第 34 卷 第 6 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 34 No. 6
2013 年 11 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Nov. 2013

文章编号:1000-5013(2013)06-0716-05 doi:10.11830/ISSN.1000-5013.2013.06.0716

高阶分数阶微分方程边值问题解的存在性

杨军[1,2], 刘东利[1]

(1. 燕山大学 理学院, 河北 秦皇岛 066004;
2. 河北省数学研究所, 河北 石家庄 050000)

摘要: 研究一类非线性分数阶高阶微分方程边值问题解的存在性.通过定义一个特殊的压缩映射,利用 Banach 不动点定理和 Leray-Shauder 非线性抉择定理,得到所研究方程存在唯一解和至少存在一个解的充分条件,并分别给出一个例子来验证主要结果.

关键词: 分数阶; 微分方程; 高阶; 边值问题; 不动点定理

中图分类号: O 175.8 **文献标志码:** A

随着科学技术的发展,分数阶微分方程在诸多领域中引起了广泛的关注,许多自然界的现象都用分数阶微分方程作为它们的数学模型[1-3],使得大多数用整数阶导数无法解释的问题得以解决.特别地,随着分数阶微积分研究[4-8]的不断深入,其研究内容更加系统和丰富,如对于分数阶微分方程边值问题的研究思想,已逐渐由低阶变为高阶.白占兵等[9]研究了分数阶微分方程两点边值问题的正解存在性;El-Shahed M[10]研究了分数阶微分方程边值问题正解的存在和不存在的充分条件.梁四化等[11]研究了分数阶微分方程边值问题的正解存在性.刘锡平等[12]通过 Amamn 定理和上下求解法,研究了非线性分数阶微分方程的正解的存在性和多样性.本文主要研究以下一类非线性分数阶高阶微分方程边值问题

$$\left.\begin{aligned}&D_{0^+}^q u(t)+f(t,u(t),\Phi u(t),\Psi u(t))=0, \qquad 0\leqslant t\leqslant 1, \quad q\in(n-1,n],\\&u^{(i)}(0)=0, \qquad 0\leqslant i\leqslant n-3,\\&\alpha u^{(n-2)}(0)-\beta u^{(n-1)}(0)=0,\\&\beta u^{(n-2)}(1)+\alpha u^{(n-1)}(1)=0\end{aligned}\right\} \tag{P}$$

的解存在的一些充分条件.其中:$D_{0^+}^q$ 是 Caputo 分数阶导数;$f\in C[0,1]\times R^3,R)$, φ, $\psi\in L([0,1]\times[0,1]\times[0,\infty),[0,\infty))$为已知函数;$\alpha$, $\beta>0$, 且 $\rho^{-1}=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0$. 记 $\Delta=\{(t,s):0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1\}$, $\Phi u(t)=\int_0^t\varphi(t,s,u(s))\mathrm{d}s$, $\Psi u(t)=\int_0^t\psi(t,s,u(s))\mathrm{d}s$.

1 预备知识

定义 1 函数 $f:(0,+\infty)\to R$ 的 $q>0$ 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分定义为

$$I_{0^+}^q f(t)=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}f(s)\mathrm{d}s.$$

定义 2 连续函数 $f:(0,+\infty)\to R$ 的 $q>0$ 阶 Caputo 分数阶导数定义为

$$D_{0^+}^q f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-q)}\int_0^t(t-s)^{n-q-1}f^{(n)}(s)\mathrm{d}s, \qquad n-1<q\leqslant n.$$

引理 1 (Banach 不动点定理)设 E 是 Banach 空间 X 的非空闭子集, $TT:E\to E$ 为 E 上的压缩映射,则 T 有唯一的不动点 $x\in E$,使得 $Tx=x$.

收稿日期: 2013-04-26

通信作者: 杨军(1964-),女,教授,主要从事分数阶微分方程的研究. E-mail:jyang@ysu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60604004); 河北省应用基础研究计划重点基础研究项目(13961806D); 河北省秦皇岛市科技支撑计划项目(201001A037, 201101A168)

引理 2　如果 $q>0$，$y\in C(0,1)\cap L(0,1)$，则分数阶微分方程 $D_{0^+}^q y(t)=0$ 有唯一解为 $y(t)=c_0+c_1t+c_2t+\cdots+c_{n-1}t^{n-1}$. 其中，$c_1\in R$；$i=0,1,2,\cdots,n-1$；$n=[q]+1$.

引理 3　如果 $q>0$，且 $y\in C(0,1)\cap L(0,1)$，$D_{0^+}^q\in C(0,1)\cap L(0,1)$，则存在 $c_1\in R$，$i=0,1,2,\cdots,n-1$，$n=[q]+1$，使得 $I_{0^+}^q D_{0^+}^q y(t)=y(t)+c_0+c_1t+c_2t+\cdots+c_{n-1}t^{n-1}$.

引理 4　(Leray-Shauder 非线性抉择定理)设 C 是 Banach 空间 E 的闭凸集，U 为 C 相对开集，$0\in U$，$T:\overline{U}\to E$ 为全连续算子，则下列结论之一成立：

C_1）T 有一不动点 $u\in\overline{U}$；

C_2）存在点 $u\in\partial U$，$\lambda\in(0,1)$，使 $u=\lambda T(u)$有解，其中 $\overline{U}$ 和∂U 分别表示 U 的闭包和边界.

2　主要结果和证明

引理 5　若 $h(t)\in L[0,1]$，$n-1<q\leqslant n$，则边值问题

$$\left.\begin{aligned} &D_{0^+}^q u(t)+h(t)=0, \qquad t\in(0,1],\\ &u^{(i)}(0)=0, \qquad 0\leqslant i\leqslant n-3,\\ &\alpha u^{(n-2)}(0)-\beta u^{(n-1)}(0)=0,\\ &\beta u^{(n-2)}(1)+\alpha u^{(n-1)}(1)=0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

存在唯一解，即

$$\begin{aligned} u(t)=&-\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}h(s)\mathrm{d}s+\\ &\frac{\rho\beta t^{n-2}}{(n-2)!\,\Gamma(q-n+2)}\int_0^1[\beta(1-s)+\alpha(q-n+1)](1-s)^{q-n}h(s)\mathrm{d}s+\\ &\frac{\rho\alpha t^{n-1}}{(n-1)!\,\Gamma(q-n+2)}\int_0^1[\beta(1-s)+\alpha(q-n+1)](1-s)^{q-n}h(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}\tag{2}$$

证明　由引理 3 及边值条件 $u(0)=u'(0)=\cdots=u^{n-3}(0)=0$，可得方程 $D_{0^+}^q u(t)+h(t)=0$ 等价于积分方程，即

$$u(t)=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}h(s)\mathrm{d}s+\frac{u^{(n-2)}(0)}{(n-2)!}t^{n-2}+\frac{u^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1}. \tag{3}$$

由 Caputo 分数阶导数的性质，可得

$$u^{(n-2)}(t)=-\frac{1}{\Gamma(q-n+2)}\int_0^t(t-s)^{q-n+1}h(s)\mathrm{d}s+u^{(n-2)}(0)+u^{(n-1)}(0)t,$$

$$u^{(n-1)}(t)=-\frac{1}{\Gamma(q-n+1)}\int_0^t(t-s)^{q-n}h(s)\mathrm{d}s+u^{(n-1)}(0).$$

于是有

$$u^{(n-2)}(1)=-\frac{1}{\Gamma(q-n+2)}\int_0^t(t-s)^{q-n+1}h(s)\mathrm{d}s+u^{(n-2)}(0)+u^{(n-1)}(0),$$

$$u^{(n-1)}(1)=-\frac{1}{\Gamma(q-n+1)}\int_0^1(t-s)^{q-n}h(s)\mathrm{d}s+u^{(n-1)}(0).$$

然后，由边值条件 $\alpha u^{(n-2)}(0)-\beta u^{(n-1)}(0)=0$，$\beta u^{(n-2)}(1)+\alpha u^{(n-1)}(1)=0$，可解得

$$u^{(n-2)}(0)=\frac{\rho\beta}{\Gamma(q-n+2)}\int_0^1[\beta(1-s)+\alpha(q-n+1)](1-s)^{q-n}h(s)\mathrm{d}s. \tag{4}$$

$$u^{(n-1)}(0)=\frac{\rho\alpha}{\Gamma(q-n+2)}\int_0^1[\beta(1-s)+\alpha(q-n+1)](1-s)^{q-n}h(s)\mathrm{d}s. \tag{5}$$

将式(4)和式(5)代入式(3)，可得式(2). 证毕.

设 Banach 空间 $E=C[0,1]$，对给定 $r>0$，定义函数空间 $\Omega_r=\{u\in C[0,1]:|u|<r\}$，为了方便，记 $R_1=\sup\limits_{(t,s)\in\Delta}\int_0^t\varphi(t,s,u(s))\mathrm{d}s$，$R_2=\sup\limits_{(t,s)\in\Delta}\int_0^t\psi(t,s,u(s))\mathrm{d}s$，极大数 $M_r=\max\{|f(t,u(t),\Phi u(t),\Psi u(t)|:t\in[0,1],|u|\leqslant r,|\Phi u|\leqslant R_1,|\Psi u|\leqslant R_2\}$（参见文献[13]）.

算子 T 定义为

$$Tu(t) := -\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,u(s),\Phi u(s),\Psi u(s))\mathrm{d}s + \frac{\rho\beta t^{n-2}}{(n-2)!\Gamma(q-n+2)}\int_0^1 [\beta(1-s)+\alpha(q-n+1)](1-s)^{q-n} f(s,u(s),\Phi u(s),\Psi u(s))\mathrm{d}s + \frac{\rho\alpha t^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+2)}\int_0^1 [\beta(1-s)+\alpha(q-n+1)](1-s)^{q-n} f(s,u(s),\Phi u(s),\Psi u(s))\mathrm{d}s$$

引理 6 算子 $T:\bar{\Omega}_r \to E$ 是全连续的.

证明 显然算子 $T:\bar{\Omega}_r \to E$ 是连续的. 一方面,因为 $\bar{\Omega}_r$ 是有界的,有

$$|Tu(t)| \leqslant \frac{M_r}{\Gamma(q+1)}\left[\frac{\rho\beta M_r}{(n-2)!\Gamma(q-n+2)} + \frac{\rho\alpha M_r}{(n-1)!\Gamma(q-n+2)}\right]\left(\alpha + \frac{\beta}{q-n+2}\right) = M_r\left\{\frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{\rho[(n-1)\beta+\alpha][(q-n+2)\alpha+\beta]}{(n-1)!\Gamma(q-n+3)}\right\},$$

则 $T(\bar{\Omega}_r)$是有界的.

另一方面,给定 $\varepsilon > 0$, 对于每个 $u \in \bar{\Omega}_r$, $t_1, t_2 \in [0,1]$, $t_1 < t_2$,有

$$|Tu(t_2) - Tu(t_1)| \leqslant \frac{M_r}{\Gamma(q+1)} |t_2^q - t_1^q| + \frac{M_r\rho[(n-1)\beta+\alpha][(q-n+2)\alpha+\beta]}{(n-1)!\Gamma(q-n+3)}(|t_2^{n-2} - t_1^{n-2}| + |t_2^{n-1} - t_1^{n-1}|).$$

当 $t_1 \to t_2$ 时,有$|Tu(t_2) - Tu(t_1)| < \varepsilon$,故由 Arzela-Ascoli 定理可知,$T:\bar{\Omega}_r \to E$ 是全连续的. 证毕.

为了证明方程(P)的解的存在性,先给出下列条件:

H_1) 假设存在 $L > 0$,满足对所有的 $u, v \in R$,有

$$|f(s,u,\Phi u,\Psi u) - f(s,v,\Phi v,\Psi v)| \leqslant L(|u-v| + |\Phi u - \Phi v| + |\Psi u - \Psi v|);$$

H_2) 函数 $\varphi, \psi : \Delta \times R \to R$ 是连续的,且存在正常数 L_1, L_2,对于所有的 $u, v \in R$,有

$$|\varphi(t,s,u) - \varphi(t,s,v) \leqslant L_1(|u-v|), \qquad |\Psi(t,s,u) - \Psi(t,s,v) \leqslant L_2(|u-v|).$$

定理 1 如果满足条件 H_1)和 H_2)成立,且

$$\left\{\frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{\rho[(n-1)\beta+\alpha][(q-n+2)\alpha+\beta]}{(n-1)!\Gamma(q-n+3)}\right\}(L + LL_1 + LL_2) < 1,$$

则方程(P)在[0,1]上有唯一解.

证明 由引理 2 的证明,显然有 $T: E \to E$. 由于有

$$\| Tu(t) - Tv(t) \| \leqslant \left\{\frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{\rho[(n-1)\beta+\alpha][(q-n+2)\alpha+\beta]}{(n-1)!\Gamma(q-n+3)}\right\}(L + LL_1 + LL_2)\| u - v \|,$$

故 T 是 Banach 空间[0,1]上的压缩映射,所以算子 有唯一不动点,即为方程(P)的唯一解. 证毕

定理 2 假设下列条件成立:

1) 存在非负函数 $p \in [0,1]$,在[0,1]的子区间上 $p > 0$,且存在非减函数 $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$,满足

$$|f(t,u,\Phi u,\Psi u)| \leqslant p(t)\phi(|u|), \qquad (t,u,\Phi u,\Psi u) \in [0,1] \times R \times R \times R.$$

2) $\sup\limits^{r\in(0,\infty)} \dfrac{r}{p_0\phi(r)} > \dfrac{1}{1-l}$ $(0 < l < 1)$,且

$$p_0 = -\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 (1-s)^{q-1} p(s)\mathrm{d}s + \frac{\rho\beta}{(n-2)!\Gamma(q-n+2)}\int_0^1 [\beta(1-s)+\alpha(q-n+1)](1-s)^{q-n} p(s)\mathrm{d}s + \frac{\rho\alpha}{(n-1)!\Gamma(q-n+2)}\int_0^1 [\beta(1-s)+\alpha(q-n+1)](1-s)^{q-n} p(s)\mathrm{d}s.$$

则方程(P)在[0,1]上至少存在一个解.

证明 设存在一个数 r_0,使得 $\sup\limits^{r\in(0,\infty)} \dfrac{r_0}{p_0\phi(r_0)} > \dfrac{1}{1-l}$.

下面验证算子 T 满足引理 4. 一方面,由引理 2 得 $T:\bar{\Omega}_r \to E$ 是全连续的,且 $T(\bar{\Omega}_r)$是有界的. 另一方面,假设结论 C_2)成立,C_1)不会发生,则存在 $\lambda \in (0,1)$, $u \in \partial\Omega_{r_0}$,有 $u = \lambda Tu$. 所以有 $\| u \| = r_0$,且

$$u=\lambda\Big[-\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1(1-s)^{q-1}f(s,u(s),\Phi u(s),\Psi u(s))\mathrm{d}s+$$
$$\frac{\rho\beta}{(n-2)!\,\Gamma(q-n+2)}\int_0^1[\beta(1-s)+\alpha(q-n+1)](1-s)^{q-n}f(s,u(s),\Phi u(s),\Psi u(s))\mathrm{d}s+$$
$$\frac{\rho\alpha}{(n-1)!\,\Gamma(q-n+2)}\int_0^1[\beta(1-s)+\alpha(q-n+1)](1-s)^{q-n}f(s,u(s),\Phi u(s),\Psi u(s))\mathrm{d}s\Big].$$

由定理 2 的条件(1)，(2)，进一步可得

$$r_0=\|u\|\ \frac{\phi(r_0)}{\Gamma(q)}\int_0^1(1-s)^{q-1}p(s)\mathrm{d}s+$$
$$\frac{\rho\beta\phi(r_0)}{(n-2)!\,\Gamma(q-n+2)}\int_0^1[\beta(1-s)+\alpha(q-n+1)](1-s)^{q-n}p(s)\mathrm{d}s+$$
$$\frac{\rho\alpha\phi(r_0)}{(n-1)!\,\Gamma(q-n+2)}\int_0^1[\beta(1-s)+\alpha(q-n+1)](1-s)^{q-n}p(s)\mathrm{d}s\leqslant p_0\phi(r_0)$$

则$\dfrac{r_0}{p_0\phi(r_0)}\leqslant\dfrac{1}{1-l}$，与上述矛盾，故算子 T 满足引理 4 的所有条件，从而 T 至少存在一个不动点，即为方程(P)的解. 证毕.

3　应用例子

例 1　特殊地，令 $n=3$，则 $q\in(2,3]$，考虑如下积分微分方程

$$\left.\begin{aligned}&D_{0^+}^{5/2}u(t)=\frac{t}{20}\frac{|u|}{1+|u|}+\frac{1}{20}\int_0^t\exp\Big(-\frac{1}{8}u(s)\Big)\mathrm{d}s+\frac{1}{20}\int_0^t\exp\Big(-\frac{1}{16}u(s)\Big)\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,1],\\&u(0)=0,\\&\frac{1}{2}u'(0)-\frac{1}{4}u''(0)=0,\\&\frac{1}{4}u'(1)+\frac{1}{2}u''(1)=0.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

对于 $u,v\in R,t\in[0,1]$，有

$$\begin{cases}|f(s,u,\Phi u,\Psi u)-f(s,v,\Phi v,\Psi v)|\leqslant\dfrac{1}{20}(\|u-v\|+|\Phi u-\Phi v|+|\Psi u-\Psi v|),\\|\Phi u-\Psi v|\leqslant\dfrac{1}{8}\|u-v\|,\qquad|\Psi u-\Psi v|\leqslant\dfrac{1}{16}\|u-v\|,\end{cases}$$

则 $L=\dfrac{1}{20}$，$L_1=\dfrac{1}{8}$，$L_2=\dfrac{1}{16}$，$\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\beta=\dfrac{1}{4}$，代入式(6)可得

$$\left\{\frac{1}{\Gamma(q+1)}+\frac{\rho[(n-1)\beta+\alpha][(q-n+2)\alpha+\beta]}{(n-1)!\,\Gamma(q-n+3)}\right\}(L+LL_1+LL_2)=\frac{1\ 672}{33\ 600\sqrt{\pi}}<1,$$

故由定理 1 可知，方程(6)有唯一解.

例 2　仍然令 $n=3$，则 $q\in(2,3]$，考虑如下积分微分方程

$$\left.\begin{aligned}&D_{0^+}^{5/2}u(t)+tu\ \sin u=0,\qquad t\in[0,1],\\&u(0)=0,\\&\frac{1}{4}u'(0)-\frac{1}{2}u''(0)=0,\\&\frac{1}{2}u'(1)+\frac{1}{4}u''(1)=0.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

对于 $u,v\in R,t\in[0,1]$，取 $p(t)=t$，$\phi(t)=u^2$，有

$$|f(t,u)|=|tu^2\sin u|\leqslant tu^2,\qquad(t,u)\in[0,1]\times[0,\infty).$$

于是，满足定理 2 的条件(1)，又由于 $p_0=\dfrac{509}{315\sqrt{\pi}}\approx0.514\ 609$，取 $0<l<1$，$r<\dfrac{315\sqrt{\pi}}{509}(1-l)$，则估计

$$\sup_{r\in(0,\infty)}\frac{r}{p_0\phi(r)}=\sup_{r\in(0,\infty)}\frac{r}{\dfrac{509}{315\sqrt{\pi}}r^2}>\frac{1}{1-l}.$$

由定理2可知:在$0<l<1$,$r<\dfrac{315\sqrt{\pi}}{509}(1-l)$的条件下,方程(7)至少存在一个解.

参考文献:

[1] OLDHAM K B,SPANIER J. The fractional calculus[M]. New York:Academic Press,1974:181-195.

[2] HILFER R. Applications of fractional calculus in physics[M]. Singapore:World Scientific,2000:50-377.

[3] LAKSHMIKANTHAM V,LEELA S,Vasundhara Devi J. Theory of fractional dynamic systems[M]. Cambridge:Cambridge Academic Publishers,2009:5-60.

[4] MA Jun-chi,YANG Jun. Existence of solutions for multi-point boundary value problem of fractional q-differential equation[J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations,2011(92):1-10.

[5] MA Jun-chi,YANG Jun. Existence and uniqueness of solutions for multi-point fractional boundary value problems for nonlinear fractional integro-differential equations[J]. Mathematica Applicata,2011,24(3):575-580.

[6] 杨军,马俊驰,赵硕,等.分数阶微分方程多点分数阶边值问题[J].数学实践与认识,2011,41(11):188-194.

[7] MA J C,YANG J. Positive solutions of the multiple point boundary value problems for nonlinear fractional differential equations[C]//The 2nd International Conference on Multimedia Technology. Hangzhou:IEEE Computer Society,2011:2293-2296.

[8] WANG Xu-huan. Existence of solutions for nonlinear impulsive high order fractional differential equations[J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations,2011(80):1-12.

[9] BAI Zhang-bing,LYU Hai-shen. Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation[J]. J Math Anal Appl,2005,311(2):495-505.

[10] EL-SHAHED M A. Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equations[J]. Abstract and Applied analysis,2007,2007:1-8.

[11] LIANG S H,ZHANG J H. Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation[J]. Nonlinear Analysis,2009,71(11):5545-5550.

[12] LIU X P,JIA M. Multiple solutions for fractional differential equations with nonlinear boundary conditions[J]. Computers and Mathematics with Applications,2010,59(8):2880-2886.

[13] 窦丽霞,刘锡平,金京福,等.分数阶积分微分方程多点边值问题解的存在性和唯一性[J].上海理工大学学报,2011,33(5):51-55.

Existence of Solutions for Boundary Value Problem of Fractional High-Order Differential Equations

YANG Jun[1,2], LIU Dong-li[1]

(1. College of Science, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China;
(2. Mathematics Research Center in Hebei Province, Shijiazhuang 050000, China)

Abstract: The paper mainly studies the existence of solutions for a class of nonlinear fractional higher order differential equation with boundary value problem. By defining a special compression mapping, and using Banach fixed point theorem and Leray-Shauder nonlinear decision theorem, we obtain the sufficient conditions of unique solution and at least one solution for the considered equations. Finally, examples are given to verify the main results respectively.

Keywords: fractional order; differential equations; high-order; boundary value problem; fixed point theorems

(**责任编辑:** 陈志贤 **英文审校:** 黄心中)