第 34 卷 第 6 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 34 No. 6
2013 年 11 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Nov. 2013

文章编号:1000-5013(2013)06-0696-05　　**doi:**10.11830/ISSN.1000-5013.2013.06.0696

一类具有积分边值条件的二阶奇异微分方程正解的存在性

林秋莲，王全义

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 研究一类具有非线性积分边值条件的二阶奇异微分方程正解的存在性问题. 应用 Schauder 不动点定理及一些分析技巧，建立该边值问题存在正解的一些充分条件，所得结果推广和改进了 KONG Ling-ju 的研究成果.

关键词： Schauder 不动点定理；奇异；非线性积分边值；正解

中图分类号： O 175　　**文献标志码：** A

由于常微分边值问题在理论和实际应用中有着重要的意义，近年来受到了很多学者的关注[1-11]. 众所周知,微分方程的积分边值问题也包含了微分方程的多点边值问题这一特殊情况. 文献[1] 研究了二阶奇异非线性积分边值问题

$$\left.\begin{aligned} &x''=-\lambda f(t,x), && t\in(0,1),\\ &x(0)=\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\xi(s), && x(1)=\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta(s) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

的正解的存在性. 其中:$\lambda>0$ 为参数 . 在一定条件下,该文利用混合单调算子不动点定理,得到了积分边值问题(1)存在唯一正解的一些新结果. 本文研究具有非线性积分边值条件的二阶奇异微分方程

$$\left.\begin{aligned} &x''=-\lambda f(t,x), && t\in(0,1),\\ &x(0)=\int_0^1 h_1(s,x(s))\mathrm{d}\xi(s), && x(1)=\int_0^1 h_2(s,x(s))\mathrm{d}\eta(s) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

的正解存在性. 其中:$\lambda>0$ 为参数;$f:(0,1)\times(0,+\infty)\to[0,+\infty)$是连续的且 $f(t,x)\not\equiv 0$;$\xi(s)$,$\eta(s)$在$[0,1]$上是非减的且在式(2)的积分是 Riemann-Stieltjes 可积的;$h_i:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ $(i=1,2)$是连续的;$f(t,x)$在 $t=0,1$ 和 $x=0$ 处可能奇异. 显然,当 $h_i(s,x(s))=x(s)$ $(i=1,2)$时,边值问题(2)就转化为边值问题(1).

1 预备知识及引理

设 X 是 Banach 空间,$K\subset X$ 是一个非空子集，满足 1) 对于任意的 $u,v\in K$ 及任意的$\alpha,\beta\geqslant 0$,$\alpha u+\beta v\in K$ 成立；2) 若 $u,-u\in K$,则必有 $u=0$,那么称 K 是 X 中的一个锥.

引理 1 (Schauder 不动点定理[8]) 设 E 是一个 Banach 空间,且 D 是 E 中有界凸闭集(D 不一定有内点)，算子 $A:D\to D$ 是全连续的，则算子 A 在 D 中至少有不动点.

设 $X=\{x(t)\mid x\in C[0,1],t\in[0,1]\}$. $\|x\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$,则在此范数下 X 是一个 Banach 空间.

定义 $K=\{x\mid x\in X,x(t)\geqslant 0,x(t)\geqslant t(1-t)\|x\|,t\in[0,1]\}$. 易证 K 是 X 中的一个锥. 对任意正常数 $r,R(R>r)$,记 $K_r=\{x\in K:\|x\|<r\}$,$\bar{K}_r=\{x\in K:\|x\|\leqslant r\}$,$K_{r,R}=\{x\in K:r<\|x\|<R\}$,$\bar{K}_{r,R}=\{x\in K:r\leqslant\|x\|\leqslant R\}$. 再令

收稿日期： 2012-09-29

通信作者： 王全义(1955-),男,教授,主要从事常微分方程和泛函微分方程的研究. E-mail:wangqy1955@126.com.

基金项目： 国务院侨办科研基金资助项目(09QZR10)

$$G(t,s)=\begin{cases}s(1-t), & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ t(1-s), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases} \tag{3}$$

在文中假设下列条件：

A_1）$a_i(s)x\leqslant h_i(s,x)\leqslant b_i(s)x(i=1,2)$，$(s,x)\in[0,1]\times[0,+\infty)$，其中 $a_i(s)$ 和 $b_i(s)(i=1,2)$ 在 $[0,1]$ 上是非负连续的；

A_2）$M<1$，这里 $M=\max\limits_{t\in[0,1]}\{(1-t)\int_0^1 b_1(s)\mathrm{d}\xi(s)+t\int_0^1 b_2(s)\mathrm{d}\eta(s)\}$；

A_3）f 可写成 $f(t,x)=w(t)(g(x)+h(x))$，其中 $w:(0,1)\to[0,+\infty)$ 是连续的；$g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是连续函数；$h:(0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是连续且非增的；

A_4）1）$0<\int_0^1 G(s,s)w(s)\mathrm{d}s=:M_1<+\infty$；2）对任意 $k_1>0$，有 $\int_0^1 G(s,s)w(s)h(k_1 s(1-s))\mathrm{d}s<+\infty$；

A_5）存在 $\alpha\in(0,1)$，使得条件 1）极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sup\dfrac{g(x)}{x^\alpha}=A$ 存在，A 为常数；2）当 $k\in(0,1)$，$x>0$ 时，$h(k^{-1}x)\geqslant k^\alpha h(x)$；3）$0<\int_0^1 w(s)[s(1-s)]^{1-\alpha}\mathrm{d}s<+\infty$ 成立；

A'_5）$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是非减的；且存在 $\alpha\in(0,1)$ 使得当 $k\in(0,1)$ 及 $x>0$ 时，有 $g(kx)\geqslant k^\alpha g(x)$ 及 $h(k^{-1}x)\geqslant k^\alpha h(x)$；且 $0<\int_0^1 w(s)[s(1-s)]^{1-\alpha}\mathrm{d}s<+\infty$.

引理 2　对于式(3)给出的函数 $G(t,s)$ 有下列 3 点性质：

a_1）当 $0<t,s<1$ 时，$G(t,s)>0$；

a_2）当 $0\leqslant t,s\leqslant 1$ 时，$0\leqslant G(t,s)\leqslant G(t,t)$，$0\leqslant G(t,s)\leqslant G(s,s)$；

a_3）当 $0\leqslant t,s\leqslant 1$ 时，$G(t,s)\geqslant G(t,t)\cdot G(s,s)$.

如果条件 A_1）～A_4）成立，则可以在 K 或 $K/\{0\}$ 上定义如下的一些算子.

首先定义算子

$$(T_1x)(t)=(1-t)\int_0^1 h_1(s,x(s))\mathrm{d}\xi(s)+t\int_0^1 h_2(s,x(s))\mathrm{d}\eta(s),\qquad \forall x\in K, \tag{4}$$

$$(T_2x)(t)=\int_0^1 G(t,s)\lambda w(s)g(x(s))\mathrm{d}s,\qquad \forall x\in K, \tag{5}$$

$$(T_3x)(t)=\int_0^1 G(t,s)\lambda w(s)h(x(s))\mathrm{d}s,\qquad \forall x\in K/\{0\}. \tag{6}$$

在条件 A_1）～A_4）下，式(4)～(6)的右端积分都存在，算子 T_1x,T_2x,T_3x 是有意义的.

引理 3　假设条件 A_1）及 A_2）成立，算子 $T_1:K\to K$ 是全连续算子.

引理 4　假设条件 A_3）及 A_4）成立，算子 $T_2:K\to K$ 是全连续的.

引理 5　假设条件 A_3）及 A_4）成立. 算子 $T_3:K/\{0\}\to K$.

下面通过构造全连续算子序列 $T_{3,n}:K\to K,(n=2,3,\cdots)$ 来证明算子 $T_3:K\backslash\{0\}\to K$ 的全连续性. 首先定义函数

$$h_n(x)=\begin{cases}h(x), & x\geqslant\dfrac{1}{n},\quad n=2,3,4,\cdots,\\ h(\dfrac{1}{n}), & 0\leqslant x<\dfrac{1}{n},\quad n=2,3,4,\cdots.\end{cases} \tag{7}$$

由于 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续且非增，故对每个固定的 n，$h_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且非增，且

$$h_2(x)\leqslant h_3(x)\leqslant\cdots\leqslant h_n(x)\leqslant\cdots,\qquad \forall x\in[0,+\infty), \tag{8}$$

$$h_n(x)\leqslant h(x),\qquad \forall x\in[0,+\infty),\quad n=2,3,4,\cdots. \tag{9}$$

此外，对于任意给定的闭区间 $[a,b]\subset(0,+\infty)(0<a<b)$，$\lim\limits_{n\to+\infty}h_n(x)=h(x)$ 对 $x\in[a,b]$ 一致地成立. 在 A_3），A_4）条件下，定义算子序列 $T_{3,n}:K\to X$ 为

$$(T_{3,n}x)(t)=\int_0^1 G(t,s)\lambda w(s)h_n(x(s))\mathrm{d}s,\qquad \forall x\in K,\quad n=2,3,4\cdots. \tag{10}$$

由于在引理4中证明算子 $T_2: K\to K$ 的全连续性时只用到 $g(x)$ 的连续性，且 $h_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，因此由引理4即得如下引理6.

引理6 假设条件 A_3),A_4)成立. 则对每个固定的 $n\in N^+(n\geqslant 2)$,算子 $T_{3,n}: K\to K$ 是全连续的.

引理7 假设条件 A_3),A_4)成立. 则对于任意给定的有界凸闭集 $D\subset K\backslash\{0\}$,算子 $T_3: D\to X$ 是全连续算子.

定义算子 $T: K\backslash\{0\}\to K$ 为

$$(Tx)(t)=(T_1x+T_2x+T_3x)(t)=(1-t)\int_0^1 h_1(s,x(s))\mathrm{d}\xi(s)+t\int_0^1 h_2(s,x(s))\mathrm{d}\eta(s)+\int_0^1 G(t,s)\lambda w(s)(g(x(s))+h(x(s)))\mathrm{d}s,\qquad x\in K/\{0\}. \tag{11}$$

由式(11)和引理3,4,7可知,算子 $T: K\backslash\{0\}\to K$ 是全连续的.

引理8 假设条件 A_1),A_4)成立. 则对于任意给定的有界凸闭集 $D\subset K\backslash\{0\}$,算子 $T: D\to K$ 是全连续算子.

引理9 假设条件 A_1),A_4)成立. 如果 $x=x(t)$ 是全连续算子 $T: D\subset K\backslash\{0\}\to K$ 的一个不动点，这里 D 是 $K\backslash\{0\}$ 中的一个有界凸闭集,则 $x=x(t)$ 必是积分边值问题(2)的一个正解.

注1 由算子 T 的表达式(11)的右端易见，所有的边值问题(1),(2)对函数 $w(s)$ 及 $h(x)$ 的奇异性的限制条件 $\int_0^1 w(s)[s(1-s)]^{1-\alpha}\mathrm{d}s<+\infty$ 是最弱的.

2 主要结果及其证明

定理1 假设条件 A_1)～A_3),A_5)及 $h(1)>0$ 成立，则对任意给定的 $\lambda>0$,积分边值问题(2)至少存在一个正解.

证明 由 $\limsup\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x^\alpha}=A$ 得,存在 $r>0$,则当 $x\geqslant r$ 时,有 $g(x)\leqslant(A+1)x^\alpha$.

令 $M_0=\max\{g(x)+1: 0\leqslant x\leqslant r\}$. 于是,有 $g(x)\leqslant(A+1)x^\alpha+M_0$,$x\in[0,+\infty)$.

对任意给定的 $\lambda>0$,选择一个数 $C_\lambda>1$ 足够大,使得

$$C_\lambda\geqslant\max\{M_0^{1/\alpha},\left(\frac{\lambda\int_0^1 G(s,s)w(s)((A+3)+h(1)(s(1-s))^{-\alpha})\mathrm{d}s}{1-M}\right)^{1/(1-\alpha)},\left(\lambda\int_0^1 G(s,s)w(s)h(1)\mathrm{d}s\right)^{-1/(1-\alpha)}\}.$$

记 $K(\lambda)=\{x\in K: C_\lambda^{-1}\cdot t(1-t)\leqslant x(t)\leqslant C_\lambda\}$. 易见 $K(\lambda)$ 是 $K\backslash\{0\}$ 中的一个非空有界凸闭子集. 从而,由引理8可知,式(10)定义的算子 $T: K(\lambda)\to K$ 是全连续的.

事实上，由式(10)及引理2和定理的条件可得,对任意的 $x\in K(\lambda)$,$t\in[0,1]$,有

$$(Tx)(t)=(1-t)\int_0^1 h_1(s,x(s))\mathrm{d}\xi(s)+t\int_0^1 h_2(s,x(s))\mathrm{d}\eta(s)+\int_0^1 G(t,s)\lambda w(s)(g(x(s))+h(x(s)))\mathrm{d}s\leqslant C_\lambda,$$

$$(Tx)(t)=(1-t)\int_0^1 h_1(s,x(s))\mathrm{d}\xi(s)+t\int_0^1 h_2(s,x(s))\mathrm{d}\eta(s)+\int_0^1 G(t,s)\lambda w(s)(g(x(s))+h(x(s)))\mathrm{d}s\geqslant t(1-t)C_\lambda^{-1}.$$

所以 $Tx\in K(\lambda)$,即有 $T(K(\lambda))\subset K(\lambda)$. 因此,引理1的所有条件都被满足. 故由引理1可得，算子 T 在 $K(\lambda)$ 中有不动点 x^*. 又因为 $x^*(t)\geqslant C_\lambda^{-1}t(1-t)>0$,$t\in(0,1)$，故由引理9可知，积分边值问题(2)至少存在一个正解 $x^*=x^*(t)$. 定理1证毕.

定理2 假设条件 A_1)～A_3)及 A'_5) 成立，则对于任意给定的 $\lambda>0$,积分边值问题(2)至少存在一个正解.

证明略. 只需选取 $C_\lambda>1$ 足够大满足

$$C_\lambda \geqslant \max\{(\frac{\lambda\int_0^1 G(s,s)w(s)(g(1)+h(1)(s(1-s))^{-\alpha})\mathrm{d}s}{1-M})^{1/(1-\alpha)},$$
$$(\lambda\int_0^1 G(s,s)w(s)(g(1)(s(1-s))^{\alpha}+h(1))\mathrm{d}s)^{-1/(1-\alpha)}\}.$$

接下来的证明同定理 1 的证明类似,此处略.

推论 1　若 A_3),A_5) 成立，且 $h(1)>0$ 和 $M=\max\limits_{t\in[0,1]}\{(1-t)\int_0^1\mathrm{d}\xi(s)+t\int_0^1\mathrm{d}\eta(s)\}<1$,则对于任意给定的 $\lambda>0$,积分边值问题(1)至少存在一个正解.

推论 2　假设条件 A_3),A'_5) 成立，且 $M=\max\limits_{t\in[0,1]}\{(1-t)\int_0^1\mathrm{d}\xi(s)+t\int_0^1\mathrm{d}\eta(s)\}<1$,成立，则对于任意给定的 $\lambda>0$,积分边值问题(1)至少存在一个正解.

注 2　就积分边值问题(1)或(2)的正解的存在性而言,推论 2 大大地推广和改进了文献[1]中的积分边值问题(1)正解存在性的相关结果．这是因为推论 2 不仅去掉了文献[1]中定理的条件 H_2):存在一个 $\sigma\in(0,1)$,使得$\frac{m}{1-m}\geqslant\sigma\frac{M}{1-M}$这个条件的限制,而且对 $w(s)$及 $h(x)$的奇异性的要求也比文献[1]定理中的要求弱得多.

3　一些例子

例 1　考虑如下的具有积分边界条件的二阶奇异微分方程

$$\left.\begin{aligned}&x''(t)=-\frac{\lambda}{t(1-t)}(x^{2/3}+|\sin x|+x^{-1/2}),\qquad t\in(0,1),\\&x(0)=0,\qquad x(1)=\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\frac{s}{2}\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

正解的存在性问题．其中:$\lambda>0$ 为参数.

对应积分边值问题(1),有 $\xi(s)=0$, $\eta(s)=\frac{s}{2}$, $w(t)=\frac{1}{t(1-t)}$,$g(x)=x^{2/3}+|\sin x|$,$h(x)=x^{-1/2}$,$m=\max\limits_{t\in[0,1]}\{(1-t)\int_0^1 s(1-s)\mathrm{d}\xi(s)+t\int_0^1 s(1-s)\mathrm{d}\eta(s)\}=0$,$M_1=\int_0^1 G(s,s)w(s)\mathrm{d}s=1$,$M=\max\limits_{t\in[0,1]}\{(1-t)\int_0^1\mathrm{d}\xi(s)+t\int_0^1\mathrm{d}\eta(s)\}=1/2$,$h(1)=1$.

令 $\alpha=\max\{1/2,2/3\}=2/3$,则 $0<\int_0^1 w(s)[s(1-s)]^{1-\alpha}\mathrm{d}s=\int_0^1[s(1-s)]^{-2/3}\mathrm{d}s<+\infty$, 当 $k\in(0,1)$,$x>0$ 时,有 $h(k^{-1}x)=k^{1/2}h(x)\geqslant k^{2/3}h(x)$,$\limsup\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x^\alpha}=\limsup\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{2/3}+|\sin x|}{x^{2/3}}=1$.

由此可知，推论 1 的所有条件都被满足．故由推论 1 可知，对任意给定的 $\lambda>0$ 积分边值问题(12)至少存在一个正解.

例 2　考虑如下的具有积分边界条件的二阶奇异微分方程

$$\left.\begin{aligned}&x''(t)=-\frac{\lambda}{t(1-t)}(x^{1/3}\ |\sin x|+|\cos x|+x^{-1/2}),\qquad t\in(0,1),\\&x(0)=\int_0^1 s^3x(s)\ |\cos(x(s)+s)|\ \mathrm{d}s,\qquad x(1)=\int_0^1\frac{1+\sin s}{4[2+\cos(x(s))]}x(s)\mathrm{d}s\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

正解的存在性问题．其中:$\lambda>0$ 为参数.

对应积分边值问题(2),有 $w(t)=\frac{1}{t(1-t)}$,$g(x)=x^{1/3}|\sin x|+|\cos x|$,$h(x)=x^{-1/2}$,$h_1(s,x)=s^3x|\cos(x+s)|$,$h_2(s,x)=\frac{1+\sin s}{4[2+\cos x]}x$,$\xi(s)=s$,$\eta(s)=s$.

取 $a_1(s)=0$,$a_2(s)=0$,$b_1(s)=s^3$,$b_2(s)=1/2$,$\alpha=\max\{1/3,1/2\}=1/2$,于是有 $a_i(s)x\leqslant h_i(s,x)\leqslant b_i(s)x$,$i=1,2$, $(s,x)\in[0,1]\times[0,+\infty)$;$M=\max\limits_{t\in[0,1]}\{(1-t)\int_0^1 b_1(s)\mathrm{d}\xi(s)+t\int_0^1 b_2(s)\mathrm{d}\eta(s)\}=$

$\max\limits_{t\in[0,1]}\{\frac{1-t}{4}+\frac{t}{2}\}=\frac{1}{2}<1;M_1=\int_0^1 G(s,s)w(s)\mathrm{d}s=1,h(1)=1;0<\int_0^1 w(s)[s(1-s)]^{1-\alpha}\mathrm{d}s=\int_0^1[s(1-s)]^{-1/2}\mathrm{d}s<+\infty$,且当 $k\in(0,1),x>0$ 时,有 $h(k^{-1}x)=k^{1/2}h(x)=k^{\alpha}h(x)$, $\limsup\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x^{\alpha}}=\limsup\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{1/3}|\sin x|+|\cos x|}{x^{1/2}}=0$.

由此可知,定理1的所有条件都被满足,由定理1可知,对任意给定的 $\lambda>0$ 积分边值问题(13)至少存在一个正解.

注3 易见,文献[1]的结果是得不到上述例1,2的正解的存在性.因而,所得结果是新的.

参考文献:

[1] KONG Ling-ju. Second order singular boundary value problems with integral boundary conditions[J]. Nonlinear Analysis,2010,72(5):2628-2638.

[2] JIANG Ji-qiang,LIU Li-shan,WU Yong-hong. Second-order nonlinear singular Sturm-Liouville problems with integral boundary conditions[J]. Applied Mathematics and Computation,2009,215(4):1573-1582.

[3] 曹君艳,王全义.一类二阶微分方程两点边值问题的正解存在性[J].华侨大学学报:自然科学版,2010,35(1):113-117.

[4] HAO Xi-nan,LIN Li-shan,WU Yong-hong. On positive solutions of an m-point nonhomo geneous singular boundary value problem[J]. Nonlinear Analysis,2010,73(8):2532-2540.

[5] ZHONG Min-ling,ZHANG Xin-guang. The existence of multiple positive solutions for a class of semipositone Dirichlet boundary value problems[J]. Journal of Applied Mathematicsand Computing,2012,38(1/2):145-159.

[6] WANG You-yu,LIU Guo-feng,HU Yin-ping. Existence and uniqueness of solutions for a second order differential equation with integral boundary conditions[J]. Applied Mathematicsand Computation,2010,216(9):2718-2727.

[7] JI De-hong,BAI Zhan-bing,GE Wei-gao. The existence of countably many positive solutions for singular multipoint boundary value problems[J]. Nonlinear Analysis,2010,72(2):955-964.

[8] 郭大钧.非线性泛函分析[M].2版.济南:山东科学技术出版社,2001:286-330.

Existence of Positive Solutions for A Class of Second Order Singular Differential Equations with Nonlinear Integral Boundary Conditions

LIN Qiu-lian, WANG Quan-yi

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: We study the problem on the existence of positive solutions for a class of second-order singular differential equations with nonlinear integral boundary conditions. By using Schauder fixed point theorem and some analysis techniques, we provide sufficient conditions for the existence of positive solutions to the above boundary value problems. Our results generalize and improve the one made by KONG Ling-ju.

Keywords: Schauder fixed point theorem; singular; nonlinear integral boundary value; positive solution

(责任编辑:钱筠 英文审校:黄心中)