第 34 卷 第 5 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 34 No. 5
2013 年 9 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Sep. 2013

文章编号:1000-5013(2013)05-0581-05 doi:10.11830/ISSN.1000-5013.2013.05.0581

算子矩阵法求高阶弱奇异积分微分方程数值解

牛红玲[1],郝玲[1],余志先[2]

(1. 河北民族师范学院 数学与计算机系,河北 承德 067000;
2. 上海理工大学 理学院,上海 200093)

摘要: 利用 Legendre 多项式的定义和性质,给出 Legendre 多项式微分算子矩阵,得到任意阶弱奇异积分的近似求积公式,并将原方程转换为代数方程.收敛性分析说明该方法是收敛的,数值算例验证了该方法的有效性和理论分析的正确性.

关键词: 高阶变系数;弱奇异积分;积分微分方程;Legendre 多项式;算子矩阵;数值解

中图分类号: O 241.8 **文献标志码:** A

算子矩阵的最大优点在于将原方程转化为代数方程组的形式,进而便于计算机编程求解,大大简化了求解方程的过程,且操作简单、精度高、实用性较强[1-3].科学与工程领域许多问题都可以转化为积分微分方程[4-6],而积分微分方程的数值解一直是近些年来研究的重要课题.考虑如下形式 Volterra-Fredholm 积分微分方程

$$\sum_{i=0}^{m} a_i(t)y^{(i)}(t)+\lambda_1\int_0^t (t-s)^{-\alpha}y(s)\mathrm{d}s+\lambda_2\int_0^1 k(t,s)y(s)\mathrm{d}s = f(t) \tag{1}$$

满足初始条件 $y^{(m-1)}(0)=y_{m-1},y^{(m-2)}(0)=y_{m-2},\cdots,y(0)=y_0$. 其中:$k(t,s),f(t),a_i(t)$是已知的连续函数;$y(t)$是未知函数且 $y(t)\in L^2([0,1])$;$y^{(i)}(t)$表示 $y(t)$的 i 阶导数;$\lambda_1,\lambda_2,\alpha$ 为常数,且 $0<\alpha<1$.对于 Volterra-Fredholm 积分微分方程,已经提出了很多种数值方法.如 K. Maleknejad[7]利用 Cattani′s 方法求一类线性 Fredholm 积分微分方程;S. M. Hosseini 等[8]应用 Tau 方法分别讨论了一类 Volterra 积分微分方程和 Fredholm 积分微分方程的数值解,并给出了误差分析.然而,有关高阶变系数且含有任意阶弱奇异积分核的 Volterra-Fredholm 积分微分方程数值解法的研究相对较少.基于此,本文给出了 Legendre 多项式算子矩阵法.

1 Legendre 多项式及其性质

区间上 Legendre 多项式可定义为下述递推关系[9],即

$$L_{i+1}(z)=\frac{2i+1}{i+1}zL_i(z)-\frac{i}{i+1}L_{i-1}(z),\qquad i=1,2,\cdots. \tag{2}$$

式(2)中:$L_0(z)=1$;$L_1(z)=z$.

为了得到 $x\in[0,1]$上的 Legendre 多项式,令 $z=2x-1$,则区间$[0,1]$上的 Legendre 多项式为

$$P_{i+1}(x)=\frac{(2i+1)(2x-1)}{(i+1)}P_i(x)-\frac{i}{i+1}P_{i-1}(x),\qquad i=1,2,\cdots. \tag{3}$$

式(3)中:$P_0(x)=1,P_1(x)=2x-1$.则 i 阶 Legendre 多项式 $P_i(x)$的解析形式为

$$P_i(x)=\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i+k}\frac{(i+k)!}{(i-k)!}\frac{x^k}{(k!)^2}.$$

收稿日期: 2013-04-07

通信作者: 牛红玲(1978-),女,讲师,主要从事分数阶微分方程数值解的研究.E-mail:g831020@126.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11101282)

对于任意 $P_i(x)$，$P_j(x)$，有

$$\int_0^1 P_i(x)P_j(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{2!+1}, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{4}$$

对于任意函数 $y(x)\in L^2[0,1]$，利用 Legendre 多项式展开为无穷级数，有

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j P_j(x). \tag{5}$$

式(5)中：系数 $c_j = (2j+1)\int_0^1 y(x)P_j(x)\,\mathrm{d}x$ ，$j=1,2,\cdots$. 实际应用中，通常取式(5)的前 $n+1$ 项，即

$$y(x) \cong \sum_{j=0}^{n} c_j P_j(x) = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(x). \tag{6}$$

其中：$\boldsymbol{C}=[c_0,c_1,\cdots,c_n]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\Phi}(x)=[P_0(x),P_1(x),\cdots,P_n(x)]^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{\Delta}_n(x)=[1,x,x^2,\cdots,x^n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=$

$$\begin{bmatrix} (-1)^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (-1)^1 & (-1)^2 2! & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (-1)^{n-1} & (-1)^n \dfrac{n!}{(n-2)!\,(1!)^2} & (-1)^{n+1}\dfrac{(n+1)!}{(n-3)!\,(2!)^2} & \cdots & 0 \\ (-1)^n & (-1)^{n-1}\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!\,(1!)^2} & (-1)^{n+2}\dfrac{(n+2)!}{(n-2)!\,(2!)^2} & \cdots & (-1)^{2n}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \end{bmatrix}$$，则有

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}_n(x). \tag{7}$$

2 Legendre 多项式微分算子矩阵

向量 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 的导数可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}(x)}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{D}^{(1)}\boldsymbol{\Phi}(x). \tag{8}$$

式(8)中：$\boldsymbol{D}^{(1)}$ 是 $(n+1)\times(n+1)$ 的算子矩阵，有

$$\boldsymbol{D}^{(1)} = (d_{i,j}) = \begin{cases} 2(2j-1), & j = i-k \begin{cases} k=1,3,\cdots,m,\ m\ \text{为奇数} \\ k=1,3,\cdots,m-1, m\ \text{为偶数} \end{cases} \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例如，当 n 为偶数时，有

$$\boldsymbol{D}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \cdots & 2n-3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & \cdots & 0 & 2n-1 & 0 \end{bmatrix},$$

由式(8)可以得到$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}(x)}{\mathrm{d}t^n}=(\boldsymbol{D}^{(1)})\boldsymbol{\Phi}(x)$，$n\in N$. 因此，有 $\boldsymbol{D}^{(n)}=(\boldsymbol{D}^{(1)})^n$，$n=1,2,\cdots$.

3 任意阶弱奇异积分的近似求积公式

设 $y(s)\in L^2([0,1])$，考虑如下弱奇异积分

$$I(t) = \int_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^{\alpha}}\mathrm{d}s, \qquad 0\leqslant t\leqslant 1, \quad 0<\alpha<1. \tag{9}$$

结合式(6)和式(7)，令 $y(s)\cong\sum_{i=0}^{m} c_i P_i(x) = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(s) = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}_n(s)$，则有

$$I(t)=\int_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^\alpha}\mathrm{d}s \cong \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \frac{\boldsymbol{\Phi}(s)}{(t-s)^\alpha}\mathrm{d}s=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Psi}(t). \tag{10}$$

式(10)中：$\boldsymbol{\Psi}(t)=[\psi_0(t),\psi_1(t),\cdots,\psi_n(t)]^{\mathrm{T}}$，此时 $0\leqslant t\leqslant 1$，$\psi_k(t)=\int_0^t \frac{s^k}{(t-s)^\alpha}\mathrm{d}s$. 当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，通过计算容易得到

$$\psi_k(t)=\frac{k}{1-\alpha}\int_0^t t\cdot\frac{s^{k-1}}{(t-s)^\alpha}\mathrm{d}s-\frac{k}{1-\alpha}\int_0^t \frac{s^k}{(t-s)^\alpha}\mathrm{d}s=\frac{k}{1-\alpha}t\cdot\psi_{k-1}(t)-\frac{k}{1-\alpha}\psi_k(t). \tag{11}$$

所以有

$$\psi_k(t)=\frac{kt}{1-\alpha+k}\psi_{k-1}, \tag{12}$$

进而可得

$$\psi_k(t)=\frac{k!\,t^k}{(1-\alpha+k)(1-\alpha+k-1)\cdots(1-\alpha+1)}\psi_0(t). \tag{13}$$

式(13)中：$\psi_0(t)=\int_0^t \frac{1}{(t-s)^\alpha}\mathrm{d}s=\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. 因此，有

$$\psi_k(t)=\frac{k!\,t^{k+1-\alpha}}{(k-\alpha)(k-\alpha-1)\cdots(2-\alpha)(1-\alpha)}. \tag{14}$$

将式(14)代入式(10)，可得

$$I(t)=t^{1-\alpha}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}\boldsymbol{\Delta}_n(t) \tag{15}$$

其中：$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} 1/(1\text{-}\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1!\ /(2\text{-}\alpha)(1\text{-}\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2!\ /(3\text{-}\alpha)(2\text{-}\alpha)(1\text{-}\alpha) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n!\ /(n+1\text{-}\alpha)(n\text{-}\alpha)\cdots(1\text{-}\alpha) \end{bmatrix}$. 式(15)即为弱奇异积分的近似求积公式.

4　Legendre 算子矩阵法求解高阶积分微分方程

考虑高阶变系数且带有弱奇异积分核的 Volterra-Fredholm 积分微分方程式(1)，由式(8)可令

$$y(t)\cong\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}_n(t). \tag{16}$$

根据 Legendre 多项式微分算子矩阵，有

$$y^{(i)}(t)\cong\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{(i)}(t)=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{(i)}\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{(i)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}_n(t). \tag{17}$$

同样，利用 Legendre 多项式基展开 $k(t,s)$，可得

$$k(t,s)\cong\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi}(s). \tag{18}$$

由于 $k(t,s)$ 为已知函数，故由离散式(18)可求矩阵 $\boldsymbol{K}$. 利用式(4)，可得

$$\int_0^1 k(t,s)y(s)\mathrm{d}s\cong\int_0^1\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi}(s)\cdot\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{C}\mathrm{d}s=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K}\int_0^1\boldsymbol{\Phi}(s)\cdot\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}. \tag{19}$$

其中：$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1/3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/(2n+1) \end{bmatrix}$. 式(19)又可写为

$$\int_0^1 k(t,s)y(s)\mathrm{d}s\cong\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}_n(t). \tag{20}$$

此时将式(15)，(17)，(20)代入式(1)，可得

$$\sum_{i=0}^m a_i(t)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{(i)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}_n(t)+\lambda_1 t^{1-\alpha}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}\boldsymbol{\Delta}_n(t)+\lambda_2\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}_n(t)=f(t). \tag{21}$$

当 $t\in[0,1]$ 时，以等距步长离散式(21)可得

$$\sum_{i=0}^m a_i(t_j)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{(i)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}_n(t_j)+\lambda_1 t_j^{\ 1-\alpha}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}\boldsymbol{\Delta}_n(t_j)+\lambda_2\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}_n(t_j)=f(t_j). \tag{22}$$

显然,当 $j=0,1,\cdots,n$ 时,式(22)可转化为代数方程组,进而求得 $\boldsymbol{C}$.

5 收敛性分析

引理 1[10] 设 $y_n^{(i)}(t)=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{(i)}\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为 $y^{(i)}(t)(i=1,2,\cdots,m)$ 的近似解,则任意 $\varepsilon>0$ 存在正整数 N_i $(i=1,2,\cdots,m)$,使得当 $n>N_i$ 时,对 $\forall\, t\in[0,1]$,有 $\| y_n^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)\|<\varepsilon$.

引理 2[10] 设 $y^{(i)}(t)=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为 $y(t)$ 的近似解,则任意 $\varepsilon>0$ 存在正整数 N_{m+1},使得当 $n>N_{m+1}$ 时,对 $\forall\, t\in[0,1]$,有 $\| y_n(t)-y(t)\|<\varepsilon$. 令 $f_n(t)=\sum_{i=0}^{m}a_i(t)y^{(i)}(t)+\lambda_1\int_0^t(t-s)^{-\alpha}y_n(s)\mathrm{d}s+\lambda_2\int_0^1 k(t,s)y_n(s)\mathrm{d}s$, 则有如下定理.

定理 1 如果 $y_n^{(i)}(t)$,$y_n(t)$ 的定义同上,则任意 $\varepsilon>0$ 存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,有 $\| y_n(t)-y(t)\|<\varepsilon$.

证明 $a_i(t)(i=0,1,2,\cdots,m)$ 为$[0,1]$上连续函数,故存在正整数 $M_i(i=0,1,2,\cdots,m)$,使得 $\forall\, t\in[0,1]$,有 $\| a_i(t)\|\leqslant M_i$. 同时存在正整数 M_{m+1},使得 $\forall\,(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$,有 $\| k(t,s)\|\leqslant M_{m+1}$. 取 $M=\max\{M_0,M_1,\cdots,M_{m+1}\}$,由引理 1,2 可得

$$\begin{aligned}\| f_n(t)-f(t)\| = &\Big\| \sum_{i=0}^{m}a_i(t)[y_n^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)]+\\ &\lambda_1\int_0^t\frac{y_n(s)-y(s)}{(t-s)^{\alpha}}\mathrm{d}s+\lambda_2\int_0^1 k(t,s)[y_n(s)-y(s)]\mathrm{d}s\Big\| \leqslant\\ &mM\varepsilon+\frac{\lambda_1}{1-\alpha}\varepsilon+\lambda_2 M\varepsilon=\Big(mM+\frac{\lambda_1}{1-\alpha}+\lambda_2 M\Big)\varepsilon.\end{aligned}$$

因此取 $N=\max\{M,N_1,N_2,\cdots,N_{m+1}\}$,当 $n>N$ 时,由 ε 任意性可知 $\| f_n(t)-f(t)\|<\varepsilon$,定理证毕.

6 数值算例

考虑 Volterra-Fredholm 积分微分方程

$$t^2y''(t)+ty'(t)+y(t)+\int_0^t(t-s)^{-1/2}y(s)\mathrm{d}s+\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s=f(t).$$

其中:$f(t)=65t^8+50t^7+\frac{17t}{72}+\frac{19}{90}+\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(9)}{\Gamma(19/2)}t^{17/2}+\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(8)}{\Gamma(17/2)}t^{15/2}$,精确解为 $y(t)=t^8+t^7$. n 分别为 4,5,6,7 时,可得数值解与精确解的绝对误差如表 1 所示. 由表 1 可知:数值解与精确解的绝对误差较小,说明文中所提方法实用性强.

表 1 数值解与精确解的绝对误差

Tab. 1 Absolute errors of the numerical solutions and the exact solution

t	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$
0	$2.528\,741\times10^{-3}$	$5.187\,552\times10^{-5}$	$3.117\,436\times10^{-7}$	$5.125\,741\times10^{-11}$
0.1	$2.912\,862\times10^{-3}$	$5.715\,745\times10^{-5}$	$3.484\,682\times10^{-7}$	$7.376\,823\times10^{-11}$
0.2	$3.438\,760\times10^{-3}$	$6.274\,380\times10^{-5}$	$4.521\,163\times10^{-7}$	$7.812\,756\times10^{-11}$
0.3	$3.858\,719\times10^{-3}$	$6.918\,533\times10^{-5}$	$5.128\,742\times10^{-7}$	$8.165\,181\times10^{-11}$
0.4	$4.116\,557\times10^{-3}$	$7.487\,210\times10^{-5}$	$5.951\,934\times10^{-7}$	$9.345\,723\times10^{-11}$
0.5	$4.763\,943\times10^{-3}$	$8.017\,852\times10^{-5}$	$6.415\,281\times10^{-7}$	$3.324\,875\times10^{-10}$
0.6	$5.278\,651\times10^{-3}$	$9.614\,502\times10^{-5}$	$7.018\,765\times10^{-7}$	$3.912\,765\times10^{-10}$
0.7	$5.916\,519\times10^{-3}$	$1.830\,752\times10^{-4}$	$7.961\,872\times10^{-7}$	$4.723\,689\times10^{-10}$
0.8	$6.326\,287\times10^{-3}$	$2.671\,538\times10^{-4}$	$9.127\,597\times10^{-7}$	$5.216\,510\times10^{-10}$
0.9	$6.854\,645\times10^{-3}$	$3.112\,357\times10^{-4}$	$1.516\,843\times10^{-6}$	$5.912\,615\times10^{-10}$

7 结束语

结合 Legendre 多项式的微分算子矩阵及其性质,对高阶变系数且带有弱奇异积分核 Volterra-

Fredholm 积分微分方程进行数值求解.将原积分微分方程转化为线性代数方程,从而更容易编程求解.收敛性分析在理论上说明了文中所提方法是收敛的.数值算例进一步表明,该方法所得数值解精度高,是一种有效的算法.

参考文献:

[1] GÜLSU M,ÖZTÜRK Y,SEZER M. A new collocation method for solution of mixed linear integro-differential-difference equations[J]. Appl Math Comput,2010,216(7):2183-2198.

[2] YOUSEFI S,BEHROOZIFAR M. Operational matrices of Bernstein polynomials and their applications[J]. Internat J Systems Sci,2010,41(6):709-716.

[3] DOHA E H,BHRAWY A H,SAKER M A. Integrals of Bernstein polynomials: An application for the solution of high even-order differential equations[J]. Appl Math Lett,2011,24(4):559-565.

[4] DELVES L M,MOHAMED J L. Computational methods for integral equations[M]. Cambridge:Cambridge University Press,1985:20-35.

[5] SCHIAVANE P,CONSTANDA C,MIODUCHOWSKI A. Integral methods in science and engineering[M]. Birkhäuser:Birkhäuser Boston,2002:100-116.

[6] HOLMAKER K. Global asymptotic stability for a stationary solution of a system of integro-differential equations describing the formation of liver zones[J]. SIAM J Math Anal,1993,24(1):116-128.

[7] MALEKNEJAD K. An efficient numerical approximation for the linear class of Fredholm integro-differential equations based on Cattani′s method[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat,2011,16(7):2672-2679.

[8] HOSSEINI S M,SHAHMORAD S. Numerical solution of a class of Integro-differential equations by the tau method with an error estimation[J]. Appl Math Comput,2003,136(2/3):559-570.

[9] SAADATMANDI A,DEHGHAN M. A new operational matrix for solving fractional-order differential equations[J]. Computers and Mathematics with Applications,2010,59(3):1326-1336.

[10] YALCINBAS S,SEZER M,SOUKUN H H. Legendre polynomial solutions of high-order linear Fredholm integro-differential equations[J]. Appl Math Comput,2009,210(2):334-349.

Operational Matrix Method for Solving the Numerical Solution of High Order Integro-Differential Equation with Weakly Singular

NIU Hong-ling[1], HAO ling[1], YU Zhi-xian[2]

(1. Department of Mathematics and Computer Science, Hebei Teachers College for Nationalities, Chengde 067000, China;
2. College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: One derivative operational matrix of Legendre polynomials is given by using the definition of Legendre polynomials and some properties. And an approximate formula which solves solution of arbitrary order weakly singular integral is also obtained and the original equation is transformed into algebraic equation. Convergence analysis shows that the method is convergent. Finally, numerical example is provided to verify the validity of the method and the correctness of the theoretical analysis.

Keywords: high order variable coefficients; weakly singular integral; integro-differential equation; Legendre polynomial; operational matrix; numerical solution

(**责任编辑:** 黄晓楠　　**英文审校:** 黄心中)