文章编号:1000-5013(2014)01-0102-05 doi:10.11830/ISSN.1000-5013.2014.01.0102

双调和型映照的 Landau 定理

石擎天, 黄心中

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 利用单位圆盘上有界调和映照的系数估计及 Schwarz 引理,对双调和映照 $F(z)$ 及其在微分算子 L 作用下 $L_F(z)$ 的 Landau 定理中的单叶半径进行估计. 所得结果改进了刘名生等和 Chen 等的研究结果.

关键词: 双调和型映照; Landau 定理; 微分算子; Schwarz 引理

中图分类号: O 174.51; O 174.55 **文献标志码:** A

1 预备知识

考虑平面上具有四阶连续可微的复值函数 $F(z)$,如果 $\Delta F(z)$ 是区域 Ω 上的调和映照,则称 $F(z)$ 是 Ω 上的双调和映照. 单连通区域 Ω 上的双调和映照 $F(z)$ 可以表示为 $F(z)=|z|^2G(z)+K(z)$, $z\in\Omega$, 其中 $G(z)$ 和 $K(z)$ 在 Ω 上调和[1]. 当 $G(z)\equiv 0$ 时,双调和映照 $F(z)$ 是区域 Ω 上调和映照,所以双调和映照是调和映照的一种推广. 微分算子 L 作用于调和函数 $f(z)$ 为 $L_f(z)=zf_z(z)-\bar{z}f_{\bar{z}}(z)$. Abdulhad 等[2-3]对 $L_f(z)$ 的性质研究得到 L 微分算子保持调和性和双调和性,但未必保持有界性. 不少作者对满足一定条件下有界函数的单叶半径、Bloch 常数进行研究,得到很多好的结果. 刘名生等[4]对微分算子 L 作用于有界调和映照的 Landau 定理进行了考虑,研究取得了一些新进展.

关于平面单连通区域上有界调和映照,有如下估计不等式.

定理 A[5-6] 设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是单位圆盘 D 上调和映照,其中 $h(z)$ 和 $g(z)$ 在 D 上解析,

1) 若 $f(0)=0$ 且 $f(D)\subset D$,则有

$$|f(z)|\leqslant\frac{4}{\pi}\arctan|z|\leqslant\frac{4}{\pi}|z|,\text{且 }\Lambda_f(z)\leqslant\frac{4}{\pi(1-|z|^2)},\qquad z\in D.$$

2) 若 $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$, 满足 $|f(z)|\leqslant M$, $z\in D$ 则有如下精确的估计式

$$|a_n|+|b_n|\leqslant\frac{4M}{\pi},\qquad n=1,2,\cdots.\tag{1}$$

定理 B[5,7] 设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是单位圆盘 D 上调和映照,其中 $h(z)$ 和 $g(z)$ 是 D 上解析映照且展成幂级数为 $h(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$, $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$, 满足 $J_f(0)=1$, $|f(z)|\leqslant M$, $z\in D$,则有

$$\lambda_f(0)\geqslant\lambda_0(M)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{M^2-1}+\sqrt{M^2+1}}, & 1\leqslant M\leqslant M_0,\\[2ex] \dfrac{\pi}{4M}, & M\geqslant M_0=\dfrac{\pi}{2\sqrt[4]{2\pi^2-16}}\approx 1.129\ 6,\end{cases}\tag{2}$$

$$|a_n|+|b_n|\leqslant T(M)=\begin{cases}\sqrt{2M^2-2}, & 1\leqslant M\leqslant M_1,\\[1ex] \dfrac{4M}{\pi}, & M\geqslant M_1=\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi^2-8}}\approx 2.297\ 6.\end{cases}\tag{3}$$

收稿日期: 2012-10-23

通信作者: 黄心中(1957-),男,教授,主要从事函数论的研究. E-mail:huangxz@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(2011J0101)

其中，$n=2,3,\cdots$. 应用上述结果，文献[5]证明了

定理 C[5]　设 $F(z)=|z|^2G(z)+K(z)$ 是单位圆盘 D 上双调和映照，$G(z)$ 和 $K(z)$ 在 D 上调和，满足 $F(0)=K(0)=0$ 且 $J_F(0)=1$，$|G(z)|\leqslant M$，$|K(z)|\leqslant M$，$z\in D$ 则存在常数 $\rho_1\in(0,1)$，使得 $F(z)$ 在圆盘 D_{ρ_1} 上单叶且 $F(D_{\rho_1})$ 包含单叶圆盘 D_{σ_1}. ρ_1 是方程

$$\lambda_0(M)-2\rho M-\frac{4M\rho^2}{\pi(1-\rho)^2}-\frac{T(M)(2\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2}=0$$

的最小正根，且 $\sigma_1=\rho_1[\lambda_0(M)-\frac{4M\rho_1^2}{\pi(1-\rho_1)}-T(M)\frac{\rho_1}{1-\rho_1}]$.

事实上，定理 C 要求满足 $G(0)=0$，否则得到的 σ_1 将会得到变化. 文献[8-9]对算子 L 作用于双调和映照的 Landau 定理进行估计，得到如下结论.

定理 D[9]　假设 $F(z)=|z|^2G(z)+K(z)$ 是单位圆盘 D 上的双调和映照，$G(z)$ 和 $K(z)$ 在 D 上调和，满足 $F(0)=K(0)=J_F(0)-1=0$，且 $|G(z)|\leqslant M$，$|K(z)|\leqslant M$，$M\geqslant1$. 则存在常数 $\rho\in(0,1)$，使得 $L_F(z)$ 在圆盘 D_ρ 上单叶且 $L_F(D_\rho)$ 包含单叶圆盘 D_σ. 其中 ρ 是方程

$$\frac{\pi}{4M}-\frac{6M\rho^2}{(1-\rho)^2}-\frac{4M\rho^2}{(1-\rho)^3}-\frac{16M}{\pi^2}m_1\arctan\rho-\frac{4M\rho}{(1-\rho)^3}=0$$

的最小正根，且 $\sigma=\rho[\frac{\pi}{4M}-\frac{2M\rho^2}{(1-\rho)^2}-\frac{16M}{\pi^2}m_1\arctan\rho]$. 其中 m_1 是函数 $\frac{2-x^2+(4/\pi)\arctan x}{x(1-x^2)}$ 在 $0<x<1$ 上的最小值.

最近，Chen 等在文献[10]中改进了上述定理，当 p=2 时有如下结论.

定理 E　设 $F(z)=|z|^2G(z)+K(z)$ 是 D 上双调和映照，其中 $G(z)$ 和 $K(z)$ 是 D 上调和映照，满足 $F(0)=K(0)=J_F(0)-1=0$ 且 $|G(z)|\leqslant M$，$|K(z)|\leqslant M$，$M\geqslant1$. 则存在常数 $\rho_2\in(0,1)$，使得 $L_F(z)$ 在圆盘 D_{ρ_2} 上单叶且 $L_F(D_{\rho_2})$ 包含单叶圆盘 D_{σ_2}. 这里 ρ_2 是方程

$$\lambda_0(M)-\frac{16M}{\pi^2}s_0\arctan\rho-\frac{3T(M)\rho^2}{(1-\rho)^2}-\frac{2T(M)\rho}{(1-\rho)^3}-\frac{2T(M)\rho^3}{(1-\rho)^3}=0$$

的最小正根，且 $\sigma_2=\rho_2[\lambda_0(M)-\frac{16M}{\pi^2}s_0\arctan\rho_2-\frac{T(M)\rho_2^2}{(1-\rho_2)^2}]$，其中 $s_0=(\frac{\sqrt{17}-1}{\sqrt{17}-3})\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{17}}}$.

定理 F　设 $F(z)=|z|^2G(z)$ 是 D 上双调和映照，$G(z)$ 是 D 上调和映照，满足 $G(0)=J_G(0)-1=0$ 且 $|G(z)|\leqslant M$，$z\in D$. 则 $L_F(z)$ 在 D_{ρ_3} 上单叶且 $L_F(D_{\rho_3})$ 包含单叶圆盘 D_{σ_3}. 其中 ρ_3 是方程

$$\lambda_0(M)-\frac{48M}{\pi^2}s_0\arctan\rho-\frac{2T(M)\rho}{(1-\rho)^3}=0$$

的最小正根，且 $\sigma_3=\rho_3^3[\lambda_0(M)-\frac{16M}{\pi^2}s_0\arctan\rho]$.

定理 E 中，设 $G(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n}$，仅在 $|G(z)|\leqslant M$，$z\in D$ 的条件下得出 $|a_n|+|b_n|\leqslant T(M)$ 的结论，其中当 $1\leqslant M\leqslant M_1$ 时 $|a_n|+|b_n|\leqslant\sqrt{2M-2}$ 不成立. 考虑函数[11]

$$f_n(z)=\frac{2}{\pi}M\mathrm{Re}\ \mathrm{i}\ln\frac{1+z^n}{1-z^n}=\frac{2}{\pi}M[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}z^{(2k+1)n}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\bar{z}^{(2k+1)n}],\qquad n=1,2,\cdots,$$

满足 $|f_n(z)|\leqslant M$，$z\in D$，但是 $|a_n|+|b_n|=4M/\pi\geqslant\sqrt{2M-2}$.

另外，定理 E 和 F 中关于 x 的不等式 $\arctan\frac{x}{r}\leqslant\frac{1}{r}\arctan x$，$0<x$，$r<1$ 的估计不够精确，有相当大的改进空间. 基于以上事实且在文献[4-5,9]的基础上，进一步研究该类调和函数的 Landau 定理中单叶半径的估计问题.

2　主要结果及其证明

针对定理 C，证明如下.

定理 1　设 $F(z)=|z|^2G(z)+K(z)$ 是单位圆盘 D 上的双调和映照，$G(z)$ 和 $K(z)$ 在 D 上调和，满

足 $F(0)=G(0)=K(0)=J_F(0)-1=0$ 且 $|G(z)|\leqslant M$，$|K(z)|\leqslant M$，$M\geqslant 1$. 则存在常数 $r_1\in(0,1)$，使得 $F(z)$ 在圆盘 D_{r_1} 上单叶且 $F(D_{r_1})$ 包含单叶圆盘 D_{R_1}. 这里 r_1 是方程

$$\lambda_0(M)-\frac{T(M)(2r-r^2)}{(1-r)^2}-\frac{8Mr^2}{\pi(1-r)}-\frac{4Mr^2}{\pi(1-r^2)}=0$$

的最小正根，且 $R_1=r_1[\lambda_0(M)-\dfrac{T(M)r_1}{1-r_1}-\dfrac{4Mr_1^2}{\pi(1-r_1)}]$.

证明 假设 $K(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n}$，$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}d_nz^n}$，$z\in D$. 由 $F(z)=|z|^2G(z)+K(z)$ 可得 $F_z=\bar{z}G+|z|^2G_z+K_z$，$F_{\bar{z}}=zG+|z|^2G_{\bar{z}}+K_{\bar{z}}$，则有 $J_F(0)=J_K(0)=1$. 所以由定理 A 和 B 可知：$|c_n|+|d_n|\leqslant\dfrac{4M}{\pi}$，$n=1,2,\cdots$；$|a_n|+|b_n|\leqslant T(M)$，$n=2,3,\cdots$，且 $\lambda_K(0)\geqslant\lambda_0(M)$.

给定 $r\in(0,1)$，任取 $z_1,z_2\in D$，且 $z_1\neq z_2$，$[z_1,z_2]$ 表示连接 z_1,z_2 的直线段.

$$\begin{aligned}
|F(z_1)-F(z_2)|=&\left|\int_{[z_1,z_2]}F_z\mathrm{d}z+F_{\bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}\right|\geqslant\left|\int_{[z_1,z_2]}K_z(0)\mathrm{d}z+K_{\bar{z}}(0)\mathrm{d}\bar{z}\right|-\\
&\left|\int_{[z_1,z_2]}(K_z(z)-K_z(0))\mathrm{d}z+(K_{\bar{z}}(z)-K_{\bar{z}}(0))\mathrm{d}\bar{z}\right|-\\
&\left|\int_{[z_1,z_2]}G(\bar{z}\mathrm{d}z+z\mathrm{d}\bar{z})\right|-\left|\int_{[z_1,z_2]}|z|^2(G_z\mathrm{d}z+G_{\bar{z}}\mathrm{d}\bar{z})\right|\geqslant\\
&|z_1,z_2|[\lambda_K(0)-\sum_{n=2}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)nr^{n-1}-\\
&2r\sum_{n=1}^{\infty}(|c_n|+|d_n|)r^n-\frac{4Mr^2}{\pi(1-r^2)}]\geqslant\\
&|z_1,z_2|[\lambda_0(M)-\frac{T(M)(2r-r^2)}{(1-r)^2}-\frac{8Mr^2}{\pi(1-r)}-\frac{4Mr^2}{\pi(1-r^2)}].
\end{aligned}$$

令 $\varphi(r)=\lambda_0(M)-\dfrac{T(M)(2r-r^2)}{(1-r)^2}-\dfrac{8Mr^2}{\pi(1-r)}-\dfrac{4Mr^2}{\pi(1-r^2)}$，$r\in(0,1)$. 由于 $\varphi(r)$ 在 $(0,1)$ 上连续可微，且 $\lim\limits_{r\to 0^+}\varphi(r)=\lambda_0(M)>0$，$\lim\limits_{r\to 1^-}\varphi(r)=-\infty$. 所以存在 $r_1\in(0,1)$ 使得 $\varphi(r_1)=0$ 且 $\varphi(r)$ 在 $(0,r_1)$ 内恒为正，即当 $r<r_1$ 时 $|F(z_1)-F(z_2)|>0$. 再任取 $z\in\partial D_{r_1}$，则有

$$\begin{aligned}
F(z)=&||z|^2G+K|\geqslant|a_1z+\bar{b}_1\bar{z}|-\left|\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n+\sum_{n=2}^{\infty}\bar{b}_n\bar{z}^n\right|-||z|^2G|\geqslant\\
&\lambda_K(0)r_1-\sum_{n=2}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)r_1^n-r_1^2\sum_{n=1}^{\infty}(|c_n|+|d_n|)r_1^n\geqslant\\
&r_0[\lambda_0(M)-\frac{T(M)r_1}{1-r_1}-\frac{4Mr_1^2}{\pi(1-r_1)}].
\end{aligned}$$

由于 $\dfrac{8Mr^2}{\pi(1-r)}<2Mr$ 在 $0<r<\dfrac{\pi}{4+\pi}\approx 0.439\ 90$ 上恒成立，且 $\dfrac{4Mr^2}{1-r^2}<\dfrac{4Mr^2}{(1-r)^2}$ 对所有 $0<r<1$ 都成立，所以定理 1 中最小根 r_1 一定比定理 C 大，因而定理 1 改进了定理 C.

通过 Matlab 软件计算，比较定理 1 与定理 C，如表 1 所示.

表 1 定理 1 与定理 C 的比较

Tab. 1 Compare theorem 1 with theorem C

参数	定理 1				定理 C			
	$M=1.000\ 0$	$M=1.129\ 6$	$M=2.297\ 6$	$M=3.000\ 0$	$M=1.000\ 0$	$M=1.129\ 6$	$M=2.297\ 6$	$M=3.000\ 0$
r	0.412 719	0.095 831	0.050 395	0.031 245	0.336 400	0.065 240	0.031 553	0.018 371
R	0.260 303	0.057 684	0.009 008	0.004 210	0.263 358	0.041 550	0.007 683	0.003 518

下面研究微分算子 L 作用于双调和映照的 Landau 定理问题.

定理 2 设 $F(z)=|z|^2G(z)+K(z)$ 是单位圆盘 D 上双调和映照，$G(z)$ 和 $K(z)$ 是 D 上调和映照，满足 $F(0)=K(0)=J_F(0)-1=0$ 且 $|G(z)|\leqslant M$，$|K(z)|\leqslant M$，$M\geqslant 1$. 则 $L_F(z)$ 在 D_{r_2} 上单叶且 $L_F(D_{r_2})$

包含单叶圆盘 D_{R_2}. 其中 r_2 是方程

$$\lambda_0(M)-\frac{T(M)(2r-r^2)}{(1-r)^2}-\frac{12Mr^2}{\pi(1-r^2)}-\frac{8Mr^3}{\pi(1-r)^3}-\frac{2T(M)r}{(1-r)^3}=0$$

的最小正根，且 $R_2=r_2\left(\lambda_0(M)-\frac{T(M)(2r_2-r_2^2)}{(1-r_2)^2}-\frac{4Mr_2^2}{\pi(1-r_2^2)}\right)$.

证明　假设 $K(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n}$, $G(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}d_nz^n}$, $z\in D$. 由 $F(z)=|z|^2G(z)+K(z)$可得 $F_z(z)=\bar{z}G+|z|^2G_z+K_z$, $F_{\bar{z}}(z)=zG+|z|^2G_{\bar{z}}+K_{\bar{z}}$，即 $J_K(0)=1$. 所以由定理 A 和定理 B 可知：$|c_n|+|d_n|\leqslant\frac{4M}{\pi}$, $n=1,2,\cdots$；$|a_n|+|b_n|\leqslant T(M)$, $n=2,3,\cdots$，且 $\lambda_K(0)\geqslant\lambda_0(M)$.

令 $H(z)=L_F(z)=|z|^2L_G(z)+L_K(z)=|z|^2(zG_z-\bar{z}G_{\bar{z}})+(zK_z-\bar{z}K_{\bar{z}})$，则有

$$H_z=2|z|^2G_z+z|z|^2G_{zz}-\bar{z}^2G_{\bar{z}}+K_z+zK_{zz},$$
$$H_{\bar{z}}=-2|z|^2G_{\bar{z}}-\bar{z}|z|^2G_{\bar{z}\bar{z}}+z^2G_z-K_{\bar{z}}-\bar{z}K_{\bar{z}\bar{z}}.$$

给定 $r\in(0,1)$，任取 $z_1,z_2\in D$ 且 $z_1\neq z_2$，$[z_1,z_2]$ 表示连接 z_1,z_2 的直线段，则有

$$\begin{aligned}|H(z_1)-H(z_2)|=&\left|\int_{[z_1,z_2]}H_z\mathrm{d}z+H_{\bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}\right|\geqslant\left|\int_{[z_1,z_2]}K_z(0)\mathrm{d}z-K_{\bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}\right|-\\&\left|\int_{[z_1,z_2]}(K_z(z)-K_z(0))\mathrm{d}z-(K_{\bar{z}}(z)-K_{\bar{z}}(0))\mathrm{d}\bar{z}\right|-\\&2\left|\int_{[z_1,z_2]}|z|^2(G_z\mathrm{d}z-G_{\bar{z}}\mathrm{d}\bar{z})\right|-\left|\int_{[z_1,z_2]}|z|^2(zG_{zz}\mathrm{d}z-\bar{z}G_{\bar{z}\bar{z}}\mathrm{d}\bar{z})\right|-\\&\left|\int_{[z_1,z_2]}z^2G_z\mathrm{d}\bar{z}-\bar{z}^2G_{\bar{z}}\mathrm{d}z\right|-\left|\int_{[z_1,z_2]}zK_{zz}\mathrm{d}z-\bar{z}K_{\bar{z}\bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}\right|\geqslant\\&|z_1,z_2|\left[\lambda_0(M)-\frac{T(M)(2r-r^2)}{(1-r)^2}-\frac{12Mr^2}{\pi(1-r^2)}-\frac{8Mr^3}{\pi(1-r)^3}-\frac{2T(M)r}{(1-r)^3}\right].\end{aligned}$$

令 $\varphi(r)=\lambda_0(M)-\frac{T(M)(2r-r^2)}{(1-r)^2}-\frac{12Mr^2}{\pi(1-r^2)}-\frac{8Mr^3}{\pi(1-r)^3}-\frac{2T(M)r}{(1-r)^3}$, $r\in(0,1)$，由于 $\varphi(r)$在$(0,1)$内连续且 $\lim_{r\to0^+}\varphi(r)=\lambda_0(M)>0$, $\lim_{r\to1^-}\varphi(r)=-\infty$. 故存在 $r_2\in(0,1)$，使得 $\varphi(r_2)=0$ 且 $\varphi(r)$在$(0,r_2)$内恒大于零，即当 $r<r_2$ 时$|H(z_1)-H(z_2)|>0$. 再对任意 $z\in\partial D_{r_2}$，有

$$\begin{aligned}|H(z)|=&||z|^2(zG_z-\bar{z}G_{\bar{z}})+(zK_z-\bar{z}K_{\bar{z}})|\geqslant|zK_z(0)-\bar{z}K_{\bar{z}}(0)|-\\&|z(K_z(z)-K_z(0))-\bar{z}(K_{\bar{z}}(z)-K_{\bar{z}}(0))|-||z|^2(zG_z-\bar{z}G_{\bar{z}})|\geqslant\\&\lambda_0(M)r_2-r_2\sum_{n=2}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)nr_2^{n-1}-r_2^2\frac{4Mr_2}{\pi(1-r_2^2)}\geqslant\\&r_2\left[\lambda_0(M)-\frac{T(M)(2r_2-r_2^2)}{(1-r_2)^2}-\frac{4Mr_2^2}{\pi(1-r_2^2)}\right]=R_2.\end{aligned}$$

故定理得证.

通过 Matlab 软件计算，比较定理 2 和定理 E，如表 2 所示.

表 2　定理 2 与定理 E 的比较

Tab. 2　Compare theorem 2 with theorem E

参数	定理 2				定理 E			
	$M=1.0000$	$M=1.1296$	$M=2.2976$	$M=3.0000$	$M=1.0000$	$M=1.1296$	$M=2.2976$	$M=3.0000$
r	0.357 671	0.142 451	0.026 942	0.016 315	0.147 948	0.071 474	0.015 596	0.009 103
R	0.290 866	0.056 718	0.004 727	0.002 170		0.010 160	0.001 515	0.000 687

作为应用，考虑定理 2 中 $K\equiv0$ 的情形，得到了如下结论.

定理 3　设 $F(z)=|z|^2G(z)$是单位圆盘 D 上的双调和映照，$G(z)$是 D 上调和映照，满足 $G(0)=J_G(0)-1=0$，且$|G(z)|\leqslant M$, $M\geqslant1$. 则 $L_F(z)$在 D_{r_3} 上单叶，且 $L_F(D_{r_3})$包含单叶圆盘 D_{R_3}. 其中，r_3 是方程

$$\lambda_0(M)-\frac{3T(M)(2r-r^2)}{(1-r)^2}-\frac{2T(M)r}{(1-r)^3}=0$$

的最小正根,且 $R_3=r_3^3(\lambda_0(M)-\frac{T(M)(2r_3-r_3^2)}{(1-r_3)^2})$.

通过 Matlab 软件计算,比较定理 3 和定理 F,如表 3 所示.

表 3 定理 3 与定理 F 的比较

Tab. 3 Compare theorem 3 with theorem F

参数	定理 3				定理 F			
	M=1.000 0	M=1.129 6	M=2.297 6	M=3.000 0	M=1.000 0	M=1.129 6	M=2.297 6	M=3.000 0
r	1.000 000	0.096 421	0.014 218	0.008 432	0.049 000	0.028 167	0.006 462	0.003 774
R	1.000 000	4.735×10^{-4}	7.382×10^{-7}	1.178×10^{-7}	7.843×10^{-5}	1.069×10^{-5}	6.498×10^{-8}	9.931×10^{-9}

3 结束语

以上研究方法表明:充分应用调和映照的 Schwarz 引理和系数估计不等式可以得到更好的结果,在对数调和映照类、有界多重调和函数的相应问题的估计也可以得到进一步的结果.

参考文献:

[1] LEWY H. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings[J]. Bull Amer Math Soc,1936,42(10):689-692.

[2] ABDULHADI Z,MUHANNA Y,KHURI S. On univalent solutions of the biharmonic equations[J]. Journal of Inequalities Applications,2005(5):469-478.

[3] ABDULHADI Z,MUHANNA Y,KHURI S. On some properties of solutions of the biharmonic equation[J]. Applied Mathematics and Computation,2006,177(1):346-351.

[4] LIU Ming-sheng,LIU Zhi-wen. On bloch constants for certain harmonic mappings[J]. Southeast Asian Bulletin of Mathematics,2012,36(3):1-10.

[5] 刘名生,刘志文,朱玉灿. 某类双调和映射的 Landau 型定理[J]. 数学学报,2011,54(1):69-80.

[6] COLONNA F. The Bloch constant of bounded harmonic mappings[J]. Indiana Univ Math J,1989,38:829-840.

[7] LIU Ming-sheng. Landau theorem for planar harmonic mappings[J]. Comput Math Appl,2009,57(7):1142-1126.

[8] 夏小青,黄心中. 一类双调和映照的单叶半径估计[J]. 华侨大学学报:自然科学版,2011,32(2):218-221.

[9] CHEN S,PONNUSAM S,WANG X. Landau theorem for certain biharmonic mappings[J]. Applied Mathematics and Computation,2009,208(2):427-433.

[10] CHEN S,PONNUSAM S,WANG X. On properties of solutions of the p-harmonic equation[EB/OL]. (2012-04-12)[2012-09-30]. http://arxiv.org/pdf/1204.2767.pdf.

[11] 夏小青,黄心中. 平面有界调和函数的 Bloch 常数估计[J]. 数学年刊,2010,31A(6):769-776.

Landau's Theorem for Biharmonic-Type Mappings

SHI Qing-tian, HUANG Xin-zhong

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Using the coefficient inequalities for bounded harmonic mappings on the unit disk and Schwarz lemma, Landau's theorems for biharmonic mappings $F(z)$ and $L_F(z)$, where L is a differential operator, are considered. Our results improve the latest one made by Liu Ming-sheng and Chen.

Keywords: biharmonic-type mapping; Landau's theorem; differential operator; Schwarz lemma

(责任编辑:黄晓楠 英文审校:黄心中)