第 34 卷　第 6 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 34　No. 6
2013 年 11 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Nov. 2013

文章编号: 1000-5013(2013)06-0710-06　　**doi:** 10.11830/ISSN.1000-5013.2013.06.0710

均值-绝对离差投资组合修正模型

康志林

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 针对投资者对不同收益率资产的偏好,通过引入收益权值系数,直接对各证券的收益离差进行非对称影响分析,重构均值-绝对离差(MAD)投资组合模型,并将模型转换为线性规划.最后,利用 LINGO 软件对修正 MAD 模型进行分析,提供投资者更多样化之投资组合选择.

关键词: 绝对离差; 收益权值; 基数约束; 有效前沿

中图分类号: O 221; F 831.5; O 213　　**文献标志码:** A

在不确定的金融市场中,由于各种金融产品收益与风险的差异,因此,如何在兼顾收益与风险下对产品进行组合选择,也就成为投资组合的重要问题. Markowitz[1-2] 于 1952 提出了投资组合的均值-方差模型(MV 模型),该模型是金融投资定量化研究的开端,也是金融投资决策实践的重要工具.然而,Markowitz 的均值-方差模型在应用上有很大的局限性.为了适应实际投资的需要,大部分学者通过以下 4 个方面来研究投资组合:对模型、输入的数据量进行简化;从不同角度去寻求不同的风险度量[3-4];考虑更为切合市场需要的投资约束,如交易费用、基数约束等;将投资组合问题单阶段问题拓展到多阶段模型[5]. Konno 等[3]进一步给出了投资组合均值-绝对离差模型,即 MAD 模型.此后,许多学者在此基础上,将凹交易费用[6]、固定交易费用[7-8]、分段常数、线性交易费用[9]考虑到模型中.本文通过引入权值系数,直接对各证券的收益离差进行非对称影响分析,对 Konno 等[3]提出的均值-绝对离差投资组合模型(MAD 模型)进行合理修正.

1　市场投资的约束

假定市场上有 n 个风险资产 $S_j(j=1,2,\cdots,n)$,投资者在期初拥有的初始财富为 M_0,投资在第 j 种风险资产 S_j 的资金为 x_j,允许投资者投资在资产 S_j 上的最小、最大金额分别为 l_j,u_j,且投资过程中不允许卖空,即 $x_j\geqslant 0$.另令资产 $S_j(j=1,2,\cdots,n)$的收益率为随机变量 R_j,期望收益率记为 r_j,即有 $r_j=E(R_j)$.

1.1　组合绝对偏差 $d_P(x)$ 及 l_1 风险函数

l_1 绝对偏差风险函数刻画的是实际组合收益 $R_P(x)$偏离平均组合收益 $r_P(x)$的程度.设某个证券组合为 P,该组合绝对偏差 $d_P(x)$为

$$d_p(x)=|R_p(x)-r_p(x)|=|\sum_{j=1}^{n}R_jx_j-\sum_{j=1}^{n}r_jx_j|. \tag{1}$$

由此,l_1 绝对偏差风险函数可定义为

$$W(x)=E[d_p(x)]=E[|R_p(x)-r_p(x)|]=E[|\sum_{j=1}^{n}R_jx_j-\sum_{j=1}^{n}r_jx_j|]. \tag{2}$$

设 $r_{j,t}$为证券 j 在情形 $t(t=1,2,\cdots,T)$的收益率,T 为情形数.假定随机变量$(R_1,R_2,\cdots,R_n)$在有

收稿日期: 2012-06-19
通信作者: 康志林(1982-),男,讲师,主要从事半定规划理论算法、投资组合优化的研究. E-mail: zhilin_kang@yahoo.com.cn.
基金项目: 中央高校基本科研业务费资助项目(11HZR16)

限点集$(r_{1,t},r_{2,t},\cdots,r_{n,t})(t=1,2,\cdots,T)$上的分布率为

$$p_t = \Pr\{(R_1,R_2,\cdots,R_n)=(r_{1,t},r_{2,t},\cdots,r_{n,t})\},\qquad t=1,2,\cdots,T,$$

则绝对偏差风险函数为

$$W(x)=\sum_{t=1}^{T}p_t d_{p,t}(x)=\sum_{t=1}^{T}p_t\left|\sum_{j=1}^{n}(r_{j,t}-r_j)x_j\right|. \tag{3}$$

1.2 金融交易规则

为了保证金融市场交易的顺利进行，各金融实体都对金融交易拟定一些规则，以下给出了 5 种金融交易细则，并在后续部分有选择地加以考虑.

1）卖空限制. 这个假设意味着不得对于投资组合中的投资标的进行融券卖空之行为，即当投资者看跌某支股票价格时，不能从经济人手中借入该股票卖出. 其数学表达式为

$$x_j \geqslant 0. \tag{4}$$

2）投资门槛. 为了更好地保证证券交易市场的运行，对投资者一般都会设定相应投资门槛. 设在交易过程中，允许资产 S_j 的最小，最大交易量分别为 l_j,u_j，则有

$$x_j=0 \quad 或 \quad l_j\leqslant x_j\leqslant u_j. \tag{5}$$

3）基数限制. 为便于投资管理和控制交易成本，投资者希望在投资过程中对拟投资的资产支数有所限制，不妨设最大支数为 K，有

$$\|x\|_0\leqslant K. \tag{6}$$

式(6)中：$\|x\|_0$ 为 l_0 范数，表示 $x\in\mathbf{R}^n$ 中非零元素的个数.

4）最小交易单位(MTU). 在证券交易中，通过竞价交易的股票申报数量应该为 100 股或者是其整数倍. 设最小交易单位为 γ_j，则 有

$$x_j=\eta_j\gamma_j,\qquad \eta_j\in\mathbf{Z}_+. \tag{7}$$

5）交易费用. 在投资组合管理中，为了实现既定的投资目标，投资组合管理者需要根据市场条件变化，不断调整现有的资产组合——买入、卖出证券，由此导致了交易费用的产生. 通常，对实际交易成本的描述具有复杂的数学形式，最常见的有固定交易费用及线性交易费用. 设 k_j,h_j 为资产 S_j 的单位交易费用率及固定交易费用成本，则

$$c_j(x_j)=k_jx_j+h_j. \tag{8}$$

2 修正的 MAD 模型

证券市场中，任意投资组合 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 的期望收益为

$$r(x)=\sum_{j=1}^{n}r_jx_j. \tag{9}$$

式(9)中：$r_j=E(R_j)=\sum_{t=1}^{T}p_tr_{j,t}$.

一般地，常用函数

$$W(x)=E\left[\left|\sum_{j=1}^{n}R_jx_j-\sum_{j=1}^{n}r_jx_j\right|\right]=\sum_{t=1}^{T}p_t\left|\sum_{j=1}^{n}(r_{j,t}-r_j)x_j\right| \tag{10}$$

作为投资组合的风险度量. 但是，针对现实世界中人们对收益率高的资产的偏好心理，在关注组合风险的同时，投资者对不同收益率的个体资产风险也会加以区分，直接对各证券的收益离差进行非对称影响考虑. 即对收益率更高的资产给予比该资产原离差更大权值的风险度量，通过引入权值 $\omega_j(\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1)$ 对目标 $W(x)$进行修正. 首先对资产收益率进行排序，即 $r_1\leqslant r_2\leqslant\cdots\leqslant r_n$，并根据 n 个资产收益率顺序，取权值为

$$w_j=\frac{r_j}{\sum_{j=1}^{n}r_j},\qquad j=1,2,\cdots,n. \tag{11}$$

容易发现，收益率权益因子 $\omega_1\leqslant\cdots\leqslant\omega_n$，意味着目标函数中实际收益与平均收益离差为

$$a_{j,t}=r_{j,t}-r_j.$$

因此,收益率低的证券对风险的影响较小,即更多地考虑收益率高的证券离差对风险的影响.

由此,提出在一般投资约束条件下修正的均值-绝对离差模型(M-MAD 模型),即

$$\min\sum_{t=1}^{T}p_t\left|\sum_{j=1}^{n}\omega_j(r_{j,t}-r_j)x_j\right|,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}r_jx_j\geqslant\delta M_0,\\ \sum_{j=1}^{n}x_j=M_0, \qquad x\in H.\end{cases}$$

模型中:δ 为预定收益率;H 为拟考虑的市场投资组合约束集.

不同于均值-方差模型,由于目标函数是分段线性凸函数,因此,可借助线性规划对投资优化进程进行快速有效地求解.

为了求解修正后的均值-绝对离差(M-MAD)模型,引入非负变量 $u_t\geqslant0$,$v_t\geqslant0$,$t=1,2,\cdots,T$,使得

$$u_t-v_t=p_t\sum_{j=1}^{n}\omega_j(r_{j,t}-r_j)x_j,\qquad t=1,2,\cdots,T,\tag{12}$$

$$\left|p_t\sum_{j=1}^{n}\omega_j(r_{j,t}-r_j)x_j\right|=u_t+v_t,\qquad t=1,2,\cdots,T,\tag{13}$$

则 M-MAD 模型可转化为如下等价线性规划,即

$$\min\sum_{t=1}^{T}(u_t+v_t),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}u_t-v_t=p_t\sum_{j=1}^{n}\omega_j(r_{j,t}-r_j)x_j, & t=1,2,\cdots,T,\\ u_t,v_t\geqslant0, & t=1,2,\cdots,T,\\ \sum_{j=1}^{n}r_jx_j\geqslant\delta M_0, & x\in H,\\ \sum_{j=1}^{n}x_j=M_0.\end{cases}$$

显然,当 $H=\phi$ 时,该模型比 M-MAD 模型增加了 $2T$ 个连续变量(u_t,v_t),有 $T+2$ 个辅助约束,$2T$ 个辅助符号约束,即 $u_t\geqslant0$,$v_t\geqslant0$.

3 实例分析

选取美国的 IBM(IBM),Microsoft(MFST),Apple(AAPL),Quest Diagnostics(DGX),Bank of America(BAC)5 支股票进行分析,样本期间为 2002 年 3 月 1 日到 2007 年 2 月 1 日,即 $n=5$,$T=59$.依据历史股票资料,计算各支股票的月期望收率 ,即

$$r_j=E(R_j)=(1/T)\sum_{t=1}^{T}r_{j,t},\qquad p_t=1/T;\quad t=1,2,\cdots,T.$$

为了便于分析,假定拟投资的资产总额 $M_0=1$,并将期望收益 $r_j(j=1,2,3,4,5)$从小到大进行排序,即 IBM,BAC,MFST,DGX,AAPL.通过市场数据,进一步分析研究收益权值 ω_j 对投资的影响,为投资者在实际投资过程中提供更多样化的投资组合选择.为了衡量金融资产的绩效表现,常用公式

$$\text{投资组合绩效}=\text{收益}/\text{风险}.\tag{14}$$

即通过计算投资组合每承受一单位总风险,所产生的报酬收益,来计算投资组合绩效.该比率越高,投资组合则越佳.

3.1 有无差异权值 ω_j 的异同

考虑 $H=\{x|x\geqslant0\}$,即在投资交易过程中资产 $S_j(j=1,\cdots,n)$是不允许卖空的,则

$$\min\sum_{t=1}^{T}(u_t+v_t),$$

$$
\text{s. t.}\begin{cases}
u_t - v_t = (1/T)\sum_{j=1}^{n}\omega_j(r_{j,t}-r_j)x_j, & t=1,2,\cdots,T,\\
u_t, v_t \geqslant 0, & t=1,2,\cdots,T,\\
\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geqslant \delta M_0, & \\
\sum_{j=1}^{n} x_j = M_0, & x_j \geqslant 0;\quad j=1,\cdots,n.
\end{cases}
$$

为了便于分析比较风险测量与投资表现，在无差异权值时，选取 $\omega_j=1/n, j=1,2,\cdots,n$，在有差异权值时，选取 $\omega_j = r_j/\sum_{j=1}^{n} r_j$，$j=1,2,\cdots,n$，$\delta=(1/n)\sum_{j=1}^{n} r_j$. 通过 LINGO 编程，可得组合投资比例分配，如表 1 所示.

表 1　有无差异权值投资比例

Tab. 1　Efficient portfolios with different weights

公司	无差异权值	有差异权值
IBM	0.124 647 9	0
BAC	0.249 174 7	0.410 517 7
MFST	0.262 247 9	0.180 474 7
DGX	0.186 762 7	0.256 049 6
AAPL	0.177 166 8	0.152 958 0

从表 1 可以看出：在无差异权值下，除了收益率较小的 IBM 投资比例稍小之外，在其他公司的比例分配上相对比较均匀；而在有差异权值下，将资金主要分配在 BAC，MFST，GDX，AAPL 4 支股票上，收益率相对较低的 IBM 的投资比例为 0.

表 2 为投资绩效，从表 2 可以看出：同等情况下有差异权值具有更好的稳健性.

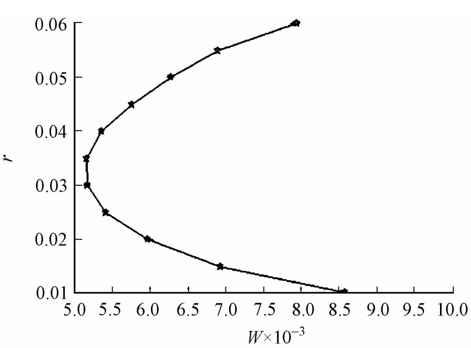
表 2　有无差异权值组合绩效表现

Tab. 2　Portfolio performance of (in) different weights

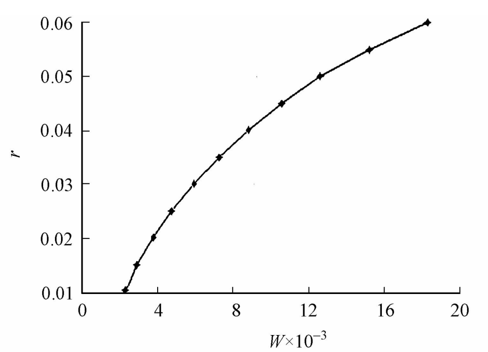
收益	无差异权值		有差异权值	
	风险	组合绩效	风险	组合绩效
0.010	0.008 629	1.158 882	0.002 344	4.266 211
0.020	0.005 964	3.353 454	0.003 756	5.324 813
0.025	0.005 409	4.621 926	0.004 742	5.272 037
0.030	0.005 168	5.804 953	0.005 925	5.063 291
0.040	0.005 356	7.468 259	0.008 819	4.535 661

3.2　有无差异权值 $\boldsymbol{\omega}_j$ 的有效前沿

为考察有无差异权值对目标函数的影响，分别对无差异权值和有差异权值的情形进行分析，得到它们的有效前沿并加以比较. 沿用 M-MAD 模型及相关 LINGO 代码，将约束条件 $\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geqslant \delta M_0$ 改为 $\sum_{j=1}^{n} r_j x_j = \delta M_0$，并且让预定收益率 δ 在 0.01～0.06 之间取值，可得无差异权值与有差异权值 MAD 模型有效前沿，如图 1 所示.



(a) 无差异权值



(b) 有差异权值

图 1　有效前沿

Fig. 1　Efficient frontier

从图1中可以发现:无差异权值情形下有效前沿是抛物形态线,与有差异权值情形下投资组合有效前沿有较大的异同,有差异权值情形下投资组合有效前沿具有较好的性态. 图1(a)中显示了无差异权值下风险资产的有效边界——全局最小风险以上的边界,最小风险边界的下半部分是无效的. 因为对于所有低于最小风险以下边界部分的投资组合,都可以在相应的风险上找到期望收益更大的投资组合. 图1(b)中的曲线是投资组合有效边界,该曲线表明沿着曲线向上移动,有效边界的曲线斜率越来越低,这意味着有效边界向上移动,同等程度的风险增加所带来的收益率增加趋于递减.

3.3 基数约束下投资组合

对基数约束 $\|x\|_0 \leqslant K$,K 为拟投资的资产个数,通过引入二元变量

$$z_j = \begin{cases} 1, & \text{购买资产 } S_j, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则约束 $\|x\|_0 \leqslant K$ 可转化为 $\sum_{j=1}^{n} z_j \leqslant K$. 为了便于考虑基数个数对投资组合策略以及投资组合风险的影响,考虑等式约束 $\|x\|_0 = K$,即 $\sum_{j=1}^{n} z_j = K$. 在此基础上,进一步考虑证券交易市场中每支股票的投资门槛限制,即 $l_j \leqslant x_j \leqslant u_j$. 可以得到带基数约束条件修正的 MAD 投资组合模型为

$$\min \sum_{t=1}^{T} (u_t + v_t),$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} u_t - v_t = (1/T) \sum_{j=1}^{n} \omega_j (r_{j,t} - r_j) x_j, & t = 1,2,\cdots,T, \\ u_t, v_t \geqslant 0, & t = 1,2,\cdots,T, \\ \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geqslant \delta M_0, & \\ \sum_{j=1}^{n} x_j = M_0, & x_j \geqslant 0;\quad j = 1,\cdots,n, \\ \sum_{j=1}^{n} z_j = K, & z_j \in \{0,1\};\quad j = 1,\cdots,n, \\ l_j z_j \leqslant x_j \leqslant u_j z_j, & j = 1,\cdots,n. \end{cases}$$

根据5个资产的预期收益率和该模型的约束条件,取 $l_j = 0.01$,$u_j = 1$,即 $0.01 \leqslant x_j \leqslant 1$. 对 K 分别从1到5取值,不同基数下的风险值如图2所示. 从图2可以看出:随着基数 K 的增大,选择多样性的增加,组合投资风险值会越来越小. 这说明投资多样化之后,分散风险能力明显增强.

因此,一个保守的投资者在限制投资总额的情况下,想要维持无基数限制下的期望报酬和风险时,可将基数限制设定为较大的数值;反之,一个风险爱好的投资者,在不允许卖空,且限制投资标的总额的条件下,可借由设定较低基数限制,提高投资组合的收益.

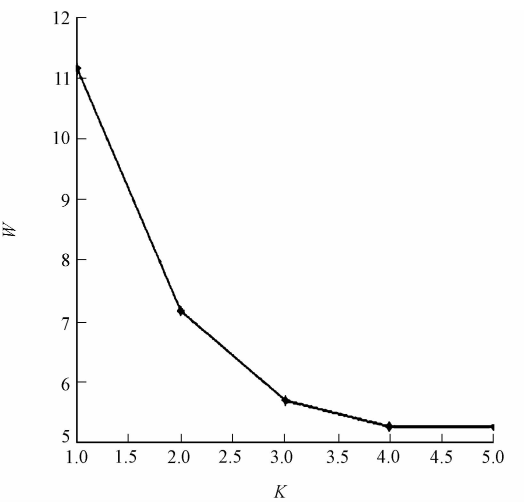


图2 不同基数下风险值

Fig. 2 Risk values under different cardinality constraint

3 结论

直接对各证券的收益离差进行非对称影响考虑,通过引入收益权值,对 MAD 模型进行修正. 借助 LINGO 软件,利用实际证券市场交易数据,分析比较有无差异权值对资产投资的影响.

给出了它们的有效前沿,并考察了风险函数与基数约束的关系. 从投资绩效及组合有效前沿结果分

析可以发现：在同等情况下，有差异权值投资模型具有更好的稳健性，有效前沿具有较好的性态；基数限制设定较大时，可以降低投资组合风险，保守的投资者可以通过对基数的设定来降低组合风险.

参考文献：

[1] MARKOWITZ H M. Portfolio selectiom[J]. Journal of Finance,1952,7(1):77-91.

[2] MARKOWITZ H M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment[M]. New York: Wiley,1959:37-101.

[3] KONNO H,YAMAZAKI H. Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market[J]. Management Science,1991,37(5):519-529.

[4] CAI X Q,TEO K L,YANG X Q,et al. Portfolio optimization under minimax rule[J]. Management Science,2000,46(7):957-972.

[5] LI DUAN,NG W L. Optimal dynamic portfolio selection: Multiperiod mean-variance formulation[J]. Mathematical Finance,2000,10(3):387-406.

[6] KONNO H,WIJAYANAYAKE A. Mean-absolute deviation portfolio optimization model under transaction costs [J]. Journal of the Operations Research (Society of Japan),1999,42(4):422-435.

[7] KELLERER H,MANSINI R,SPERANZA M G. Selecting portfolios with fixed costs and minimum transaction lots [J]. Annals of Operations Research,2000,99(1/2/3/4):287-304.

[8] KIM J S,KIM Y C,SHIN K Y. An algorithm for portfolio optimization problem[J]. Informatica TICA,2005,16(1):93-106.

[9] KONNO H,YAMAMOTO R. Global optimization versus integer programming in portfolio optimization under non-convex transaction costs[J]. Journal of Global optimization,2005,32(2):207-219.

A Portfolio Choice Model Based on the Modified Mean-Absolute Deviation

KANG Zhi-lin

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: This paper presents a portfolio choice model based on mean-absolute deviation under the different market investment constraint. Considering the investor's preference for the rate of return of assets, we develop the modified mean-absolute deviation (MAD) model through the introduction of the income weights and transform it into a linear programming. Finally, we propose alternative choices to the decision makers by the analysis of modified MAD model through LINGO software.

Keywords: mean-absolute deviation; income weights; cardinality constraint; efficient frontier

（**责任编辑**：陈志贤　　**英文审校**：黄心中）