

2-范畴中拉回的等价定义

刘娜, 林增强

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 从已知的 2-范畴  $S$  出发,构造两类 2-范畴  $\mathcal{R}$  和  $\mathcal{E}$ ,证明了  $S$  中的拉回,  $\mathcal{R}$  的终对象和  $\mathcal{E}$  中的积三者相互确定,从而给出 2-范畴中拉回的等价定义.

**关键词:** 2-范畴; 拉回; 积; 终对象

**中图分类号:** O 154.1; O 154.2      **文献标志码:** A

1965 年, Ehresmann 首先提出了 2-范畴的概念<sup>[1]</sup>. 2-范畴是范畴的抽象和推广, 而范畴可以看成特殊的 2-范畴, 并且所有的小范畴构成一个 2-范畴. 2-范畴包含着比范畴更多更丰富的信息, 因此 2-范畴理论成为范畴论的研究热点之一. Borceux 将 2-范畴的概念一般化, 给出了  $n$ -范畴的归纳定义<sup>[2]</sup>. 2000 年, Vitale 给出了对称范畴群的概念, 所有的对称范畴群构成的 2-范畴 SCG 在研究对称 Monoidal 范畴的 Brauer 群中起了重要的作用<sup>[3-4]</sup>. Nakaoka 发展了 2-范畴的上同调理论, 类比 Abel 范畴给出了相对正合 2-范畴的概念, 并且 2-范畴 SCG 是特殊的相对正合 2-范畴<sup>[5]</sup>. 拉回与推出是范畴中两个重要的对偶概念, 在几何上分别称为纤维积与纤维余积, 在范畴论、同调代数、代数表示论和代数几何等领域有着重要的应用. 最近几年, 拉回与推出理论有了一些新的发展<sup>[6-9]</sup>. Nakaoka 给出了 2-范畴中拉回的定义, 并证明了相对正合 2-范畴中拉回的存在性<sup>[5]</sup>. 2-范畴的拉回在 2-范畴的上同调理论中占着重要的地位<sup>[5]</sup>. 本文从 2-范畴的终对象、积等角度, 给出 2-范畴中拉回的几种等价定义.

1 2-范畴的定义与例子

**定义 1**<sup>[2]</sup> 一个(严格)2-范畴  $S$  包括以下几条: 1) 对象类  $S^0$ ; 2) 对  $S$  中的任意两个对象  $A, B$  有小范畴  $S(A, B)$ ; 3) 对  $S$  中的任意 3 个对象  $A, B, C$ , 有双函子  $C_{ABC} : S(A, B) \times S(B, C) \rightarrow S(A, C)$ ; 4) 对  $S$  中的任意对象  $A$ , 有函子  $U_A : \mathbf{1} \rightarrow S(A, A)$ , 其中  $\mathbf{1}$  为以小范畴为对象构成的范畴的终对象. 此外, 它还应满足如下两个公理.

**公理 1** 结合公理. 对  $S$  中的任意对象  $A, B, C, D$ , 有  $C_{ACD} \circ (C_{ABC} \times 1) = C_{ABD} \circ (1 \times C_{BCD})$ , 即图 1 可交换.

**公理 2** 单位公理. 对  $S$  中任意两个对象  $A, B$ , 有  $C_{AAB} \circ (U_A \times 1) \cong 1 \cong C_{ABB} \circ (1 \times U_B)$ , 即图 2 可交换.

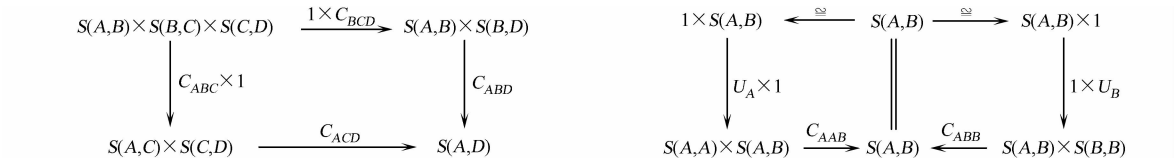


图 1 结合公理的交换  
Fig. 1 Commutation of associativity axiom

图 2 单位公理的交换  
Fig. 2 Commutation of unit axiom

**定义 2**<sup>[10]</sup> 一个(严格)(2,1)-范畴是一个2-范畴,其中这个2-范畴中所有2-态射均同构。

为叙述方便,作如下约定。

设  $S$  为一个(严格)2-范畴。 $S^0$  中元素称为0-态射,用大写字母  $A, B, C, \dots$  表示;范畴  $S(A, B)$  中的对象称为1-态射,用小写字母  $a, b, c, \dots$  表示,记  $S^1(A, B)$  表示从  $A$  到  $B$  的所有1-态射构成的集合。范畴  $S(A, B)$  中的态射称为2-态射,用希腊字母  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  表示,记  $S^2(f, g)$  表示从  $f$  到  $g$  的所有2-态射构成的集合。

对任意  $f \in S^1(A, B), g \in S^1(B, C)$ , 1-态射对  $(f, g)$  在函子  $C_{ABC}$  下的象记为  $g \circ f$ , 称为1-态射  $f$  和  $g$  的合成。易证, 对象类  $S^0$ , 1-态射集及1-态射之间的合成构成一个范畴。对任意  $f, f' \in S^1(A, B), g, g' \in S^1(B, C)$ , 任意  $\alpha \in S^2(f, f'), \beta \in S^2(g, g')$ , 2-态射对  $(\alpha, \beta)$  在函子  $C_{ABC}$  下的象记为  $\beta * \alpha$ , 称为2-态射  $\alpha$  和  $\beta$  的水平合成。1中唯一一对象在单位函子  $U_A$  作用下的象记为  $id_A: A \rightarrow A$ 。范畴  $S(A, A)$  中对象  $id_A$  的单位态射记为  $id_{id_A}$ 。

**注 1** 在图中, “ $\rightarrow$ ”表示1-态射; “ $\Rightarrow$ ”表示2-态射; “ $*$ ”表示2-态射的水平合成; “ $\circ$ ”表示2-态射的垂直合成或1-态射的合成。

下面介绍两个2-范畴的基本例子。

**例 1** 设  $\mathcal{C}$  是一个一般范畴, 对  $\mathcal{C}$  中任意两个对象  $A, B$ , 将态射集  $\mathcal{C}(A, B)$  看成离散范畴, 则  $\mathcal{C}$  是一个2-范畴。

**例 2** 以所有的小范畴为对象, 小范畴之间的函子为1-态射, 函子之间的自然变换为2-态射构成一个2-范畴, 记为  $Cat$ 。

下面从2-范畴  $S$  出发, 构造两个2-范畴  $\mathcal{R}$  与  $\mathcal{E}$ 。

**例 3** 设  $S$  是2-范畴,  $A_1, A_2, B \in S^0, f_1 \in S^1(A_1, B), f_2 \in S^1(A_2, B)$ , 则构造如下2-范畴  $\mathcal{R}$ 。

1) 对象为  $S$  中的四元组  $(W, g_1, g_2, \phi)$ , 其中  $W \in S^0, g_1 \in S^1(W, A), g_2 \in S^1(W, A_2), \phi \in S^2(f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2)$ 。

2) 从  $(W', g'_1, g'_2, \phi')$  到  $(W, g_1, g_2, \phi)$  的1-态射定义为  $S$  中的三元组  $(k, \alpha_1, \beta_1)$ , 且使得图3可交换。其中:  $k \in S^1(W', W), \alpha_1 \in S^2(g'_1 \circ k, g'_1), \beta_1 \in S^2(g'_2 \circ k, g'_2)$ 。

3) 设  $(k', \alpha'_1, \beta'_1): (W'', g''_1, g''_2, \phi'') \rightarrow (W', g'_1, g'_2, \phi')$  是1-态射。定义1-态射的合成  $(k, \alpha_1, \beta_1) \circ (k', \alpha'_1, \beta'_1) = (k \circ k', \alpha'_1 \circ (\alpha_1 * id_{k'}), \beta'_1 \circ (\beta_1 * id_{k'}))$ 。

4) 设  $(k_i, \alpha_i, \beta_i) (i=1, 2)$  为从  $(W', g'_1, g'_2, \phi')$  到  $(W, g_1, g_2, \phi)$  的1-态射, 定义它们之间的2-态射为  $\xi \in S^2(k_1, k_2)$ , 使得  $\alpha_1 = \alpha_2 \circ (id_{g_1} * \xi), \beta_1 = \beta_2 \circ (id_{g_2} * \xi)$ 。

5) 设  $(k_i, \alpha_i, \beta_i) (i=1, 2, 3)$  为从  $(W', g'_1, g'_2, \phi')$  到  $(W, g_1, g_2, \phi)$  的1-态射,  $\xi_1$  为从  $(k_1, \alpha_1, \beta_1)$  到  $(k_2, \alpha_2, \beta_2)$  的2-态射,  $\xi_2$  为从  $(k_2, \alpha_2, \beta_2)$  到  $(k_3, \alpha_3, \beta_3)$  的2-态射, 且定义2-态射的垂直合成为  $\xi_2 \circ \xi_1 \in S^2(k_1, k_3)$ , 使得  $\alpha_1 = \alpha_3 \circ [id_{g_1} * (\xi_2 \circ \xi_1)], \beta_1 = \beta_3 \circ [id_{g_2} * (\xi_2 \circ \xi_1)]$ 。

6) 定义2-态射的水平合成, 如图4所示。

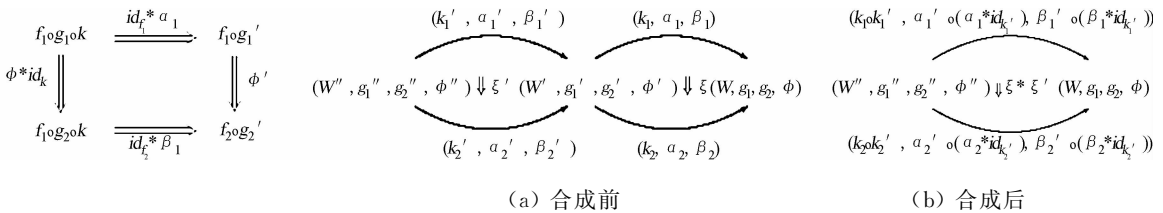


图3 三元组  $(k, \alpha_1, \beta_1)$  满足的交换图

图4 2-态射的水平合成

Fig. 3 Commutation diagram of triple  $(k, \alpha_1, \beta_1)$

Fig. 4 Horizontal composition of 2-cell

由此可验证所定义的  $\mathcal{R}$  是一个2-范畴。

**例 4** 设  $S$  是一个2-范畴,  $B \in S^2$ , 则构造如下2-范畴  $\mathcal{E}$ 。

1) 对象形如  $S$  中1-态射  $f \in S^1(A, B)$ , 其中  $A \in S^0$ 。

2) 对任意两个对象  $f_1 \in S^1(A_1, B), f_2 \in S^1(A_2, B)$ , 其中  $A_1, A_2 \in S^0$ , 定义  $f_1$  到  $f_2$  的1-态射为  $(h_1, \xi_1)$ , 其中  $h_1 \in S^1(A_1, A_2), \xi_1 \in S^2(f_1, f_2 \circ h_1)$ 。

3) 对任意3个对象  $f \in S^1(A, B), f_1 \in S^1(A_1, B), f_2 \in S^1(A_2, B)$ , 设  $(h, \xi)$  为  $f$  到  $f_1$  的1-态射,

其中  $h \in S^1(A, A_1), \xi \in S^2(f, f_1 \circ h)$ , 设  $(h_1, \xi_1)$  为  $f_1$  到  $f_2$  的 1-态射, 其中  $h_1 \in S^1(A_1, A_2), \xi_1 \in S^2(f_1, f_2 \circ h_1)$ , 定义 1-态射的合成  $(h_1, \xi_1) \circ (h, \xi) = (h_1 \circ h, (\xi_1 * id_h) \circ \xi)$ .

4) 设  $(h, \xi), (h', \xi')$  均为  $f$  到  $f_1$  的 1-态射, 定义  $(h, \xi)$  到  $(h', \xi')$  的 2-态射  $\delta \in S^2(h, h')$ , 使得  $\xi' = (id_{f_1} * \delta) \circ \xi$ .

5) 设  $(h, \xi), (h', \xi'), (h'', \xi'')$  均为  $f$  到  $f_1$  的 1-态射,  $\delta$  是  $(h, \xi)$  到  $(h', \xi')$  的 2-态射,  $\delta'$  是  $(h', \xi')$  到  $(h'', \xi'')$  的 2-态射, 则  $\xi'' = (id_{f_1} * \delta') \circ \xi' = (id_{f_1} * \delta') \circ (id_{f_1} * \delta) \circ \xi = [id_{f_1} * (\delta' \circ \delta)] \circ \xi$ . 定义 2-态射的垂直合成为  $S$  中 2-态射  $\delta$  和  $\delta'$  的垂直合成  $\delta' \circ \delta$ .

6) 定义 2-态射  $\delta_1$  和  $\delta_2$  的水平合成, 如图 5 所示. 图 5(a) 中:  $(h_1, \xi_1), (h'_1, \xi'_1)$  为从  $f_1$  到  $f_2$  的 1-态射,  $(h_2, \xi_2), (h'_2, \xi'_2)$  为从  $f_2$  到  $f_3$  的 1-态射,  $\delta_1$  为  $(h_1, \xi_1)$  到  $(h'_1, \xi'_1)$  的 2-态射,  $\delta_2$  为  $(h_2, \xi_2)$  到  $(h'_2, \xi'_2)$  的 2-态射, 则有  $\xi'_1 = (id_{f_2} * \delta_1) \circ \xi_1, \xi'_2 = (id_{f_3} * \delta_2) \circ \xi_2$ . 一方面,  $(\xi'_2 * id_{h'_1}) \circ \xi'_1 = (\xi'_2 * id_{h'_1}) \circ (id_{f_2} * \delta_1) \circ \xi_1 = [(\xi'_2 * id_{f_2}) * (id_{h'_1} \circ \delta_1)] \circ \xi_1 = (\xi'_2 * \delta_1) \circ \xi_1$ ; 另一方面  $[id_{f_3} * (\delta_2 * \delta_1)] \circ [(\xi_2 * id_{h_1}) \circ \xi_1] = [(id_{f_3} * \delta_2) * \delta_1] \circ (\xi_2 * id_{h_1}) \circ \xi_1 = \{[(id_{f_3} * \delta_2) \circ \xi_2] * (\delta_1 \circ id_{h_1})\} \circ \xi_1 = [\xi'_2 * (\delta_1 \circ id_{h_1})] \circ \xi_1 = (\xi'_2 * \delta_1) \circ \xi_1$ , 故  $(\xi'_2 * id_{h'_1}) \circ \xi'_1 = [id_{f_3} * (\delta_2 * \delta_1)] \circ [(\xi_2 * id_{h_1}) \circ \xi_1]$ .

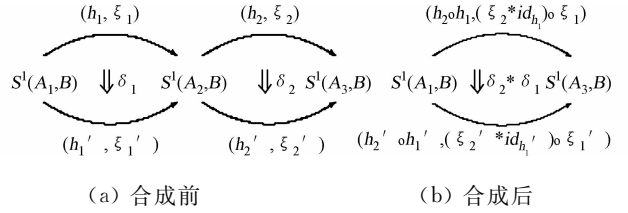


图 5 2-态射  $\delta_1$  和  $\delta_2$  的水平合成

Fig. 5 Horizontal composition of 2-cells  $\delta_1$  and  $\delta_2$

由此可验证定义的  $\mathcal{C}$  为一个 2-范畴. 特别地, 若  $S$  是  $(2, 1)$ -范畴, 则  $\mathcal{C}$  显然也是一个  $(2, 1)$ -范畴.

## 2 2-范畴中的拉回

**定义 3**<sup>[5]</sup> 设  $S$  是一个 2-范畴, 对任意  $A_1, A_2, B \in S^0$ , 任意  $f_i \in S^1(A_i, B) (i=1, 2)$ ,  $f_1$  与  $f_2$  的拉回  $(A_1 \times_B A_2, f'_1, f'_2, \xi)$ , 定义如下.

- a)  $A_1 \times_B A_2 \in S^0, f'_1 \in S^1(A_1 \times_B A_2, A_1), f'_2 \in S^1(A_1 \times_B A_2, A_2), \xi \in S^2(f_1 \circ f'_1, f_2 \circ f'_2)$ .
- b) 分解的存在性. 对任意  $X \in S^0, g_1 \in S^1(X, A_1), g_2 \in S^1(X, A_2), \eta \in S^2(f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2)$ , 存在  $(g, \xi_1, \xi_2)$ , 其中  $g \in S^1(X, A_1 \times_B A_2), \xi_i \in S^2(f'_i \circ g, g_i), i=1, 2$ . 使得  $\eta \circ (id_{f_1} * \xi_1) = (id_{f_2} * \xi_2) \circ (\xi * id_g)$ .
- c) 分解的唯一性. 若还有  $(g', \xi'_1, \xi'_2)$  满足分解的存在性, 则存在唯一的 2-态射  $\zeta \in S^2(g, g')$ , 使得  $\xi_i = \xi'_i \circ (id_{f'_i} * \zeta), i=1, 2$ .

**定义 4** 2-范畴  $S$  的终对象是指一个对象  $A$ , 使得 1) 对任意  $B \in S^0$ , 存在  $f \in S^1(B, A)$ ; 2) 对任意  $g \in S^1(B, A)$ , 存在唯一的 2-态射  $\xi \in S^2(f, g)$ .

**定理 1** 设  $S$  为 2-范畴, 设  $A_1, A_2, B \in S^0, f_1 \in S^1(A_1, B), f_2 \in S^1(A_2, B)$ , 则 2-范畴  $S$  中  $f_1$  与  $f_2$  的拉回与例 3 中的 2-范畴  $\mathcal{R}$  的终对象相互确定.

**证明** 根据 2-范畴  $\mathcal{R}$  的构造知, 2-范畴  $S$  中  $f_1$  与  $f_2$  的拉回  $(A_1 \times_B A_2, f'_1, f'_2, \xi)$  是 2-范畴  $\mathcal{R}$  的终对象; 反之, 设  $(W, g_1, g_2, \phi)$  为 2-范畴  $\mathcal{R}$  的终对象, 则对任意  $(W', g'_1, g'_2, \phi') \in \mathcal{R}$ , 存在 1-态射  $(k, \alpha_1, \beta_2)$ , 使得  $\phi' \circ (id_{f_1} * \alpha_1) = (id_{f_2} * \beta_2) \circ (\phi * id_k)$ .

若  $(k', \alpha'_1, \beta'_2)$  也是  $(W', g'_1, g'_2, \phi')$  到  $(W, g_1, g_2, \phi)$  的 1-态射, 因为  $(W, g_1, g_2, \phi)$  为终对象, 所以存在唯一的  $\xi \in S^2(k, k')$ , 使得  $\alpha_1 = \alpha'_1 \circ (id_{g_1} * \xi), \beta_2 = \beta'_2 \circ (id_{g_2} * \xi)$ , 所以  $(W, g_1, g_2, \phi)$  为  $f_1$  与  $f_2$  的拉回.

**定义 5**<sup>[5]</sup> 设  $S$  是一个 2-范畴, 对任意  $A_1, A_2 \in S^0$ , 它们的积  $(A_1 \times A_2, p_1, p_2)$ , 定义如下.

- a)  $A_1 \times A_2 \in S^0, p_i \in S^1(A_1 \times A_2, A_i), i=1, 2$ ;
- b) 分解的存在性. 对任意  $X \in S^0, q_i \in S^1(X, A_i) (i=1, 2)$ , 存在  $(q, \xi_1, \xi_2)$ , 其中  $q \in S^1(X, A_1 \times A_2), \xi_i \in S^2(p_i \circ q, q_i), i=1, 2$ .
- c) 分解的唯一性. 若还有  $(q', \xi'_1, \xi'_2)$  满足分解的存在性, 则存在唯一的 2-态射  $\zeta \in S^2(q, q')$ , 使得  $\xi_i = \xi'_i \circ (id_{p_i} * \zeta), i=1, 2$ .

**定理 2** 设  $S$  为  $(2, 1)$ -范畴,  $A_1, A_2, B \in S^0, f_1 \in S^1(A_1, B), f_2 \in S^1(A_2, B)$ , 则 2-范畴  $S$  中  $f_1$  与  $f_2$

的拉回与  $f_1$  与  $f_2$  在例 4 中的 2-范畴  $\mathcal{C}$  中的积相互确定.

证明 1) 设  $f_1$  与  $f_2$  在 2-范畴  $\mathcal{C}$  中的积为  $(f, p_1, p_2)$ , 其中  $f = \mathcal{C}^0$ ,  $p_i \in \mathcal{C}^1(f, f_i)$ , 即  $f \in S^1(C, B)$ ,  $p_i = (a_i, \alpha_i)$ , 其中  $a_i \in S^1(C, A_i)$ ,  $\alpha_i \in S^2(f, f_i \circ a_i)$ ,  $i=1, 2$ . 由此可确定  $(C, a_1, a_2, \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})$  就是 2-范畴  $S$  中  $f_1$  与  $f_2$  的拉回.

对任意  $X \in S^0$ ,  $b_1 \in S^1(X, A_1)$ ,  $b_2 \in S^1(X, A_2)$ ,  $\eta \in S^2(f_1 \circ b_1, f_2 \circ b_2)$ , 令  $g = f_1 \circ b_1 \in S^1(X, B)$ , 则  $id_g \in S^2(g, g)$ ,  $\eta \in S^2(g, f_2 \circ b_2)$ . 令  $q_1 = (b_1, id_g) \in \mathcal{C}^1(g, f_1)$ ,  $q_2 = (b_2, \eta) \in \mathcal{C}^1(g, f_2)$ , 则有  $\mathcal{C}$  中的三元组  $(g, q_1, q_2)$ . 由 2-范畴  $\mathcal{C}$  中  $f_1$  与  $f_2$  积的泛性, 存在  $q = (h, \xi) \in \mathcal{C}^1(g, f)$ ,  $\beta_1 \in \mathcal{C}^2 \times (p_1 \circ q, q_1)$ ,  $\beta_2 \in \mathcal{C}^2(p_2 \circ q, q_2)$ , 其中  $h \in S^1(X, C)$ ,  $\xi \in S^2(g, f \circ h)$ ,  $\beta_1 \in S^2(a_1 \circ h, b_1)$ ,  $\beta_2 \in S^2(a_2 \circ h, b_2)$ , 且  $id_g = (id_{f_1} * \beta_1) \circ (\alpha_1 * id_h) \circ \xi$ ,  $\eta = (id_{f_2} * \beta_2) \circ (\alpha_2 * id_h) \circ \xi$ . 则  $\xi = (\alpha_1^{-1} * id_h) \circ (id_{f_1} * \beta_1^{-1})$ .

因为  $\eta \circ (id_{f_1} * \beta_1) = (id_{f_2} * \beta_2) \circ (\alpha_2 * id_h) \circ \xi \circ (id_{f_1} * \beta_1) = (id_{f_2} * \beta_2) \circ (\alpha_2 * id_h) \circ (\alpha_1^{-1} * id_h) \circ (id_{f_1} * \beta_1^{-1}) \circ (id_{f_1} * \beta_1) = (id_{f_2} * \beta_2) \circ (\alpha_2 * id_h) \circ (\alpha_1^{-1} * id_h) = (id_{f_2} * \beta_2) \circ [(\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}) * id_h]$ , 所以有 2-范畴  $S$  中的三元组  $(h, \beta_1, \beta_2)$ , 使得图 6 可交换.

若还有 2-范畴  $S$  中的三元组  $(h', \beta'_1, \beta'_2)$ , 其中  $h' \in S^1(X, C)$ ,  $\beta'_1 \in S^2(a_1 \circ h', b_1)$ ,  $\beta'_2 \in S^2(a_2 \circ h', b_2)$ , 使得图 7 可交换.

令  $\xi' = (\alpha_1^{-1} * id_{h'}) \circ (id_{f_1} * \beta_1^{-1})$ , 则  $q' = (h', \xi') \in \mathcal{C}^1(g, f)$ . 从而  $p_1 \circ q' = (a_1, \alpha_1) \circ (h', \xi') = (a_1 \circ h', (\alpha_1 * id_{h'}) \circ \xi') = (a_1 \circ h', id_{f_1} * \beta_1^{-1}) \in \mathcal{C}^1(g, f_1)$ ,  $p_2 \circ q' = (a_2, \alpha_2) \circ (h', \xi') = (a_2 \circ h', (\alpha_2 * id_{h'}) \circ \xi') \in \mathcal{C}^1(g, f_2)$ .

注意到,  $q_1 = (b_1, id_g)$ ,  $q_2 = (b_2, \eta)$ ,  $\eta = (id_{f_2} * \beta'_2) \circ [(\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}) * id_{h'}] \circ (id_{f_1} * \beta_1^{-1}) = (id_{f_2} * \beta'_2) \circ (\alpha_2 * id_{h'}) \circ (\alpha_1^{-1} * id_{h'}) \circ (id_{f_1} * \beta_1^{-1}) = (id_{f_2} * \beta'_2) \circ (\alpha_2 * id_{h'}) \circ \xi'$ ,  $id_g = (id_{f_1} * \beta'_1) \circ (\alpha_1 * id_{h'}) \circ \xi'$ . 因此, 显然有  $\beta'_1 \in \mathcal{C}^2(p_1 \circ q', q_1)$ ,  $\beta'_2 \in \mathcal{C}^2(p_2 \circ q', q_2)$ . 所以存在  $\mathcal{C}$  中三元组  $(q', \beta'_1, \beta'_2)$  满足定义 5 中的 b).

由 2-范畴  $\mathcal{C}$  中  $f_1$  与  $f_2$  的积的泛性知, 存在唯一的 2-态射  $\sigma \in \mathcal{C}^2(q, q')$ , 使得在 2-范畴  $\mathcal{C}$  中  $\beta_i = \beta'_i \circ (id_{p_i} * \sigma)$  ( $i=1, 2$ ), 即图 8 可交换. 所以  $\sigma \in S^2(h, h')$ , 且在 2-范畴  $S$  中  $\beta_i = \beta'_i \circ (id_{a_i} * \sigma)$ ,  $i=1, 2$ .

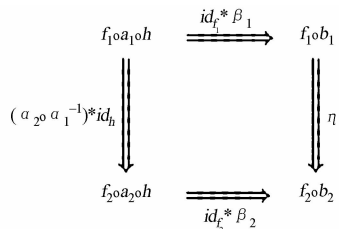


图 6 三元组  $(h, \beta_1, \beta_2)$  满足的交换图

Fig. 6 Commutation diagram of triple  $(h, \beta_1, \beta_2)$

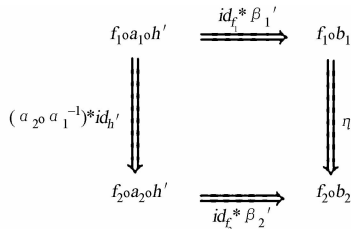


图 7 三元组  $(h', \beta'_1, \beta'_2)$  满足的交换图

Fig. 7 Commutation diagram of triple  $(h', \beta'_1, \beta'_2)$

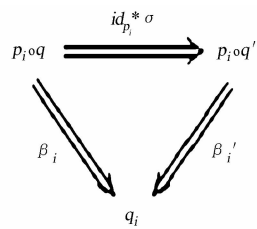


图 8 2-范畴  $S$  中 2-态射  $\sigma$  满足的交换图

Fig. 8 Commutation diagram of 2-cell  $\sigma$  in 2-category  $S$

2) 设  $f_1$  与  $f_2$  在 2-范畴  $S$  中的拉回为  $(A_1 \times_B A_2, a_1, a_2, \eta)$ , 其中  $a_1 \in S^1(A_1 \times_B A_2, A_1)$ ,  $a_2 \in S^1(A_1 \times_B A_2, A_2)$ ,  $\eta \in S^2(f_1 \circ a_1, f_2 \circ a_2)$ . 由  $f_1 \circ a_1 \in S^1(A_1 \times_B A_2, B)$  知,  $f_1 \circ a_1 \in \mathcal{C}^0$ , 且  $id_{f_1 \circ a_1} \in S^2(f_1 \circ a_1, f_1 \circ a_1)$ . 令  $p_1 = (a_1, id_{f_1 \circ a_1})$ ,  $p_2 = (a_2, \eta)$ , 则  $p_i \in \mathcal{C}^1(f_1 \circ a_1, f_i)$ ,  $i=1, 2$ . 由此可确定  $(f_1 \circ a_1, p_1, p_2)$  是 2-范畴  $\mathcal{C}$  中  $f_1$  与  $f_2$  的积.

对任意  $g \in \mathcal{C}^0$ , 有  $g \in S^1(X, B)$ , 其中  $X \in S^0$ . 对任意  $q_i = (b_i, \beta_i) \in \mathcal{C}^1(g, f_i)$ , 其中  $b_i \in S^1(X, A_i)$ ,  $\beta_i \in S^2(g, f_i \circ b_i)$ ,  $i=1, 2$ , 则  $\beta_2 \circ \beta_1^{-1} \in S^2(f_1 \circ b_1, f_2 \circ b_2)$ . 因为  $(A_1 \times_B A_2, a_1, a_2, \eta)$  为 2-范畴  $S$  中  $f_1$  与  $f_2$  的拉回, 所以存在  $S$  中的三元组  $(h, \alpha_1, \alpha_2)$ , 其中  $h \in S^1(X, A_1 \times_B A_2)$ ,  $\alpha_1 \in S^2(a_1 \circ h, b_1)$ ,  $\alpha_2 \in S^2(a_2 \circ h, b_2)$ , 使得图 9 可交换.

则  $\beta_2 \circ \beta_1^{-1} = (id_{f_2} * \alpha_2) \circ (\eta * id_h) \circ (id_{f_1} * \alpha_1^{-1})$ . 令  $\tau = (id_{f_1} * \alpha_1^{-1}) \circ \beta_1$ , 则  $\tau \in S^2(g, f_1 \circ a_1 \circ h)$ , 从而有  $q = (h, \tau) \in \mathcal{C}^1(g, f_1 \circ a_1)$ . 因为  $\beta_1 = (id_{f_1} * \alpha_1) \circ (id_{f_1 \circ a_1} * id_h) \circ \tau$ ,  $\beta_2 = (id_{f_2} * \alpha_2) \circ (\eta * id_h) \circ \tau$ . 所以有  $\alpha_1 \in \mathcal{C}^2(p_1 \circ q, q_1)$ ,  $\alpha_2 \in \mathcal{C}^2(p_2 \circ q, q_2)$ . 这样就找到了 2-范畴  $\mathcal{C}$  中的三元组  $(q, \alpha_1, \alpha_2)$ .

若还有  $\mathcal{C}$  中的三元组  $(q', \alpha'_1, \alpha'_2)$ , 其中  $q' = (h', \tau') \in \mathcal{C}^1(g, f_1 \circ a_1)$ ,  $\alpha'_i \in \mathcal{C}^2(p_i \circ q', q_i)$ , 这里  $h' \in S^1(X, A_1 \times_B A_2)$ ,  $\tau' \in S^2(g, f_1 \circ a_1 \circ h')$ ,  $\alpha'_i \in S^2(a_i \circ h', b_i)$ , 且  $\beta_1 = (id_{f_1} * \alpha'_1) \circ (id_{f_1 \circ a_1} * id_{h'}) \circ \tau'$ ,  $\beta_2 =$

$(id_{f_2} * \alpha'_2) \circ (\eta * id_{h'}) \circ \tau'$ , 则  $\beta_1^{-1} = \tau'^{-1} \circ (id_{f_1 * a_1} * id_{h'}) \circ (id_{f_1} * \alpha_1^{-1})$ . 因为  $(\beta_2 \circ \beta_1^{-1}) \circ (id_{f_1} * \alpha'_1) = (id_{f_2} * \alpha'_2) \circ (\eta * id_{h'}) \circ \tau' \circ \tau'^{-1} \circ (id_{f_1 * a_1} * id_{h'}) \circ (id_{f_1} * \alpha_1^{-1}) \circ (id_{f_1} * \alpha'_1) = (id_{f_2} * \alpha'_2) \circ (\eta * id_{h'})$ , 所以有 2-范畴  $S$  中的三元组  $(h', \alpha'_1, \alpha'_2)$ , 且满足交换图 10.

由 2-范畴  $S$  中  $f_1$  与  $f_2$  的拉回的泛性知, 存在唯一的 2-态射  $\sigma \in S^2(h, h')$ , 使得  $\alpha_i = \alpha'_i \circ (id_{a_i} * \sigma)$  ( $i=1, 2$ ), 所以  $\sigma \in \mathcal{E}^2(q, q')$ , 并且在 2-范畴  $\mathcal{E}$  中  $\alpha_i = \alpha'_i \circ (id_{p_i} * \sigma)$  ( $i=1, 2$ ), 即图 11 可交换.

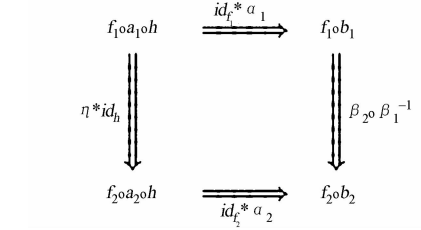


图 9 三元组  $(h, \alpha_1, \alpha_2)$  满足的交换图

Fig. 9 Commutation diagram of triple  $(h, \alpha_1, \alpha_2)$

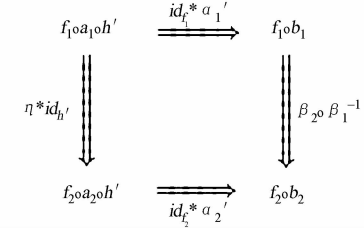


图 10 三元组  $(h', \alpha'_1, \alpha'_2)$  满足的交换图

Fig. 10 Commutation diagram of triple  $(h', \alpha'_1, \alpha'_2)$

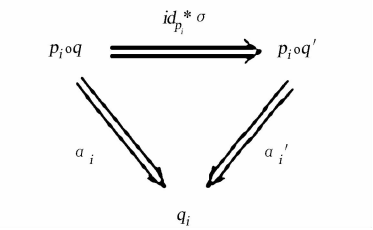


图 11 2-范畴  $\mathcal{E}$  中 2-态射  $\sigma$  满足的交换图

Fig. 11 Commutation diagram of 2-cell  $\sigma$  in 2-category  $\mathcal{E}$

参考文献:

[1] EHRESMANN C. Catégories et structures[M]. Paris: Dunod,1965:1-358.  
[2] BORCEUX F. Handbook of categorical algebra; Categories of sheaves[M]. Cambridge: Cambridge University Press,1994:281-324.  
[3] VITALE E M. The brauer and brauer-taylor of a symmetric monoidal category[J]. Cahie-Rs de Topologie et Geometrie Differentielle Cate,1996,37(2):91-122.  
[4] VITALE E M. A Picard-Brauer exact sequence of categorical groups[J]. Journal of Pure and Applied Algebra,2002,20(16):543-604.  
[5] NAKAOKA H. Cohomology theory in 2-categories[J]. Theory and Applications of Categories,2008,20(16):543-604.  
[6] 沈婧芳. 推出范畴的性质[D]. 武汉:华中师范大学,2006:1-21.  
[7] 沈婧芳,杨飞. 加法范畴的推出范畴[J]. 华中师范大学学报:自然科学版,2008,42(3):343-345.  
[8] 连冠勤. Abel 范畴的推出范畴的若干研究及其应用[D]. 福州:福建师范大学,2009:5-39.  
[9] 陈清华,薛蓉华,严益水. 加法范畴的极限范畴是加法范畴[J]. 福建师范大学学报:自然科学版,2010,26(6):16-19.  
[10] DE JONG A J. The stacks project[EB/OL]. [2012-10-19]http://stacks.math.columbia.edu/browse.

Equivalent Definitions of Pullback in 2-Category

LIU Na, LIN Zeng-qiang

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** In this paper, given a 2-category  $S$ , we construct two 2-categories  $\mathcal{R}$  and  $\mathcal{E}$ , and show that the pullback in  $S$ , the final object in  $\mathcal{R}$  and the product in  $\mathcal{E}$  are the same. Thus, we get some equivalent definitions of pullback in 2-category.  
**Keywords:** 2-category; pullback; product; final object

(责任编辑: 钱筠 英文审校: 黄心中)