第 34 卷　第 6 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 34　No. 6
2013 年 11 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Nov. 2013

文章编号:1000-5013(2013)06-0701-05　　**doi:**10.11830/ISSN.1000-5013.2013.06.0701

一类单位圆盘上单叶调和映照的延拓定理

潘旭玲,黄心中

(华侨大学 数学科学学院,福建 泉州 362021)

摘要: 研究单位圆盘 $D=\{z \mid |z|<1\}$ 上调和映照类 $S_{HK}(m,n,\alpha,\beta)$ 的调和延拓与调和拟共形延拓问题,具体给出该类映照到单位圆盘外的单叶保向调和延拓;除 $n=0$ 以外,同时给出该类映照的调和拟共形延拓. 作为整个平面上的拟共形映照,最后给出了最大伸缩商估计.

关键词: 单叶调和映照;拟共形映照;调和拟共形延拓;最大伸缩商

中图分类号: O 174.55　　**文献标志码:** A

1　预备知识

研究单位圆盘 $D=\{z \mid |z|<1\}$ 上共形映照可以拟共形延拓到整个复平面上的问题,引起了许多学者的兴趣[1-4]. Ahlfors 等[2]证明了,如果 $f(z)$ 为单位圆盘 $D=\{z \mid |z|<1\}$ 上局部单叶的亚纯函数,令 $S_f(z)=(f''/f')'-\frac{1}{2}(f''/f')^2$ 为 $f(z)$ 在 D 上的 Schwarz 导数,若 $|S_f(z)|\leqslant 2k/(1-|z|^2)^2$,$0\leqslant k<1$,则 $f(z)$ 在 D 上单叶且可以拟共形延拓到整个复平面.

另一方面,Reich 研究了单位圆盘外 $D^c=\{z \mid |z|>1\}$ 的共形映照到单位圆盘内的调和拟共形延拓问题[5],证明若 $f(t,z)=z+tw(\frac{1}{z})$ 在 D^c 上单叶解析,其中 $w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$,满足 $M=\sup_{z\in D}|w'(z)|<\infty$,$0\leqslant t<1/M$,则 $f(t,z)$ 具有到单位圆盘内的调和拟共形延拓,令 $k^*(t)$ 为 $f(t,z)$ 对应的拟共形延拓的最大伸缩商,则当 $t\to 0$ 时,$k^*(t)\leqslant \frac{t}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)|a_n|+o(t)$.

以上说明,对于给定单连通区域 Ω 上的单叶解析函数,研究何时具有到其余区域 Ω^c 上的拟共形延拓是个重要的问题.

1984 年,Clunie 与 Shell-Small[6]研究了单叶调和映照,得到很多类似单叶解析函数的重要结果,也有一些是单叶调和映照类本身的特征,使得对单叶调和映照类的特征刻画的研究成为一个热点[6-10]. 基于此,对于定义在单位圆盘 D 上的单叶调和映照 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$,其中 h 和 g 在 D 上为解析函数,研究调和拟共形延拓到整个复平面上的条件是十分有意义的工作.

令 S_H 表示定义在单位圆盘 $D=\{z \mid |z|<1\}$ 上且满足 $f(0)=f_z(0)-1=0$ 的单叶保向调和映照类. 若 $f(z)\in S_H$,则有 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$,其中解析函数 h 和 g 可表示为

$$\left.\begin{aligned} h(z) &= z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k, \\ g(z) &= \sum_{k=1}^{\infty}b_k z^k. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式(1)中:$|b_1|<1$,$z\in D$.

对于单位圆盘 D 上的调和映照 f,刻画 f 的单叶性、调和拟共形性的方法有:利用级数展开,在系

收稿日期: 2012-09-29
通信作者: 黄心中(1957-),男,教授,主要从事函数论的研究. E-mail:huangxz@hqu.edu.cn.
基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(2011J0101)

数满足一定条件下的刻画;对调和映照 f 的边界特征刻画,以及对调和映照 f 的像区域特征刻画等. 文献[7]证明了映照类 $S_{\mathrm{H}}(m,n,\alpha,\beta)$的单叶性问题.

本文引入 $S_{\mathrm{H}}(m,n,\alpha,\beta)$的子类 $S_{\mathrm{HK}}(m,n,\alpha,\beta)$. $f=h+\bar{g}\in S_{\mathrm{HK}}(m,n,\alpha,\beta)$具有式(1)的形式,且满足如下的条件不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}([(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n]\mid a_k\mid+[(1+\beta)k^m-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n]\mid b_k\mid)\leqslant 2(1-\alpha), \quad (2)$$

式(2)中:$0\leqslant\alpha<1$,$\beta\geqslant 0$,$m\in N^{+}$,$n\in N$,$m>n$,研究如何刻画该类映照在单位圆盘外的调和延拓与调和拟共形延拓问题,给出具体的延拓表征,并对全平面上的拟共形映照的最大伸缩商给出估计.

2 主要结果及其证明

定理 1 设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}\in S_{\mathrm{HK}}(m,n,\alpha,\beta)$,令

$$H_f(z)=\begin{cases} f(z), & \mid z\mid\leqslant 1, \\ \hat{f}(z), & \mid z\mid>1, \end{cases}$$

$$\hat{f}(z)=H(z)+\overline{G(z)}.$$

其中 $H(z)=z+\sum_{k=1}^{\infty}\bar{b}_k\dfrac{1}{z^k}$,$G(z)=\sum_{k=2}^{\infty}\bar{a}_k\dfrac{1}{z^k}$,则 $H_f(z)$是 $f(z)$从单位圆盘 D 到单位圆盘外 D^c 上的单叶保向调和延拓,且 $H(z)$在 D^c 上单叶.

证明 由 $h(z)$,$g(z)$在 D 内的解析性容易得出 $H(z)$,$G(z)$在 D^c 上解析,故 $\hat{f}(z)$在 D^c 上为调和映照. 由已知 $f(z)\in S_{\mathrm{HK}}(m,n,\alpha,\beta)$,可知 $f(z)$在 D 上单叶.

下面证明 $\hat{f}(z)$ 在$|z|>1$ 上的单叶性.

对于任意的 $z_1,z_2\in D^c$,$z_1\neq z_2$,注意到$|z_1|$,$|z_2|>1$,则有

$$\begin{aligned}\mid\hat{f}(z_1)-\hat{f}(z_2)\mid=&\mid H(z_1)-H(z_2)+\overline{G(z_1)-G(z_2)}\mid= \\ &\mid z_1-z_2+\sum_{k=2}^{\infty}a_k(\bar{z}_1^{-k}-\bar{z}_2^{-k})+\sum_{k=1}^{\infty}\bar{b}_k(\bar{z}_1^{-k}-\bar{z}_2^{-k})\mid> \\ &\mid z_1-z_2\mid[1-(\sum_{k=2}^{\infty}k\mid a_k\mid+\sum_{k=1}^{\infty}k\mid\bar{b}_k\mid)].\end{aligned}$$

由式(2)可以证明

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty}k\mid a_k\mid+\sum_{k=1}^{\infty}k\mid\bar{b}_k\mid\leqslant&\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n]}{1-\alpha}\mid a_k\mid+ \\ &\frac{\sum_{k=1}[(1+\beta)k^m-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n]}{1-\alpha}\mid b_k\mid\leqslant 1.\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}\mid\hat{f}(z_1)-\hat{f}(z_2)\mid>&\mid z_1-z_2\mid[1-(\sum_{k=2}^{\infty}k\mid a_k\mid+\sum_{k=1}^{\infty}k\mid b_k\mid)]\geqslant \\ &\mid z_1-z_2\mid[1-(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n]}{1-\alpha}\mid a_k\mid+ \\ &\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(1+\beta)k^m-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n]}{1-\alpha}\mid b_k\mid)]\geqslant 0.\end{aligned}$$

即 $\hat{f}(z)$在 D^c 上单叶.

对任何$|z|>1$,有

$$\left|\frac{G'(z)}{H'(z)}\right|=\left|\frac{\sum_{k=2}^{\infty}k\bar{a}_k z^{-k-1}}{1-\sum_{k=1}^{\infty}k\bar{b}_k z^{-k-1}}\right|<\frac{\sum_{k=2}^{\infty}k\mid\bar{a}_k\mid}{1-\sum_{k=1}^{\infty}k\mid\bar{b}_k\mid\mid z^{-k-1}\mid}\leqslant$$

$$\frac{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n]}{1-\alpha}|a_k|}{1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(1+\beta)k^m-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n]}{1-\alpha}|b_k||z^{-k-1}|}.$$

由式(2)可以证明

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(1+\beta)k^m-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n]}{1-\alpha}|b_k||z^{-k-1}|\leqslant$$
$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n]}{1-\alpha}|a_k|+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(1+\beta)k^m-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n]}{1-\alpha}|b_k||z^{-k-1}|<1.$$

故有

$$\left|\frac{G'(z)}{H'(z)}\right|<\frac{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n]}{1-\alpha}|a_k|}{1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[(1+\beta)k^m-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n]}{1-\alpha}|b_k||z^{-k-1}|}<1,$$

从而 $\hat{f}(z)$在 D^c 上保向.

令 $z=\exp(\mathrm{i}\theta)$，$0\leqslant\theta<2\pi$,因有

$$f(\exp(\mathrm{i}\theta))=\exp(\mathrm{i}\theta)+\sum_{k=2}^{\infty}a_k\exp(\mathrm{i}k\theta)+\overline{\sum_{k=1}^{\infty}b_k\exp(\mathrm{i}k\theta)},$$

$$\hat{f}(z)=\exp(\mathrm{i}\theta)+\sum_{k=1}^{\infty}\bar{b}_k\exp(-\mathrm{i}k\theta)+\overline{\sum_{k=2}^{\infty}\bar{a}_k\exp(-\mathrm{i}k\theta)},$$

即有

$$f(\exp(\mathrm{i}\theta))\equiv\hat{f}(\exp(\mathrm{i}\theta)).$$

故 $H_f(z)$ 是 $f(z)$到 D^c 上的延拓.

下面证明 $H(z)$的单叶性. 对于任意的 $z_1,z_2\in D^c$，$z_1\neq z_2$，有

$$|H(z_1)-H(z_2)|=|z_1-z_2+\sum_{k=1}^{\infty}\bar{b}_k(z_1^{-k}-z_2^{-k})|>$$
$$|z_1-z_2|(1-\sum_{k=1}^{\infty}k|b_k|)>$$
$$|z_1-z_2|[1-(\sum_{k=2}^{\infty}k|a_k|+\sum_{k=1}^{\infty}k|\bar{b}_k|)]\geqslant 0.$$

故 $H(z)$在 D^c 上单叶. 定理 1 证毕.

推论 1　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}\in S_{\mathrm{HK}}(m,n,\alpha,\beta)$，令 $H_f(z)=\begin{cases}f(z),|z|\leqslant 1,\\ \hat{f}(z),|z|>1.\end{cases}$

ⅰ）当 $a_k=0$，$k=2,3,\cdots$时，$f(z)=z+\overline{g(z)}$，$\hat{f}(z)=z+\sum_{k=1}^{\infty}\bar{b}_k\frac{1}{\bar{z}^k}$，则 $H_f(z)$ 是 $f(z)$ 从单位圆盘 D 到单位圆盘外 D^c 上的单叶解析延拓.

ⅱ）当 $b_k=0$，$k=1,2,\cdots$ 时，$f(z)=h(z)$，$\hat{f}(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k\frac{1}{\bar{z}^k}$，则 $H_f(z)$是 $f(z)$从单位圆盘 D 到单位圆盘外 D^c 上的单叶保向调和延拓.

注意到在 $S_{\mathrm{HK}}(m,n,\alpha,\beta)$类中，当 $n=0$ 时，存在 $k(z)=z+1/2\bar{z}^2$，$k_{\bar{z}}(z)/k_z(z)=\bar{z}$，故 $k(z)$ 不能延拓成整个平面上的调和拟共形映照.

应用定理 1 可以证明如下的定理 2.

定理 2　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}\in S_{\mathrm{HK}}(m,n,\alpha,\beta)$，$n\geqslant 1$，令

$$H_f(z)=\begin{cases}f(z), & |z|\leqslant 1,\\ \hat{f}(z), & |z|>1.\end{cases}$$

其中：$\hat{f}(z)=H(z)+\overline{G(z)}=z+\sum_{k=1}^{\infty}\bar{b}_k\frac{1}{z^k}+\overline{\sum_{k=2}^{\infty}\bar{a}_k\frac{1}{z^k}}$. 则 $H_f(z)$是 $f(z)$从单位圆盘 D 到单位圆盘外 D^c 上的调和拟共形延拓，且 $H_f(z)$是整个复平面上的拟共形映照，其最大伸缩商为

$$\|\mu_{H_f}(z)\|_\infty\leqslant\max\{\gamma/(1-\gamma),\gamma+(1-\gamma)\mid b_1\mid\}.$$

其中：$\gamma=(1-\alpha)/[(1+\beta)2^{m-1}-(\alpha+\beta)2^{n-1}]$.

证明　先证 $f(z)$在 D 内为调和拟共形映照. 由于 $f\in S_H$，故 f 具有单叶性. 令 $\gamma=(1-\alpha)/[(1+\beta)2^{m-1}-(\alpha+\beta)2^{n-1}]$. 由于 $m>n\geqslant1$，从而有

$$0<\gamma=(1-\alpha)/[(1+\beta)2^{m-1}-(\alpha+\beta)2^{n-1}]=$$
$$(1-\alpha)/\{2^{m-1}[(1+\beta)-(\alpha+\beta)2^{-(m-1)}]\}\leqslant1/2^{m-1}\leqslant1/2.$$

当 $k\geqslant2$ 时，有

$$k\leqslant\gamma\frac{(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha},$$
$$k\leqslant\gamma\frac{(1+\beta)k^m-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}.$$

由式(2)可得

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}\mid a_k\mid\leqslant1,$$

从而可以推出，当 $n\geqslant1$ 时，有

$$0<1-\gamma\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}\mid a_k\mid<1.$$

$$\mid\mu_f(z)\mid=\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right|\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{\infty}k\mid b_k\mid}{1-\sum_{k=2}^{\infty}k\mid a_k\mid}\leqslant$$

$$\frac{\mid b_1\mid+\sum_{k=2}^{\infty}\gamma\frac{(1+\beta)k^m-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}\mid b_k\mid}{1-\sum_{k=2}^{\infty}\gamma\frac{(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}\mid a_k\mid}\leqslant$$

$$\frac{\mid b_1\mid+\gamma(1-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}\mid a_k\mid-\mid b_1\mid)}{1-\sum_{k=2}^{\infty}\gamma\frac{(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}\mid a_k\mid}\leqslant$$

$$1-\frac{(1-\gamma)(1-\mid b_1\mid)}{1-\gamma\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}\mid a_k\mid}\leqslant$$

$$1-(1-\gamma)(1-\mid b_1\mid)\leqslant\gamma+(1-\gamma)\mid b_1\mid<\gamma+1-\gamma=1.$$

从而 $f(z)$为 D 上的调和拟共形映照.

由定理 1，可得 $f(\exp(\mathrm{i}\theta))\equiv\hat{f}(\exp(\mathrm{i}\theta))$，$0\leqslant\theta<2\pi$. 由定理 1 知，$\hat{f}(z)$在 D^c 上单叶保向. 又因为

$$\mid\mu_{\hat{f}}(z)\mid=\left|\frac{G'(z)}{H'(z)}\right|=\left|\frac{\sum_{k=2}^{\infty}k\bar{a}_kz^{-k-1}}{1-\sum_{k=1}^{\infty}k\bar{b}_kz^{-k-1}}\right|<\frac{\sum_{k=2}^{\infty}k\mid\bar{a}_k\mid}{1-\sum_{k=1}^{\infty}k\mid\bar{b}_k\mid}\leqslant$$

$$\frac{\gamma\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n]}{1-\alpha}\mid a_k\mid}{1-\mid b_1\mid-\gamma\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[(1+\beta)k^m-(-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n]}{1-\alpha}\mid b_k\mid}\leqslant$$

$$\frac{\gamma\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n]}{1-\alpha}\mid a_k\mid}{1-\mid b_1\mid-\gamma(1-\mid b_1\mid-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[(1+\beta)k^m-(\alpha+\beta)k^n]}{1-\alpha}\mid a_k\mid)}\leqslant$$

$$\frac{\gamma(1-\mid b_1\mid)}{(1-\gamma)(1-\mid b_1\mid)}=\frac{\gamma}{1-\gamma}<1.$$

从而 $\hat{f}(z)$在 D^c 上为调和拟共形映照.

由拟共形映照理论,可知 $H_f(z)$是整个复平面上的拟共形映照,且最大伸缩商满足

$$\|\mu_{H_f}(z)\|_\infty\leqslant\max\{\gamma/(1-\gamma),\gamma+(1-\gamma)\mid b_1\mid\}.$$

定理 2 说明,在 $S_{\mathrm{HK}}(m,n,\alpha,\beta)$类中较好地解决了该类映照到单位圆盘外的调和拟共形延拓问题.

参考文献:

[1] AHLFORS L. Lectures on quasiconformal mappings[M]. Providence: American Mathematical Society,2006.

[2] AHLFORS L,WEILL G. A uniqueness theorem for Beeltrami equations[J]. Proc Amer Math Soc,1962,13(6):975-978.

[3] 杨宗信,陈纪修. Nehari 函数族的偏差定理与拟共形延拓[J]. 数学年刊,2004,25(6):695-704.

[4] 谢志春,黄心中. 一类 Nehari 函数族的拟共形延拓与系数偏差[J]. 华侨大学学报:自然科学报,2011,32(3):343-347.

[5] REICH E. On extremal quasiconformal extensions of conformal mappings[J]. Israel J Math,1977,28(1/2):91-97.

[6] CLUNIE J,SHELL-SMALL T. Harmonic univalent functions[J]. Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math,1984(9):3-25.

[7] SEKER B. Salagean-type harmonic univalent functions[J]. International Journal of the physical Sciences,2011,6(4):801-807.

[8] PAVLOVIC M. Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomorphisms of the uint disk[J]. Ann Acad Sci Fenn Math,2002,27(2):365-372.

[9] KALAJ D. Quasiconformal harmonic functions between convex domains[J]. Publications De L′Institut Mathematique,2004,76(90):3-20.

[10] 黄心中. 单位圆上的调和拟共形同胚[J]. 数学年刊:A 辑,2008,29(4):519-524.

Extension Theorems for Some Univalent Harmonic Mappings on the Unit Disk

PAN Xu-ling, HUANG Xin-zhong

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Harmonic and harmonic quasiconformal extensions for the class of univalent harmonic mappings $S_{\mathrm{HK}}(m,n,\alpha,\beta)$ on the unit disk are considered. The concrete sense-preserving univalent harmonic extensions and, except for $n=0$, the harmonic quasiconformal extensions are given. As the quasiconformal mappings in the plane, their maximum dilatations are also estimated.

Keywords: univalent harmonic mapping; quasiconformal mapping; harmonic quasiconformal extension; maximum dilatation

(**责任编辑**: 钱筠　　**英文审校**: 黄心中)