{n}\mu_n y_i^2=$$

$$\mu_n\max_{\|y\|=1}\sum_{i=1}^{n}y_i^2=\mu_n=\mu(G).$$

令 $\boldsymbol{y}^*=\mathrm{e}_n=(0,0,\cdots,0,1)'_{n\times 1}$,记 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{P}y^*=\boldsymbol{P}_n$,则上面不等式等号成立. 因此有 $\mu(G)=\max\limits_{\|x\|=1}(x'\boldsymbol{L}\boldsymbol{x})$.

3) 设 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 为 $\boldsymbol{L}(G)$ 的 n 个特征值,$\boldsymbol{P},\boldsymbol{D}$,$y$ 的含义同 2). 不失一般性,可设 $\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots\leqslant\mu_n$. 则由 1)可知 $\mu(G)=\mu_n$. 又由于 $x'\boldsymbol{L}(G)x=\mu(G)$,因此 $x'\boldsymbol{L}(G)x=y'Dy=\mu(G)=\mu_n$. 即有 $y'Dy=\mu_n$.

易知 $\boldsymbol{L}(G)$ 是一个实对称半正定矩阵,且 $\mu_1=0$,$\mu_n>0$. 不妨假设实数 $s(1\leqslant s\leqslant n)$ 是满足 $\mu_s<\mu_{s+1}$ 且 $\mu_{s+1}=\mu_n$ 的最大自然数. 所以 $y=(\boldsymbol{0}_{1\times s},\boldsymbol{Z})_{1\times n}$,其中,实向量 $\boldsymbol{Z}\in\mathbf{R}^{1\times(n-s)}$ 且 $\|\boldsymbol{Z}\|=1$. 记 $\boldsymbol{Z}=(y_{s+1},y_{s+2},\cdots,y_n)$,则有 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}y=\sum\limits_{k=s+1}^{n}y_k\boldsymbol{P}_k$. 可知 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{L}(G)$ 的对应于 μ_n 的特征向量,因此有 $\boldsymbol{L}(G)x=\mu(G)x$.

下面给出图的拉普拉斯谱半径对应的特征向量的定义.

定义 1　设 $G=(V,E)$ 是一个简单的连通图. 若向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^{n\times 1}$ 满足 $\|\boldsymbol{x}\|=1$,且 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{L}(G)\boldsymbol{x}=\mu(G)$,则称 $\boldsymbol{x}$ 为图 G 的一个规范拉普拉斯谱向量.

1.2　图的拉普拉斯谱半径对应的特征向量的性质

下面给出有关图的拉普拉斯谱半径对应的特征向量的一些性质.

定理 2　设 T 是一棵树,其顶点集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$. 记 $\boldsymbol{L}(T)$ 为 T 的拉普拉斯矩阵,$\mu(T)$ 为 T 的拉普拉斯谱半径. 若 $\boldsymbol{x}$ 为 T 的一个规范拉普拉斯谱向量,且 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$. 则有:1) $\boldsymbol{x}$ 为实向量;2) $|\boldsymbol{x}|>0$,其中,$|\boldsymbol{x}|=(|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|)'$.

证明　1) 由题意可知:$\boldsymbol{L}(T)$ 是实对称矩阵. 又 $\mu(T)$ 也为实数,因此,$\boldsymbol{x}$ 为实向量.

2) 反证法. 假设 $|\boldsymbol{x}|>0$ 不成立,必然存在一个顶点集 $H=\{v_{j_1},v_{j_2},\cdots,v_{j_t}\}$,使 $x_{j_l}=0(l=1,2,\cdots,t)$,其中,$1\leqslant t\leqslant n$,$1\leqslant j\leqslant n$, x_j 为顶点 v_j 对应于一个规范拉普拉斯谱向量的分量.

又由于 $\boldsymbol{x}$ 为 T 的一个规范拉普拉斯谱向量,因而有 $\|\boldsymbol{x}\|=1$. 所以 $\boldsymbol{x}\neq 0$,且存在顶点 $v\in V(T)$ 使得 $x_v=0$,及顶点 $u\in N_T(v)$ 使得 $x_u\neq 0$.

设 T 是以顶点 v 为根节点的根树,记 $N_T(v)=\{w_1,w_2,\cdots,w_s\}$. 另记 T_i 为由 w_i 及 w_i 的所有子孙组成的子树,$i=1,2,\cdots,s$. 令 $y_v=x_v=0$,$y_{w_i}=|x_{w_i}|$,当 $x_{w_i}\geqslant 0$ 时,有 $y_j=x_j(v_j\in T_i)$,当 $x_{w_i}<0$ 时,有 $y_j=-x_j(v_j\in T_i)$,$i=1,2,\cdots,s$.

因此,有 $y_{w_i}\geqslant 0$,$i=1,2,\cdots,s$,$\|y\|=1$ 且 $y'\boldsymbol{L}(T)y=x'\boldsymbol{L}(T)x=\mu(T)$. 由定义 1 可知,$\boldsymbol{y}$ 是 T 的一个规范拉普拉斯谱向量. 根据定理 1 可得 $\boldsymbol{L}(T)\boldsymbol{y}=\mu(T)\boldsymbol{y}$. 又已知 $\boldsymbol{L}(T)=\boldsymbol{D}(T)-\boldsymbol{A}(T)$,则$(D(T)-A(T))\boldsymbol{y}=\mu(T)\boldsymbol{y}$. 故$((D(T)-\mu(T)I)\boldsymbol{y})_v=(A(T)\boldsymbol{y})_v$. 因此可得 $\sum\limits_{i=1}^{s}y_{w_i}=0$.

然而 $y_{w_i}\geqslant 0$,且存在 $i_0=\in\{1,2,\cdots,s\}$,使得 $w_{i_0}=u$ 满足 $y_u>0$. 因而 $\sum\limits_{i=1}^{s}y_{w_i}>0$,从而导致矛盾,原命题成立.

定理 3　设 T 是一棵树,v 是 T 的一个顶点,$v_1,v_2,\cdots,v_s$ 是与 v 相邻的悬挂点. 若 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 为 T 的一个规范拉普拉斯谱向量,这里 x_i 对应于顶点 v_i,$1\leqslant i\leqslant n$,则 $x_{v_j}=x_{v_i}$,$1\leqslant i<j\leqslant s$.

证明　由于 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 为 T 的一个规范拉普拉斯谱向量,由定理 1 及定义 1 可得

$$\boldsymbol{L}(T)\boldsymbol{x}=\mu(T)\boldsymbol{x}.$$

又已知 $\boldsymbol{L}(T)=D(T)-A(T)$,则有$(D(T)-A(T))\boldsymbol{x}=\mu(T)\boldsymbol{x}$,所以可得$((D(T)-\mu(T)I)\boldsymbol{x})_{v_i}=(A(T)\boldsymbol{x})_{v_i}=x_v$,$i=1,2,\cdots,s$. 从而有$(1-\mu(T))x_{v_1}=x_v$,$(1-\mu(T))x_{v_2}=x_v$,$\cdots$,$(1-\mu(T))x_{v_s}=x_v$. 因此 $x_{v_j}=x_{v_i}(1\leqslant i<j\leqslant s)$.

定理 4　设 $T=(V,E)$ 是一棵树,其顶点集 $V(T)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,边集记为 $E(T)$. 若 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,$

$\cdots,x_n)'$为 T 的一个规范拉普拉斯谱向量，x_i 对应于顶点 v_i，$1\leqslant i\leqslant n$. 则有：1）对于任意边 $uv\in E(T)$，有 $x_u x_v<0$；2）$\sum_{i=1}^{n} x_i=0$.

证明　1）由于 $\boldsymbol{x}$ 为 T 的一个规范拉普拉斯谱向量，由定义 1 可得

$$\mu(T)=x'\boldsymbol{L}(T)x=\sum_{i,j\in E(T)}(x_i-y_j)^2,\qquad 1\leqslant i<j\leqslant n.$$

对任意 $uv\in E(T)$，由定理 2 可得$|x_u|>0$ 且$|x_v|>0$，所以有 $x_u x_v\neq 0$.

设存在边 $uv\in E(T)$使得 $x_u x_v>0$. 设 T 是以 r 为根节点的根树，可设顶点 u 是顶点 v 的父节点（图 1）. 设 $T_1=(V_1,E_1)$是由 v 及 v 的所有子孙组成的 k 层子树（图 2）. 不失一般性，假设 $x_u>0$，故 $x_v>0$.

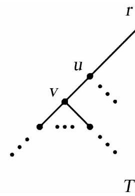

图 1　顶点 u 是顶点 v 的父节点

Fig. 1　Vertex u is the father vertex of vertex v

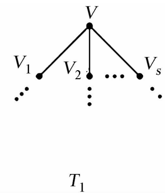

图 2　v 及 v 的所有子孙组成的 k 层子树

Fig. 2　Subtree with k levels obtained from v and v's descendants

取 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$，令 $y_i=x_i(i\notin V_1)$，$y_{w_1}=-|x_{w_1}|$（w_1 是 T_1 的第 1 层上的顶点，即 $w_1=v$），$y_{w_2}=(-1)^2|x_{w_2}|$（任意 w_2 是 T_1 的第 2 层上的顶点），$\cdots$，$y_{w_k}=(-1)^k|x_{w_k}|$（任意 w_k 是 T_1 的第 k 层上的顶点）. 则有$\|y\|=\|x\|=1$，且有

$$\begin{aligned}y'\boldsymbol{L}(T)y=&\sum_{i,j\in E(T)}(y_i-y_j)^2=\\&\sum_{i,j\in E(T)/E_1}(x_i-x_j)^2+\sum_{i,j\in E_1/uv}(y_i-y_j)^2+(x_u+x_v)^2>\\&\sum_{i,j\in E(T)/E_1}(x_i-x_j)^2+\sum_{i,j\in E_1/uv}(x_i-x_j)^2+(x_u-x_v)^2=\\&\sum_{i,j\in E}(x_i-x_j)^2=\mu(T).\end{aligned}$$

因此，存在一个单位向量 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$，使 $\mu(T)<y'\boldsymbol{L}(T)y$. 这与定理 1 矛盾，故有 $x_u x_v<0$.

2）由于 $\boldsymbol{x}$ 为 T 的一个规范拉普拉斯谱向量，因而有$(D(T)-A(T))\boldsymbol{x}=\mu(T)\boldsymbol{x}$. 因此$(d_{v_i}-\mu(T))x_i=\sum_{v_j\in N_T(v_i)}x_j$. 所以有$\sum_{i=1}^{n}(d_{v_i}-\mu(T))x_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{v_j\in N_T(v_i)}x_j$. 从而$\sum_{i=1}^{n}d_{v_i}x_i-\mu(T)\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}d_{v_i}x_i$，所以$\sum_{i=1}^{n}x_i=0$.

2　图的拉普拉斯谱半径对应的特征向量的应用

2.1　加边对图的拉普拉斯谱半径的影响

定理 5　设 u,v 是树 T 的两个顶点. 记顶点 u,v 之间的距离为 $d(u,v)=k$，其中，k 为奇数且 $k\geqslant 3$. 若 G 是由 T 添加新边设 uv 后所得到的图，则有 $\mu(G)>\mu(T)$.

证明　设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$为 T 的一个规范拉普拉斯谱向量，x_i 对应于顶点 v_i，$1\leqslant i\leqslant n$. 由于 k 为奇数且 $k\geqslant 3$，由前面定理 4 可得：$x_u x_v<0$. 记 T 与 G 的边集分别为 $E(T)$和 $E(G)$，因此有

$$\begin{aligned}\mu(G)=\max_{\|y\|=1}y'\boldsymbol{L}(G)y=\max_{\|y\|=1}\sum_{i,j\in E(G)}(y_i-y_j)^2\geqslant\\\sum_{i,j\in E(G)}(x_i-x_j)^2>\sum_{i,j\in E(T)}(x_i-x_j)^2=\mu(T).\end{aligned}$$

即 $\mu(G)>\mu(T)$.

2.2　嫁接对图的拉普拉斯谱半径的影响

定理 6　设 u,v 是树 T 的两个顶点，$T=(V(T),E(T))$，且有 $N_T(v)/(N_T(u)\cup\{u\})=\{v_1,v_2,\cdots,v_s\}$，$1\leqslant s\leqslant d_v$，设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$为 T 的一个规范拉普拉斯谱向量，x_i 对应于顶点 v_i，$1\leqslant i\leqslant n$，T^* 是由 T 删除边 vv_i，添加边 uv_i 后所得到的树（$1\leqslant i\leqslant s$）（图 3）. 若$|x_u|\geqslant|x_v|$，则 $\mu(T)<\mu(T^*)$.

证明　对于树 T,设 $T=(V,E)$形成一根树,且顶点 v 是 $v_1,v_2,\cdots,v_s$ 的父节点. 令 T_1 是由顶点 $v,v_1,v_2,\cdots,v_s$ 及 $v_1,v_2,\cdots,v_s$ 的所有子孙组成的子树,$T_1=(V_1,E_1)$. 类似的,对于树 T^*,设 $T^*=(V^*,E^*)$形成一根树,u 为其根节点,并且顶点 u 是 $v_1,v_2,\cdots,v_s$ 的父节点. 令 T_1^* 是由顶点 $u,v_1,v_2,\cdots,v_s$ 及 $v_1,v_2,\cdots,v_s$ 的所有子孙组成的子树,且 T_1^* 的层次(高度加 1)为 k. 记 $E'_1=E_1/\{vv_1,vv_2,\cdots,vv_s\}$.

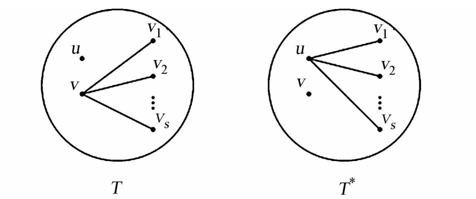

图 3　树 T 和树 T^*

Fig. 3　Tree T and T^*

令 $y_i=x_i(v_i\in V/V(T_1))$, $y_v=x_v$, $y_{w_1}=-\operatorname{sgn}(x_u)|x_{w_1}|$(任意 w_1 是 T_1^* 的第 2 层上的顶点), $y_{w_2}=(-1)^2\operatorname{sgn}(x_u)|x_{w_2}|$(任意 w_2 是 T_1^* 的第 3 层上的顶点),$\cdots$, $y_{w_{k-1}}=(-1)^{k-1}\operatorname{sgn}(x_u)|x_{w_{k-1}}|$(任意 w_{k-1} 是 T_1^* 的第 k 层上的顶点). 则可得 $\|y\|=1$,且

$$
\begin{aligned}
y'\boldsymbol{L}(T^*)y-x'\boldsymbol{L}(T)x=&\sum_{i,j\in E^*}(y_i-y_j)^2-\sum_{i,j\in E}(x_i-x_j)^2=\\
&\Big[\sum_{i,j\in E'_1}(y_i-y_j)^2+\sum_{i,j\in E^*/E'_1}(y_i-y_j)^2\Big]-\\
&\Big[\sum_{i,j\in E'_1}(x_i-x_j)^2-\sum_{i,j\in E/E'_1}(x_i-x_j)^2\Big]=\\
&\sum_{i,j\in E^*/E'_1}(y_i-y_j)^2-\sum_{i,j\in E/E'_1}(x_i-x_j)^2=\\
&\sum_{i=1}^{s}(|x_u|+|x_{v_i}|)^2-\sum_{i=1}^{s}(|x_v|+|x_{v_i}|)^2=\\
&\sum_{i=1}^{s}(|x_u|^2-|x_v|^2)+2\sum_{i=1}^{s}|x_{v_i}|(|x_u|-|x_v|)\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

即有 $y'\boldsymbol{L}(T^*)y\geqslant x'\boldsymbol{L}(T)x$. 因此

$$\mu(T)=x'\boldsymbol{L}(T)x\leqslant y'\boldsymbol{L}(T^*)y\leqslant\max_{\|y\|=1}y'\boldsymbol{L}(T^*)y=\mu(T^*). \tag{1}$$

故有 $\mu(T)\leqslant\mu(T^*)$.

若 $\mu(T)=\mu(T^*)$, 则式(1)中等号成立, 故有 $\mu(T)=y'\boldsymbol{L}(T^*)y=\mu(T^*)$. 因而, 由定理 1 可以得 $\boldsymbol{L}(T^*)y=\mu(T^*)y$. 又 $\boldsymbol{L}(T^*)=D(T^*)-A(T^*)$,所以

$$\mu(T^*)y_v=(\boldsymbol{L}(T^*)y)_v=d_{T^*}(v)y_v-\sum_{v_i\in N_{T^*}(v)}y_i, \tag{2}$$

式(2)中 :$d_{T^*}(v)$为顶点 v 在树 T^* 中的度.

又 $\boldsymbol{L}(T)x=\mu(T)x$,类似的有

$$\mu(T)x_v=(\boldsymbol{L}(T)x)_v=d(v)x_v-\sum_{v_i\in N_T(v)}x_i=d(v)y_v-\sum_{v_i\in N_{T^*}(v)}x_i-\sum_{i=1}^{s}x_i. \tag{3}$$

由式(2)～(3)可得

$$(\mu(T^*)-\mu(T))x_v=\sum_{i=1}^{s}x_i-sx_v+\sum_{v_i\in N_{T^*}(v)}(x_i-y_i).$$

不失一般性,设 $x_v>0$.

若 $x_u>0$,由定理 4 可得 $(\mu(T^*)-\mu(T))x_v=\sum_{i=1}^{s}x_i-sx_v<0$. 因而有 $\mu(T)>\mu(T^*)$,这与假设矛盾.

若 $x_u<0$,由定理 4 可得 $(\mu(T^*)-\mu(T))x_v=\sum_{i=1}^{s}x_i-sx_v+\sum_{v_i\in N_{T^*}(v)}(x_i-|x_i|)<0$. 有 $\mu(T)>\mu(T^*)$,这也与假设矛盾.

综上所述,若 $|x_u|\geqslant|x_v|$,则 $\mu(T)<\mu(T^*)$.

推论 1　设 T^* 是如定理 6 所定义的树,若 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$ 为 T^* 的一个规范拉普拉斯谱向量, y_i 对应于顶点 v_i, $1\leqslant i\leqslant n$,则 $|y_u|>|y_v|$.

证明　反证法. 若 $|y_u| \leqslant |y_v|$，由定理 6 可得 $\mu(T) > \mu(T^*)$. 这与定理 6 结论矛盾，顾原命题成立.

推论 2　设 $G=(V,E)$ 为含 n 个顶点的树，r,s,t 是 G 的三个不同的顶点，且 $rs \in E(G)$，$rt \notin E(G)$. 设 G^* 是由 G 删除边 rs 添加边 rt 后所得到的树. 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 为 G 的一个规范拉普拉斯谱向量，x_i 对应于顶点 v_i，$1 \leqslant i \leqslant n$；$\boldsymbol{x}^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)'$ 为 G^* 的一个规范拉普拉斯谱向量，x_i^* 对应于顶点 v_i^*，$1 \leqslant i \leqslant n$. 若 $|x_t| \geqslant |x_s|$，则 $|x_t^*| > |x_s^*|$.

证明　显然，由题意可知，G 是由 G^* 删除边 rt 添加边 rs 后所得到的树. 假设 $|x_t^*| \leqslant |x_s^*|$，由定理 6 可得 $\mu(G) > \mu(G^*)$. 又 $|x_t| \geqslant |x_s|$，由定理 6 得 $\mu(G) < \mu(G^*)$. 这样导致矛盾，因此原命题成立.

参考文献：

[1] 汪秋分，宋海洲. 图谱理论中一些定理的新证明[J]. 华侨大学学报：自然科学版，2012，33(4)：477-480.

[2] 刘亚国. 图论中邻接矩阵的应用[J]. 忻州师范学院学报，2008，24(4)：18-19.

[3] 谭尚旺，张德龙. 一定条件下图的拉普拉斯矩阵的谱半径[J]. 广西科学，2008，15(4)：352-356.

[4] LI Jian-xi，SHIU Wai-chee，CHAN Wai-hong. The Laplacian spectral radius of some graphs[J]. Linear Algebra Appl，2009，431(1)：99-103.

[5] WU Bao-feng，XIAO En-li，HONG Yuan. The spectral radius of trees on k pendant vertices[J]. Linear Algebra Appl，2005，395(15)：343-349.

[6] GUO Ji-ming. The effect on the Laplacian spectral radius of a graph by adding or grafting edges[J]. Linear Algebra Appl，2006，413(1)：59-71.

[7] 袁西英，吴宝丰，肖恩利. 树的运算及其 Laplace 谱[J]. 华东师范大学学报：自然科学版，2004，50(2)：13-18.

[8] GUO Ji-ming. On the Laplacian spectral radius of a tree[J]. Linear Algebra Appl，2003，368(15)：379-385.

[9] TAN Shang-wang. On the Laplacian spectral radius of trees[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics，2010，25(4)：615-625.

[10] ZHANG Xiao-dong. The Laplacian spectral radii of trees with degree sequences[J]. Discrete Mathematics，2008，308(15)：3143-3150.

Properties and Applications of the Eigenvector Corresponding to the Laplacian Spectral Radius of a Graph

WANG Qiu-fen，SONG Hai-zhou

(School of Mathematical Sciences，Huaqiao University，Quanzhou 362021，China)

Abstract：In this paper，we study the properties and applications of the eigenvector corresponding to the Laplacian spectral radius of a graph. Some results on the Laplacian spectral radius of a graph by adding and grafting edges are obtained.

Keywords：connected graph；tree；Laplacian spectral radius；graft transformation；eigenvector

（**责任编辑**：钱筠　　**英文审校**：黄心中）