第 34 卷　第 5 期　　　华侨大学学报（自然科学版）　　　Vol. 34　No. 5
2013 年 9 月　　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　　Sep. 2013

文章编号：1000-5013(2013)05-0586-05　　　**doi**：10.11830/ISSN.1000-5013.2013.05.0586

二阶微分方程积分边值问题正解的存在性

陈东晓，陈应生

（华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021）

摘要： 研究一类满足 Sturm-Liouville 积分边值条件的二阶非线性微分方程的正解存在性.通过转化为等价的积分方程，利用锥上不动点定理及一些分析技巧，建立边值问题存在一个和多个正解的充分条件.该边值条件含有勒贝格-斯梯阶积分，所得的结果是新的.

关键词： 锥；正解；边值问题；不动点理论；Sturm-Liouville 积分

中图分类号： O 175.8　　　**文献标志码：** A

1 预备知识

近年来，掀起了微分方程边值问题研究的热潮[1-8].考虑满足 Sturm-Liouville 积分边值条件

$$\left.\begin{aligned}&x''(t)+h(t)f(t,x(t))=0,\quad t\in[0,1],\\&ax(0)-bx'(0)=0,\\&cx(1)+dx'(1)=\int_0^1 x(t)\mathrm{d}\Lambda(t)=\lambda[x]\end{aligned}\right\}\tag{P}$$

二阶微分方程正解的存在性. 式(P)中：$\lambda[x]=\int_0^1 x(t)\mathrm{d}\Lambda(t)$ 为勒贝格-斯梯阶积分(S-J 积分)，$\Lambda(t)$为$[0,1]$上有界变差函数.假设

H$_1$）$f\in C(J\times R_+,R_+)$.

H$_2$）$h\in C(J,R_+)$，其中 h 在$[0,1]$的任何子区间上都不恒为零.

当$\lambda[x]=0$ 时，就是 Sturm-Liouville 边值条件情况；当$\lambda[x]=0$ 且 $b=c=0$ 时，就是文献[2]研究的情形；当 $\Lambda(t)=\sum_{i=1}^{m}a_i\chi(s-t_i)$ 时，其中 $\chi(s-t_i)=\begin{cases}1,s\geqslant t_i,\\0,s\geqslant t_i,\end{cases}$从而 $cx(1)+dx'(1)=\sum_{i=1}^{m}a_ix(t_i)$，这就是多点边值问题的情况[3-6].

对于积分边值的问题，通常都要求被积函数要恒正，这样算子的范数好估计[7-8].本文不需要对一切的非负函数 $x(t)$，$\lambda[x]$恒正，并且测度 $\mathrm{d}\Lambda$ 是可变号的，通过构造等价的算子，转化问题，构造恰当的锥，给出边值问题(P)具有一个和多个正解的充分条件.

2 一些引理及证明

令 $J=[0,1]$，设 $X=C(J,R)=\{x\in C(J,R)\}$，定义范数 $\|x\|=\sup\limits_{t\in J}|x(t)|$，则 X 是 Banach 空间.

引理 1(锥压缩锥拉伸不动点定理)　设 X 是 Banach 空间，K 是 X 中的一个锥，Ω_1 和 Ω_2 是 X 中的开集，且 $0\in\Omega_1$，$\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$，$T:K\cap\bar{\Omega}_2/\Omega_1\to K$ 是全连续算子，如果下列条件之一满足：

1）$\|Tx\|\leqslant\|x\|$，$x\in K\cap\partial\Omega_1$，$\|Tx\|\geqslant\|x\|$，$x\in K\cap\partial\Omega_2$；

2）$\|Tx\|\geqslant\|x\|$，$x\in K\cap\partial\Omega_1$，$\|Tx\|\leqslant\|x\|$，$x\in K\cap\partial\Omega_2$.

收稿日期： 2012-05-30
通信作者： 陈东晓(1977-)，男，讲师，主要从事常微分方程和泛函微分方程的研究.E-mail：cys19760828@163.com.
基金项目： 国务院侨办科研基金资助项目(09QZR10)

则算子 T 在 $K\cap(\bar{\Omega}_2/\Omega_1)$ 中有不动点.

引理 2　若条件 H_1), H_2)成立，则边值问题(P)有唯一解，即

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\frac{b+at}{\rho}\lambda[x]. \tag{1}$$

式(1)中：$G(t,s)=\dfrac{1}{\rho}\begin{cases}(b+as)(c+d-ct), 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\(b+at)(c+d-cs), 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\end{cases}\rho=ac+ad+bc.$

证明　由 $x''(t)=-y(t)$，可得 $x(t)=x(0)+x'(0)t-\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s$. 代入边值条件得

$$\begin{cases}ax(0)-bx'(0)=0,\\cx(1)+(c+d)x'(1)=\int_0^1(c+d-cs)y(s)\mathrm{d}s+\lambda[x].\end{cases}$$

所以，$x(0)=\dfrac{b}{\rho}\int_0^1(c+d-cs)y(s)\mathrm{d}s+\dfrac{b\lambda[x]}{\rho}$；$x'(0)=\dfrac{a}{\rho}\int_0^1(c+d-cs)y(s)\mathrm{d}s+\dfrac{a\lambda[x]}{\rho}$. 代入整理可得，$x(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s+\dfrac{(b+at)\lambda[x]}{\rho}$.

为方便讨论引入以下记号

$$\left.\begin{aligned}&\sigma=\min\left(\frac{d+c\theta}{d+c(1-\theta)},\frac{b+a\theta}{a+b(1-\theta)}\right),\qquad \theta\in[0,1/2),\\&A=\int_0^1\mathrm{d}\Lambda(t),\quad B=\int_0^1\frac{b+at}{\rho}\mathrm{d}\Lambda(t),\quad g(s)=\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}\Lambda(t),\quad C=\int_0^1 G(s,s)h(s)\mathrm{d}s,\\&D=\int_0^1 g(s)h(s)\mathrm{d}s,\quad L=\left[\frac{(a+b)D}{\rho(1-B)}+C\right],\quad M(\theta)=\int_\theta^{1-\theta}[\sigma G(s,s)+g(s)]h(s)\mathrm{d}s,\\&U_1(r)=\max_{(t,x)\in J\times[0,r]}f(t,x),\quad U_2(\theta,r)=\min_{(t,x)\in[\theta,1-\theta]\times[\sigma r,r]}f(t,x),\quad \theta\in[0,1/2),\\&\lim_{x\to+\infty}\sup\max_{t\in J}\frac{f(t,x)}{x}=\bar{f}_\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}\inf\min_{t\in J}\frac{f(t,x)}{x}=\underline{f}_\infty,\\&\lim_{x\to+0}\sup\max_{t\in J}\frac{f(t,x)}{x}=\bar{f}_0,\qquad \lim_{x\to+0}\inf\min_{t\in J}\frac{f(t,x)}{x}=\underline{f}_0.\end{aligned}\right\}\tag{M}$$

以下总令条件 H_3)成立

H_3) $A=\int_0^1\mathrm{d}\Lambda(t)\geqslant 0$，且 $0\leqslant B=\int_0^1\dfrac{b+at}{\rho}\mathrm{d}\Lambda(t)<1$.

引理 3　当 $\theta\in[0,1/2)$，有

$$\left.\begin{aligned}G(t,s)\leqslant G(s,s),\qquad & t,s\in[0,1],\\G(t,s)\geqslant\sigma G(s,s),\qquad & t\in[\theta,1-\theta].\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

为应用引理 1，定义属于 X 的锥为

$$K=\{x\in X:\min_{x\in[\theta,1-\theta]}x(t)\leqslant\sigma\|x\|,\lambda[x]\geqslant 0\}. \tag{3}$$

定义以下 2 个算子 T, S，对任意的 $x\in X$，令

$$Tx(t)=\frac{b+at}{\rho}\lambda[x]+Fx(t), \tag{4}$$

$$Sx(t)=\frac{b+at}{\rho(1-B)}\lambda[Fx]+Fx(t), \tag{5}$$

式(4)，(5)中：$Fx(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s$.

引理 4　设条件 H_1)～H_3)满足，则 $T:K\to K$.

证明　问题(P)有解当且仅当 x 是算子方程 $x=Tx$ 的解，则当 $x\in K$ 时，有 $(Tx)''(t)=-h(t)f(t,x(t))\leqslant 0$. 所以 Tx 是凸算子，且有 $Fx(0)\geqslant 0$, $Fx(1)\geqslant 0$，所以 $Tx(0)=Fx(0)+\dfrac{b}{\rho}\lambda[x]\geqslant 0$；$Tx(1)=Fx(1)+\dfrac{a+b}{\rho}\lambda[x]\geqslant 0$. 故而 $Tx(t)\geqslant 0$, $t\in J$.

$$\|Tx\|\leqslant\frac{a+b}{\rho}\lambda[x]+\int_0^1 G(s,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s.$$

$$\min_{t\in[\theta,1-\theta]} Tx(t) \geqslant \sigma[\lambda[x]+\int_0^1 G(s,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s] \geqslant \sigma\|Tx\|.$$

$$\lambda[x]=\lambda[x]\int_0^1 \frac{b+at}{\rho}\mathrm{d}\Lambda(t)+\int_0^1(\int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s)\mathrm{d}\Lambda(t)\geqslant 0.$$

所以 $T:K\to K$.

引理 5 假设条件 H_1)～H_3)满足,则 T 与 S 在 K 中有相同的不动点.

证明 由 $Tx(t)=\frac{b+at}{\rho}\lambda[x]+Fx(t)$得,若 T 在 K 中有不动点,则有

$$x(t)=\frac{b+at}{\rho}\lambda[x]+Fx(t).$$

两边同时积分得

$$\int_0^1 x(t)\mathrm{d}\Lambda(t)=\lambda[x]\int_0^1 \frac{b+at}{\rho}\mathrm{d}\Lambda(t)+\int_0^1 Fx(t)\mathrm{d}\Lambda(t).$$

所以 $\lambda[x]=\lambda[x]B+\lambda[Fx]$. 从而 $\lambda[x]=\frac{\lambda[Fx]}{1-B}$,所以 $Tx(t)=\frac{b+at}{\rho(1-B)}\lambda[Fx]+Fx(t)=Sx(t)$.

引理 6 算子 $T:K\to K$ 与 $S:K\to K$ 都是全连续算子.

证明 容易证明算子 T 是连续的. 设 Ω 是 K 中的任意子集,可以证明集合$\{Tx\mid x\in\Omega\}$中的函数在 J 上一致有界且等度连续,从而由 Ascoli-Arzela 定理,得算子 T 是全连续算子. 同样方法可以证明 S 也是全连续算子.

3 主要结论

令 $K_r=\{x\in K,\|x\|<r\}$,$\overline{K}_r=\{x\in K,\|x\|\leqslant r\}$.

定理 1 设条件 H_1)～H_3)成立,并且存在不同正数 $r,R,\theta\in[0,1/2)$,满足条件:A_1) $LU_1(R)\leqslant R$; A_2) $\sigma U_2(\theta,r)M(\theta)\geqslant r$. 则问题(P)至少存在一个正解 x^*,满足 $r\leqslant\|x^*\|\leqslant R$ 或者 $R\leqslant\|x^*\|\leqslant r$.

证明 不妨设 $r<R$,由 $T:K\to K$,$S:K\to K$,由引理 6,易得 T 和 S 都是全连续算子. 由引理 5,T 和 S 有相同的不动点,所以只须证明算子有不动点即可.

令 $\Omega_2=\{x\in X:\|x\|<R\}$,对于 $x\in\partial\Omega_2\cap K$,由式(2),(4)～(5)及引入的记号(M)有

$$\|F(x)\|\leqslant\int_0^1 G(s,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\leqslant\varphi(R)\int_0^1 G(s,s)h(s)\mathrm{d}s\leqslant C\varphi(R).$$

$$\begin{aligned}\lambda[Fx]=&\int_0^1 Fx(t)\mathrm{d}\Lambda(t)=\int_0^1(\int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,x(s)))\mathrm{d}s\mathrm{d}\Lambda(t)=\\&\int_0^1 h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}\Lambda(t)=\\&\int_0^1 g(s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\leqslant U_1(R)\int_0^1 g(s)h(s)\mathrm{d}s\leqslant U_1(R).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|Sx\|=&\max_{t\in J}Sx(t)\leqslant\frac{a+b}{\rho(1-B)}\lambda[Fx]+\|Fx\|\leqslant\\&\frac{a+b}{\rho(1-B)}DU_1(R)+CU_1(R)\leqslant LU_1(R)\leqslant R.\end{aligned}$$

所以有 $\|S(x)\|\leqslant\|x\|,x\in K_R$.

令 $\Omega_1=\{x\in X:\|x\|<r\}$,对于 $x\in\partial\Omega_1\cap K$,由式(3),(5)～(7)及引入的记号(M)有

$$\begin{aligned}\|F(x)\|\geqslant&\int_\theta^{1-\theta}G(t,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant\\&U_2(\theta,r)\int_\theta^{1-\theta}G(t,s)h(s)\mathrm{d}s\geqslant\sigma U_2(\theta,r)\int_\theta^{1-\theta}G(s,s)h(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda[Fx]=&\int_0^1 g(s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant\\&\int_\theta^{1-\theta}g(s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant U_2(\theta,r)\int_\theta^{1-\theta}g(s)h(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

$$\| Sx \| \geqslant U_2(\theta,r)\int_\theta^{1-\theta}[\sigma G(s,s)+g(s)]h(s)\mathrm{d}s = U_2(\theta,r)M(\theta) \geqslant r.$$

所以有 $\| S(x) \| \geqslant \| x \|, x \in K_r$.

根据引理 1,得方程(P)至少存在一个正解 x^*,满足 $r \leqslant \| x^* \| \leqslant R$.

推论 1　设条件 H_1)～H_3)成立,并且 $\theta\in[0,1/2)$,满足条件:A_1) $L\bar{f}_\infty<1$;A_2) $M(\theta)\underline{f}_0>1$. 则问题(P)至少存在一个正解.

证明　由条件 A_1)有存在 $\varepsilon_1>0$,使得 $L(\bar{f}_\infty+\varepsilon_1)\leqslant 1$. 由 $\bar{f}_\infty$ 的定义得,存在 $R>0$,使得 $U_1(R)\leqslant(\bar{f}_\infty+\varepsilon_1)R$,代入上式得定理 1 的条件 A_1)成立. 由于条件 A_2)存在 $\varepsilon_2>0$,使得 $M(\theta)(\underline{f}_0-\varepsilon_2)\geqslant 1$. 由 $\underline{f}_0$ 的定义得存在 $0<r<R$,使得 $U_2(\theta,r)(\leqslant\bar{f}_\infty+\varepsilon_1)r$,代入上式得定理 1 的条件 A_2)成立. 由定理 1 得方程(1)至少有一个正解 x^*,满足 $r\leqslant\| x^* \|\leqslant R$.

推论 2　设条件 H_1)～H_3)成立,并且 $\theta\in[0,1/2)$,满足条件:A_1) $L\bar{f}_0<1$;A_2) $\sigma M(\theta)\underline{f}_\infty\geqslant 1$. 则问题(P)至少存在一个正解.

证明　同推论 1.

推论 3　设条件 H_1)～H_3)成立,并且以下两个条件之一成立.

A_1) $L\bar{f}_\infty$ 且 $\underline{f}_0=\infty$;A_2) $\bar{f}_0=0$ 且 $\underline{f}_\infty=\infty$. 则问题(P)至少存在一个正解.

定理 2　设条件 H_1)～H_3)成立,并且存在正数 $r_1<r_2<\cdots<r_{2n+1}$,$\theta\in[0,1/2)$,使得以下两个条件之一满足:

A_1) $LU_1(r_{2i+1})<r_{2i+1}$,$i=0,1,2,\cdots,n$,并且 $U_2(\theta,r_{2i})M(\theta)\geqslant r_{2i}$,$i=1,2,\cdots,n$;

A_2) $LU_1(r_{2i})<r_{2i}$,$i=0,1,2,\cdots,n$,并且 $U_2(\theta,r_{2i+1})M(\theta)\geqslant r_{2i+1}$,$i=0,1,2,\cdots,n$.

则问题(P)至少有 $2n$ 个正解 x_i^*,满足 $r_i\leqslant\| x^* \|\leqslant r_{i+1}$,$i=1,2,\cdots,n$.

证明　仅证明 $n=3$ 的条件 A_1)情况,其余情形类似.

由所给条件 A_1)及定理 1 得方程(1)至少存在一个正解 x_1^*,满足 $r_1\leqslant\| x_1^* \|\leqslant r_2$. 同时存在一个正解 x_2^*,满足 $r_2\leqslant\| x_1^* \|\leqslant r_3$. 证毕.

定理 3　设条件 H_1)～H_3)成立,并且存在正数 $r_1<r_2<\cdots<r_{2n}$,$\theta\in[0,1/2)$,使得以下两个条件之一满足:

A_1) $LU_1(r_{2i+1})<r_{2i+1}$,$i=0,1,2,\cdots,n-1$ 并且 $U_2(\theta,r_{2i}M(\theta)\geqslant r_{2i}$,$i=1,2,\cdots,n$;

A_2) $LU_1(r_{2i})<r_{2i}$,$i=1,2,\cdots,n$ 并且 $U_2(\theta,r_{2i+1}M(\theta)\geqslant r_{2i+1}$,$i=0,1,2,\cdots,n-1$.

则问题(P)至少有 $2n-1$ 个正解 x_i^*,满足 $r_i\leqslant\| x_i^* \|\leqslant r_{i+1}$,$i=1,2,\cdots,2n-1$.

推论 4　设条件 H_1)～H_3)成立,并且存在正数 $\theta\in[0,1/2)$,$b>0$,使得以下 2 个条件满足:A_1) $L\bar{f}_\infty<1$ 且 $L\bar{f}_0<1$;A_2) $U_2(\theta,b)M(\theta)\geqslant b$. 则问题(P)至少有 2 个正解.

证明　由条件 A_1) 容易证明存在正数 $0<r<b<R$,使得 $LU_1(r)<r$ 与 $LU_1(R)<R$ 同时成立,根据定理 2 得问题(P)至少有两个正解.

4　例子

考察方程

$$\left.\begin{aligned} &x''(t)+f(t,x(t))=0,\quad t\in[0,1],\\ &x(0)=0,\qquad x(1)=\lambda[x].\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

其中:$\lambda[x]=-\int_0^1 x(s)\cos 2\pi s\mathrm{d}s$,$\Lambda(t)=-\cos 2\pi t\mathrm{d}t$,$f(t,x)=(\dfrac{20}{1+t^2})(4+\sin 2\pi t)\ln(1+16x^2)$.

经计算,有

$$\bar{f}_\infty=0,\qquad \bar{f}_0=0,\qquad G(t,s)=\begin{cases}t(1-s), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\\ (1-t)s, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

$$\rho=1,\qquad \sigma=\theta,\qquad A=\int_0^1\mathrm{d}\Lambda(t)=0,\qquad B=\int_0^1 t\mathrm{d}\Lambda(t)=0,$$

$$g(s)=\frac{1}{4\pi^2}[1-\cos 2\pi s]\geqslant 0,\qquad C=\frac{1}{4},\qquad D=\frac{1}{4\pi^2},$$

$$L=\frac{\pi^2+1}{4\pi^2},\qquad M(\theta)=\frac{\theta(1-2\theta-2\theta^2)}{6}+\frac{1}{4\pi^2}[1-2\theta-\frac{1}{2\pi}(\sin 2\pi(1-\theta)-\sin 2\pi\theta)],$$

$$M(\frac{1}{4})=\frac{1}{24}+\frac{1}{4\pi^2}[0.5-\frac{1}{2\pi}(\sin\frac{3}{2}\pi-\sin\frac{1}{2}\pi)]>0.062\,2,$$

$$U_2(\frac{1}{4},r)=\min_{(t,x)\in[\frac{1}{4},\frac{1}{3}]\times[\frac{1}{4}r,r]}f(t,x)\geqslant 30\ln(1+r^2),\qquad M(\frac{1}{4})U_2(\frac{1}{4},r)>1.8\ln(1+r^2).$$

取 $r=e$,则有 $M(\frac{1}{4})U_2(\frac{1}{4},e)>1.8\ln(1+e^2)>3.6>e=r$.

由推论 4 得方程(P)至少存在两个正解.

参考文献:

[1] KONG Ling-ju. Second order singular boundary value problems with integral boundary conditions[J]. Nonlinear Analysis: Theory Methods and Applications,2010,72(5):2628-2638.

[2] 曹君艳,王全义.一类二阶微分方程两点边值问题的正解存在性[J].华侨大学学报:自然科学版,2010,31(1):113-117.

[3] YANG Chen,ZHAI Cheng-bo,YAN Ju-rang. Positive solutions of the three-point boundary value problem for second order differential equations with an advanced argument[J]. Nonlinear Analysis: Theory Methods and Applications,2006,65(10):2013-2023.

[4] ZHANG Guo-wei,SUN Jing-xian. Positive solutions of m-point boundary value problems[J]. Math Anal Appl,2004,291(2):406-418.

[5] ZHAI Cheng-bo. Positive solutions for semi-positone three-point boundary value problems[J]. Journal of Computational and Applied Mathematic,2009,228(1):279-286.

[6] HAO Xi-nan,LIU Li-shan,WU Yong-hong. On positive solutions of an m-point nonhomogeneous singular boundary value problem[J]. Nonlinear Analysis: Theory Methods and Applications,2010,73(8):2532-2540.

[7] JIANG Ji-qiang,LIU Li-shan,WU Yong-hong. Second-order nonlinear singular Sturm-Liouville problems with integral boundary conditions[J]. Applied Mathematics and Computation,2009,215(4):1573-1582.

[8] CHASREECHAI S,TARIBOON J. Positive solutions to generalized second-order threeoint intergeral boundary-value problems[J]. Electronic Journal of Differential Equations,2011(14):1-14.

Existence Positive Solutions of Boundary Value Problems for Second Order Differential Equations with Integral Conditions

CHEN Dong-xiao, CHEN Ying-sheng

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: We study the existence of positive solutions for Strum-Liouville boundary value problems of second-order nonlinear functional differential equations. By converting problems into equivalent integral equations, using fixed point theory in cones and some analysis techniques, we obtain some sufficient conditions which guarantee the existence of one and multiple positive solutions for the problem. The conditions of boundary value in this paper contain Stieltijes integral, and the obtained results are new.

Keywords: cone; positive solution; boundary value; fixed point theory; Strum-Liouville integral

(责任编辑:黄晓楠 英文审校:黄心中)