

# 序列线性规划方法优化应力约束类桁架结构

何少锋, 周克民

(华侨大学 土木工程学院, 福建 厦门 361021)

**摘要:** 研究类桁架材料在多工况应力约束下拓扑优化分布问题. 目标结构为非均匀各向异性连续分布类桁架材料构成的连续体. 采用有限元方法进行力学分析, 类桁架材料的杆件在结点位置的密度和方向作为设计变量, 由结点位置的材料性质插值得到单元内部材料分布. 推导相应材料的弹性矩阵和刚度矩阵及敏度信息. 将材料体积目标函数和应力约束线性展开, 建立优化问题列式. 采用序列线性规划数学优化方法优化了杆件分布. 该方法的优化结果可以作为进一步形成桁架结构的基础.

**关键词:** 拓扑优化; 应力约束; 多工况; 类桁架; 序列线性规划

**中图分类号:** O 342

**文献标志码:** A

目前, 连续体结构拓扑优化更多以全局性状态量(如位移、柔顺度等)为约束或目标研究, 应力约束也一般采用满应力准则法. 通过连续体结构拓扑优化得到骨架类拓扑图形, 能够为设计者进行概念设计提供很好的参考. 连续体拓扑优化方法主要有均匀化方法<sup>[1-2]</sup>、变密度法、渐进结构优化法(ESO)<sup>[3-4]</sup>和独立连续映射(ICM)方法<sup>[5]</sup>等. 这些拓扑优化方法都是以单元的“有”和“无”表示结构的拓扑, 通过不同准则删除单元实现结构拓扑变化. Michell 在理论上证明了拓扑优化结构一般是类桁架连续体<sup>[6-7]</sup>, 该结果有可能接近更接近理论解. 文献[8-9]采用准则法研究了平面应力约束问题及板的弯曲问题. 虽然准则法有更高的计算效率, 但经常缺乏坚实理论基础, 且方法的适应性不强, 即不同问题需要建立不同的准则. 因此, 对于多工况问题就难于建立适当准则, 特别是杆件方向的优化. 通过建立类桁架模型能有效地克服大多优化方法普遍出现的诸如棋盘格现象等数值不稳定问题, 是一种新的优化思想. 随着数学优化方法的不断进步, 一些计算更加简便, 结算结果更加精确诸如移动渐近线法的数学规划方法被提出, 采用数学规划方法优化结构模型会变得更加实用、精确. 本文采用线性序列规划数学优化方法, 研究结构在满足应力约束条件下的多工况类桁架拓扑优化结构.

## 1 类桁架拓扑优化

### 1.1 类桁架材料模型

在类桁架结构中, 杆件在设计域内非均匀连续分布. 在研究的设计域内任意点上, 假设该点分布 2 组正交杆件. 将这两组杆件方向定义为材料主轴方向, 这两个材料主轴方向的杆件密度分别记作  $t_1, t_2$ . 因为目标结构是由同一材料构成, 所以假设所有杆件具有相同的弹性模量  $E$ . 如果 2 组杆件的应力和应变分别记作  $\sigma_1, \sigma_2$  和  $\epsilon_1, \epsilon_2$ , 其应力应变关系为

$$\sigma_i = E t_i \epsilon_i, \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

在 Michell 桁架内, 由于轴力和变形都沿材料主轴方向, 所以材料在主轴方向没有切应变, 切变模量也就不起作用. 但在计算过程中, 切变模量不能为零, 否则结构会不稳定. 另外, 为了能够描述各向同性材料, 剪切刚度假设为  $E(t_1 + t_2)/4$ . 材料沿主轴方向的弹性矩阵可以写为

$$\mathbf{D}(t_1, t_2, 0) = E \cdot \text{diag}[t_1, t_2, (t_1 + t_2)/4]. \quad (2)$$

收稿日期: 2013-01-28

通信作者: 周克民(1962-), 男, 教授, 主要从事结构拓扑优化的研究. E-mail: zhoukm@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11172106, 10872072)

式(2)中:diag[·]表示对角阵. 显然,当  $t_1=t_2$  时,式(2)表示各向同性材料.

设杆件与结构坐标轴夹角为  $\alpha$ ,在坐标轴方向的弹性矩阵为

$$\boldsymbol{D}(t_1,t_2,\alpha)=\boldsymbol{T}^T(\alpha)\boldsymbol{D}(t_1,t_2,0)\boldsymbol{T}(\alpha). \tag{3}$$

式(3)中:应变坐标转置矩阵  $\boldsymbol{T}(\alpha)=\begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & 0.5\sin 2\alpha \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & -0.5\sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$ . 将其带入式(3)并整理,可得

$$\boldsymbol{D}(t_1,t_2,\alpha)=E\sum_b t_b\sum_i s_{bi}g_i(\alpha)\boldsymbol{A}_i. \tag{4}$$

式(4)中: $s_{bi}$ 和  $g_i$  是常数矩阵  $\boldsymbol{s}$  和函数矩阵  $\boldsymbol{g}(\alpha)$  的分量,  $\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $\boldsymbol{g}(\alpha)=[1,\cos 2\alpha,\sin 2\alpha]$ ;

$\boldsymbol{A}_i$  是常数矩阵,  $\boldsymbol{A}_1=\frac{1}{2}\text{diag}[1,1,\frac{1}{2}]$ ,  $\boldsymbol{A}_2=\frac{1}{2}\text{diag}[1,-1,0]$ ,  $\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

1.2 强度约束条件

任意方向线应变可以表示为

$$\epsilon_\alpha=\epsilon_x\cos^2\alpha+\epsilon_y\sin^2\alpha+\gamma_{xy}\cos\alpha\sin\alpha. \tag{5}$$

式(5)中: $\epsilon_x,\epsilon_y,\gamma_{xy}$  应变分量,也可记作矩阵形式为

$$\boldsymbol{\epsilon}=[\epsilon_x,\epsilon_y,\gamma_{xy}]^T. \tag{6}$$

应变可以由位移列阵计算. 记节点的位移矩阵为  $\boldsymbol{U}$  和结构的几何矩阵为  $\boldsymbol{B}$ ,则应变为  $\boldsymbol{\epsilon}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}$ .

结点位置的应变可以由各单元在该结点位置的应变平均值计算,即

$$\epsilon_j=\sum_{e\in S_j}\boldsymbol{B}_j\boldsymbol{U}_e/e_j. \tag{7}$$

其中: $e_j$  是结点  $j$  周围的单元数; $S_j$  是结点  $j$  周围的单元集合.

引入矩阵记号  $\bar{\boldsymbol{T}}_1(\alpha)=[1+\cos 2\alpha,1-\cos 2\alpha,\sin 2\alpha]/2$ ,  $\bar{\boldsymbol{T}}_2(\alpha)=[1-\cos 2\alpha,1+\cos 2\alpha,-\sin 2\alpha]/2$ ,由此可以容易计算其导数,即  $\bar{\boldsymbol{T}}_1'(\alpha)=[-\sin 2\alpha,\sin 2\alpha,\cos 2\alpha,]$ ,  $\bar{\boldsymbol{T}}_2'(\alpha)=-\bar{\boldsymbol{T}}_1'(\alpha)$ . 由此,式(5)可以重写为

$$\epsilon_b=\bar{\boldsymbol{T}}_b(\alpha)\boldsymbol{\epsilon}. \tag{8}$$

式(8)中: $b=1,2$  表示在结点位置两个杆件方向的应变. 杆件的强度条件表示为允许应变的形式,即

$$|\bar{\boldsymbol{T}}_b(\alpha)\epsilon_b|\leqslant\bar{\epsilon}. \tag{9}$$

式(9)中: $\bar{\epsilon}$  为允许应变.

建立约束函数为

$$g_{ai}=\pm\bar{\boldsymbol{T}}_a(\alpha_i)\epsilon_i/\bar{\epsilon}-1\leqslant 0. \tag{10}$$

约束函数式(10)对设计变量密度和角度求导,可得到敏度信息为

$$\left. \begin{aligned} g'_{ai,bj}&=\pm\bar{\boldsymbol{T}}_a(\alpha_i)\frac{\partial\epsilon_i}{\partial t_{bj}}/\bar{\epsilon}, \\ g^a_{ai,j}&=\pm[\bar{\boldsymbol{T}}_a(\alpha_i)\frac{\partial\epsilon_i}{\partial\alpha_j}+\delta_{ij}\bar{\boldsymbol{T}}_a'(\alpha_i)\epsilon_i]/\bar{\epsilon}. \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

有了一阶导数,约束函数式(10)可以一次展开,即有

$$g_{ai}=g_{ai}^0+\sum_{b,j}g'_{ai,bj}\Delta t_{bj}+\sum_jg^a_{ai,j}\Delta\alpha_j\leqslant 1. \tag{12}$$

式(12)中: $g_{ai}^0$  为节点在当前迭代步的沿着杆件方向的应变值与应变允许值的比值. 式(12)中应变的导数可以根据式(7)由位移导数计算得到,即

$$\frac{\partial\epsilon_i}{\partial x}=\sum_{e\in S_i}\boldsymbol{B}_i\frac{\partial\boldsymbol{U}_e}{\partial x}/e_i. \tag{13}$$

式(13)中: $x$  表示设计变量. 利用刚度方程  $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}$  两端对设计变量  $x$  求导,即

$$\boldsymbol{K}\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{K}}{\partial x}\boldsymbol{U}=0. \tag{14}$$

由此可得位移对设计变量导数为

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{K}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{U}.$$

(15)

代入式(13), 可得应变对设计变量导数.

1.3 刚度矩阵

以结点位置的杆件密度  $t_{1,j}, t_{2,j}$  和方向  $\alpha_j$  作为优化设计变量, 结点  $j$  处的弹性矩阵为  $\boldsymbol{D}(t_{1,j}, t_{2,j}, \alpha_j)$ . 单元内部任一点的弹性矩阵可由结点位置的弹性矩阵利用形函数插值得到, 即

$$\boldsymbol{D}_e(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{j \in S_e} N_j(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{D}(t_{1,j}, t_{2,j}, \alpha_j) \frac{\partial \boldsymbol{U}_e}{\partial \boldsymbol{x}} / e_i.$$

(16)

式(16)中:  $e$  是单元号;  $N_j(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$  是形函数;  $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$  是单元局部坐标;  $S_e$  是属于单元  $e$  的结点集合. 将式(4)代入式(16)可得

$$\boldsymbol{D}_e(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = E \sum_{j \in S_e} N_j \sum_b t_{bj} \sum_i s_{bi} g_i(\alpha_j) \boldsymbol{A}_i.$$

(17)

再将式(17)代入单元刚度矩阵  $\boldsymbol{k}_e = \int_{V_e} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D}_e \boldsymbol{B} dV$ , 可得

$$\boldsymbol{k}_e = E \sum_{j \in S_e} \sum_b t_{bj} \sum_i s_{bi} g_i \int_{V_e} N_j \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{B} dV = \sum_{j \in S_e} \sum_b t_{bj} \sum_i s_{bi} g_i(\alpha_j) \boldsymbol{H}_{eji}.$$

(18)

式(18)中:  $\boldsymbol{H}_{eji} = E \int_{V_e} N_j \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{B} dV$ . 如果能够采用规则单元网格,  $\boldsymbol{H}_{eji}$  是与单元无关的常数矩阵, 可以事先计算出来.

对单元刚度矩阵(18)累加, 可得到整体刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K} = \sum_e \boldsymbol{k}_e = \sum_e \sum_{j \in S_e} \sum_b t_{bj} \sum_i s_{bi} g_i(\alpha_j) \boldsymbol{H}_{eji} = \sum_j \sum_{e \in S_j} \sum_b t_{bj} \sum_i s_{bi} g_i(\alpha_j) \boldsymbol{H}_{eji}.$$

(19)

式(19)中, 最后 1 个等式是将关于单元和结点的累加顺序交换得到, 以便求导运算. 刚度矩阵对设计变量的求导为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial t_{bj}} &= \sum_{e \in S_j} \sum_i s_{bi} g_i(\alpha_j) \boldsymbol{H}_{eji}, \\ \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \alpha_j} &= \sum_{e \in S_j} \sum_b t_{bj} \sum_i s_{bi} g'_i(\alpha_j) \boldsymbol{H}_{eji}. \end{aligned} \right\}$$

(20)

1.4 目标函数

由于结点位置的杆件密度是设计变量, 单元内部的杆件密度需要由结点位置的杆件密度插值得到. 故结构体积需要将密度积分, 可得

$$V(t) = \sum_e \sum_b \int_{V_e} \sum_{j \in S_e} N_j t_{bj} dV = \sum_j \sum_{e \in S_j} \int_{V_e} N_j dV = \sum_b t_{bj} = \sum_j z_j \sum_b t_{bj}.$$

(21)

式(21)中:  $z_j = \sum_{e \in S_e} \int_{V_e} N_j dV$ . 对于规则矩形单元, 有

$$z_j = V_e / 4.$$

(22)

式(22)中:  $V_e$  是单元面积.

2 数学优化方法

根据上述推导, 可以写出应力约束体积最小化问题的线性规划问题

$$\left. \begin{aligned} \min \quad & \sum_j z_j \sum_b t_{bj}, \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{b,j} g'_{at,bj} \Delta t_{bj} + \sum_j g^a_{at,j} \Delta \alpha_j \leq 1 - g^0_{at}, \quad a = 1, 2; \quad i = 1, 2, \dots, J, \\ & \hat{t} \leq \Delta t_{bj} \leq \hat{t}, \quad \underline{t} \leq t_{bj} + \Delta t_{bj}, \quad -\hat{\alpha} \leq \Delta \alpha_j \leq \hat{\alpha}. \end{aligned} \right\}$$

(23)

式(23)中:  $\hat{t}, \hat{\alpha}$  是为了限制一次迭代的步长设置的界限;  $\underline{t}$  是为了避免刚度矩阵奇异取的下限值. 文中取  $\hat{t}_{b,j} = 0.2 t_{bj}, \underline{t} = 10^{-8}, \Delta \alpha_j = 0.02 \pi$ .

采取线性序列规划方法求解的优化过程有如下 5 个步骤 .

- 1) 先选定一个初始迭代值,使初始材料为各向同性,即  $t_{b_j}^0=0.4, \alpha_j^0=0, b=1, 2; j=1, 2, \cdots, J$ .
- 2) 进行有限元分析,计算各结点的应力和应变及对各设计变量的导数.
- 3) 利用导数建立线性规划方程式(23),通过线性规划得到新的设计变量增量  $\Delta t_{b,j}^i, \Delta \alpha_j^i$ .
- 4) 更新设计变量,即  $t_{b,j}^{i+1}=t_{b,j}^i+\Delta t_{b,j}^i, \alpha_j^{i+1}=\alpha_j^i+\Delta \alpha_j^i$ .
- 5) 计算相邻两次迭代体积相对改变量足够小时,迭代结束,文中该准则取  $10^{-3}$ ; 否则,回步骤(2).

3 算例分析

下面通过计算 3 个经典算例,来验证该方法的可靠性和有效性. 3 个算例分别是 25 步, 29 步和 61 步迭代得到优化类桁架结构,均是矩形设计区域,其尺寸、约束条件如图 1 所示,结构优化模型如图 2 所示. 图 1 中:  $p_1, p_2$  分别为两种不同工况下的作用荷载,大小相等. 由于荷载、材料弹性模量及尺寸等大小与优化结果无关,因此都取单位 1. 设计域划分成  $14 \times 8$  四结点矩形有限单元. 图 3 为例 3 的 Michell 桁架解析解. 图 2 中: 线段的方向表示该点杆件优化方向; 线段长度表示杆件的优化密度. 为了使图形清楚起见,过长的线段被切断了.

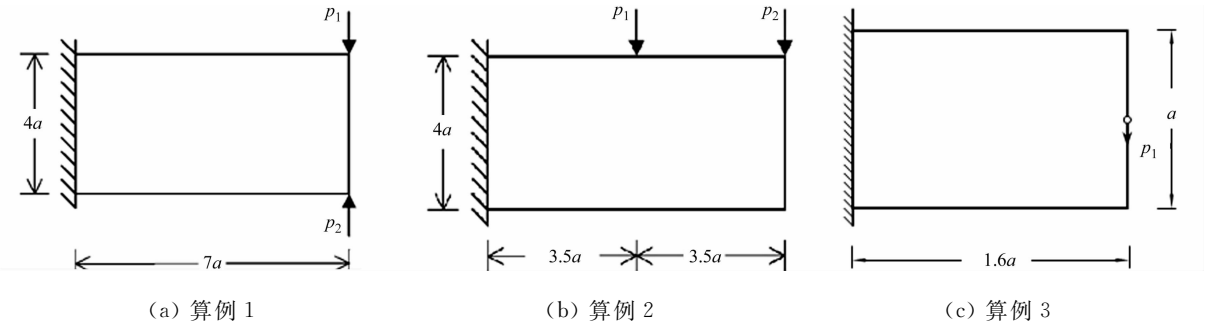


图 1 经典算例的结构约束条件及受力

Fig. 1 Geometry and boundary condition in typical example

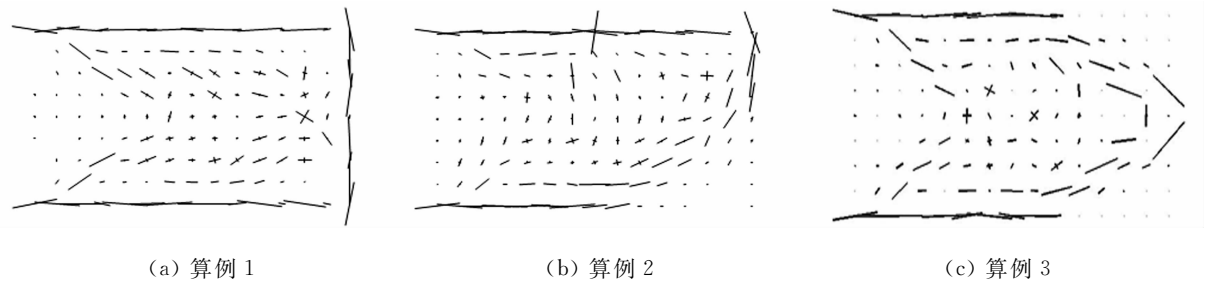


图 2 经典算例的线性序列规划方法优化结果

Fig. 2 Fiber densities and orientations in typical example

由例题及优化结果可知: 采用的优化方法得到的结构模型与运用满足应力准则优化得到的结构模型较为接近<sup>[8]</sup>.

4 结论

采用序列线性规划方法研究了多工况应力约束体积最小问题的类桁架材料拓扑优化方法. 由于不抑制中间密度, 所以没有棋盘格等数值不稳定问题. 采用数学规划方法不如准则法的计算效率高, 但适应性更强, 容易推广到其他更复杂的优化问题.

对于单工况应力约束, 满足应力准则法的效果很好. 目前类桁架材料优化采用的都是准则法. 单工况应力约束采用了满足应力准则, 多工况应力约束采用了近似拟合各单工况方向刚度包络线的准则.

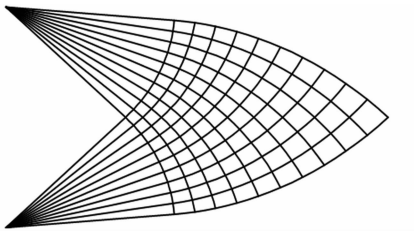


图 3 例 3 的 Michell 桁架解析解  
Fig. 3 Analytical solution of Michell truss in example 3

利用  $K-T$  条件还导出位移约束了准则. 准则法固然有效率高, 与设计变量的数量关系不大的优势, 但是, 这些准则不具有通用性, 需要根据不同问题推导不同准则. 特别是当多种约束存在情况下, 很难建立适于数值计算的准则.

数学优化方法是解决问题的一个重要方法. 当然, 目前的优化运算质量还有待进一步提高.

参考文献：

[1] DIAZ A, BENDSOE M P. Shape optimization of structures for multiple loading situations using a homogenization method[J]. Struct Optim, 1992, 4(1): 17-22.

[2] BENDSOE M P, KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method [J]. Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, 1988, 71(2): 197-224.

[3] XIE Y M, STEVEN G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization[J]. Journal of Computers & Structures, 1993, 49(5): 885-896.

[4] QUERIN O M, YOUNG V, STEVEN G P, et al. Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000, 189(2): 559-573.

[5] 隋允康, 叶红玲, 彭细荣, 等. 连续体结构拓扑优化应力约束凝聚化的 ICM 方法[J]. 力学学报, 2007, 39(4): 554-563.

[6] MICHELL A G M. The limits of economy of material in framestructure[J]. Philosophical Magazine, 1904, 8(47): 589-597.

[7] HEMP W S. Optimum structure[M]. Oxford: Clarendon Press, 1973: 70-101.

[8] ZHOU Ke-min, Li Xia. Topology optimization of structures under multiple load cases using a fiber-reinforced composite material model[J]. Computational Mechanics, 2005, 38(2): 163-170.

[9] ZHOU Ke-min. Optimization of least-weight grillages by finite element method[J]. Struct Optim, 2009, 38(5): 525-532.

# Optimization of Truss-Like Structures with Stress Constraints by Sequence Linear Programming

HE Shao-feng, ZHOU Ke-min

(College of Civil Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** The topology optimization of truss-like materials for multiple load cases with stress constraints was studied. The optimized structure was non-uniform anisotropic continuum which was formed by continuously distributed truss-like materials. Structure was analyzed by the finite element method. The densities and directions of members of truss-like material at nodes were taken as design variables. The materials distribution in the elements was interpolated according to the material properties at the nodes of the elements. The elasticity matrix, stiffness matrix and their insensitivities were deduced. The material volume as objective function and strains as constraint function were expanded linearly, from which linear programming expression was established. The member distribution was optimized by sequence linear programming. The results can be used as the base to form the truss structure furthermore.

**Keywords:** topology optimization; stress constraints; multiple load cases; truss-like structures; sequence linear programming

(责任编辑：黄晓楠      英文审校：方德平)