

文章编号:1000-5013(2013)04-0471-06

doi:10.11830/ISSN.1000-5013.2013.03.0471

半无界条状区域四阶方程的 Laguerre-Legendre 混合谱逼近

李敏, 庄清渠

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 对二维半无界条状区域上的四阶偏微分方程,用不带权函数的 Laguerre-Legendre 混合谱方法进行逼近.通过构造满足微分方程边界条件的基函数,由离散变分公式可以得到具有稀疏系数矩阵的代数系统,从而有效地进行求解.对该方法进行严格的收敛性分析,数值结果验证了方法的收敛性和有效性.

关键词: 四阶方程;半无界条状区域;Laguerre-Legendre 混合谱;基函数;收敛性

中图分类号: O 241.82

文献标志码: A

科学和工程中的许多问题都是建立在无界区域上的.对该类问题,传统的数值模拟方式是对区域进行截断,再添加适当的人工边界条件,从而把问题转化为有界区域边值问题进行求解.但这样一来,人工边界设置的准确性将严重影响数值解结果的正确性.为了解决这个弊端,科研工作者发展了各种直接在无界区域上对问题进行逼近求解的谱方法.对于一维半无界区域问题,常用 Laguerre 多项式/函数法进行求解^[1-4],或者采用 Legendre-Laguerre 复合谱方法进行求解^[5-9].对二维半无界条状区域问题,文献[10-13]等研究了带权函数的 Laguerre-Legendre 混合谱和拟谱逼近.由于权函数的出现,整个问题的误差分析也变得比较复杂.本文研究二维半无界条状区域上四阶方程的 Laguerre-Legendre 混合谱逼近.

1 Laguerre-Legendre 混合谱逼近

记 $R^+ = (0, +\infty)$, $I = (-1, 1)$, $\Omega = R^+ \times I$, $\Gamma = \partial\Omega$. 考虑四阶方程

$$\left. \begin{aligned} \alpha u - \beta \Delta u + \Delta^2 u &= f, & (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, y) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

该问题的弱形式,即找 $u(x, y) \in H_0^2(\Omega)$, 使得

$$a(u, v) \equiv \alpha(u, v) + \beta(\nabla u, \nabla v) + (\Delta u, \Delta v) = (f, v), \quad \forall v(x, y) \in H_0^2(\Omega). \quad (2)$$

其中: $(u, v) = \int_{\Omega} uv dx$ 表示空间 $L^2(\Omega)$ 中的内积.

令 $\mathcal{L}_i(x)$ 和 $\mathcal{L}_j(y)$ 分别表示阶数为 i 和 j 的 Laguerre 和 Legendre 多项式,并且定义 i 阶 Laguerre 函数为 $\hat{\mathcal{L}}_i(x) = \exp(-x/2)\mathcal{L}_i(x)$.

Legendre 多项式的基本性质^[14]为

$$\begin{aligned} L_i(\pm 1) &= (\pm 1)^i, & L'_i(\pm 1) &= \frac{1}{2}(\pm 1)^{i-1}i(i+1), \\ (2i+1)L_i(x) &= L'_{i+1}(x) - L'_{i-1}(x), & i &\geq 1, \end{aligned}$$

收稿日期: 2012-06-29

通信作者: 庄清渠(1980-),男,讲师,主要从事微分方程数值解法的研究. E-mail: qqzhuang@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11126330);福建省自然科学基金资助项目(2011J05005)

$$\int_{-1}^1 L_i(x)L_j(x)dx = \begin{cases} \frac{2}{2i+1}, & j=i, \\ 0, & j\neq i. \end{cases}$$

Laguerre 函数的基本性质^[2]为

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_i(0) &= 1, \quad \partial_x \hat{\mathcal{L}}_i(x) = -\frac{1}{2}\hat{\mathcal{L}}_i(x) + \exp(-x/2)\partial_x \hat{\mathcal{L}}_i(x) = -\sum_{k=0}^{i-1} \hat{\mathcal{L}}_k(x) - \frac{1}{2}\hat{\mathcal{L}}_i(x), \\ \lim_{x\rightarrow\infty} \hat{\mathcal{L}}_i(x) &= 0, \quad \int_0^\infty \hat{\mathcal{L}}_i(x)\hat{\mathcal{L}}_j(x)dx = \begin{cases} 1, & j=i, \\ 0, & j\neq i. \end{cases} \end{aligned}$$

定义空间 $\hat{P}_{M,N}(\Omega)$ 为

$$\hat{P}_{M,N}(\Omega) := \text{span}\{\hat{\mathcal{L}}_i(x)L_j(y), i=0,1,\cdots,M; j=0,1,\cdots,N\}.$$

用 \mathcal{N} 表示离散参数对 (M,N) , 并且记

$$V_{\mathcal{N}}^0 = \hat{P}_{M,N}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega).$$

那么问题(1)的 Laguerre-Legendre 混合谱逼近形式,即找 $u_{\mathcal{N}} \in V_{\mathcal{N}}^0$, 使得

$$a(u_{\mathcal{N}}, v_{\mathcal{N}}) = (f, v_{\mathcal{N}}), \quad \forall v_{\mathcal{N}} \in V_{\mathcal{N}}^0. \tag{3}$$

下面详细介绍问题(3)的 Laguerre-Legendre 混合谱逼近的具体计算实施细节.

首先定义 $\hat{\Psi}_i(x), \Psi_j(y)$ 为

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_i(x) &= \hat{\mathcal{L}}_i(x) - 2\hat{\mathcal{L}}_{i+1}(x)\hat{\mathcal{L}}_{i+2}(x), \\ \Psi_j(y) &= c_j(L_j(y) + \beta_j L_{j+2}(y) + \gamma_j L_{j+4}(y)). \end{aligned}$$

其中: $\beta_j = -\frac{2(2j+5)}{2j+7}, \gamma_j = \frac{2j+3}{2j+7}, c_j = \frac{1}{\sqrt{2(2j+3)^2(2j+5)}}$. 则由 Legendre 多项式和 Laguerre 函数的

基本性质知

$$\hat{\Psi}_i(0) = \hat{\Psi}'_i(0) = \lim_{x\rightarrow\infty} \hat{\Psi}_i(x) = \lim_{x\rightarrow\infty} \hat{\Psi}'_i(x) = 0, \quad \Psi_j(\pm 1) = \hat{\Psi}'_i(\pm 1) = 0.$$

因此, $V_{\mathcal{N}}^0$ 可以表示为

$$V_{\mathcal{N}}^0 = \text{span}\{\hat{\Psi}_i(x)\hat{\Psi}_j(y), i=0,1,\cdots,M-2; j=0,1,\cdots,N-4\}.$$

其次, 记

$$\begin{aligned} u_{\mathcal{N}} &= \sum_{i=0}^{M-2} \sum_{j=0}^{M-4} \hat{u}_{i,j} \hat{\Psi}_i(x) \hat{\Psi}_j(y), \quad U = (\hat{u}_{i,j})_{i=0,1,\cdots,M-2; j=0,1,\cdots,N-4}; \\ f_{i,j} &= (f, \hat{\Psi}_i(x)\hat{\Psi}_j(y)), \quad F = (f_{i,j})_{i=0,1,\cdots,M-2; j=0,1,\cdots,N-4}; \\ \hat{A}_{i,j} &= (\hat{\Psi}_j(x), \hat{\Psi}_i(x)), \quad \hat{A} = (\hat{A}_{i,j})_{0\leq i,j\leq M-2}; \\ A_{i,j} &= (\Psi_j(y), \Psi_i(y)), \quad A = (A_{i,j})_{0\leq i,j\leq N-4}; \\ \hat{B}_{i,j} &= (\hat{\Psi}'_j(x), \hat{\Psi}'_i(x)), \quad \hat{B} = (\hat{B}_{i,j})_{0\leq i,j\leq M-2}; \\ B_{i,j} &= (\Psi'_j(y), \Psi'_i(y)), \quad B = (B_{i,j})_{0\leq i,j\leq N-4}; \\ \hat{C}_{i,j} &= (\hat{\Psi}''_j(x), \hat{\Psi}''_i(x)), \quad \hat{C} = (\hat{C}_{i,j})_{0\leq i,j\leq M-2}; \\ C_{i,j} &= (\Psi''_j(y), \Psi''_i(y)), \quad C = (C_{i,j})_{0\leq i,j\leq N-4}. \end{aligned}$$

则问题(3)所对应的线性系统可以表示为

$$\alpha \hat{A} U A + \beta (\hat{B} U A + \hat{A} U B) + \hat{C} U A + \hat{A} U C + 2 \hat{B} U B = F. \tag{4}$$

利用 Laguerre 函数和 Legendre 多项式的性质可得

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}'_i(x) &= \frac{1}{2}\hat{\mathcal{L}}_i(x) - \frac{1}{2}\hat{\mathcal{L}}_{i+2}(x), \\ \hat{\Psi}''_i(x) &= \frac{1}{4}\hat{\mathcal{L}}_i(x) + \frac{1}{2}\hat{\mathcal{L}}_{i+2}(x) + \frac{1}{4}\hat{\mathcal{L}}_{i+4}(x), \\ \hat{\Psi}'_j(x) &= c_j \alpha_j (L_{j+3}(x) - L_{j+1}(x)), \\ \hat{\Psi}''_j(x) &= c_j \alpha_j \alpha_{j+1} L_{j+2}(x). \end{aligned}$$

其中: $\alpha_j = 2j+3$. 若记 $\lambda_i = (L_i(x), L_i(x))$, 则由 Legendre 多项式的正交性可知

$$\begin{aligned}
 (\Psi_j(x), \Psi_q(x)) &= \begin{cases} c_j c_{j+4} \gamma_j \lambda_{j+4}, & q = j + 4, \\ c_j c_{j+2} (\beta_j \lambda_{j+2} + \beta_{j+2} \gamma_j \lambda_{j+4}), & q = j + 2, \\ c_j^2 (\lambda_j + \beta_j^2 \lambda_{j+2} + \gamma_j^2 \lambda_{j+4}), & q = j, \\ c_j c_{j-2} (\beta_{j-2} \lambda_j + \beta_j \gamma_{j-2} \lambda_{j+2}), & q = j - 2, \\ c_j c_{j-4} \gamma_{j-4} \lambda_j^2, & q = j - 4, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases} \\
 (\Psi'_j(x), \Psi'_q(x)) &= \begin{cases} -c_j c_{j+2} \alpha_j \alpha_{j+2} \lambda_{j+3}, & q = j + 2, \\ c_j^2 \alpha_j^2 (\lambda_{j+1} + \lambda_{j+3}), & q = j, \\ -c_j c_{j-2} \alpha_j \alpha_{j-2} \lambda_{j+1}, & q = j - 2, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases} \\
 (\Psi''_j(x), \Psi''_q(x)) &= \begin{cases} c_j^2 \alpha_j^2 \alpha_{j+2}^2 \lambda_{j+2}, & q = j, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

另一方面, 由 Laguerre 函数的正交性知

$$\begin{aligned}
 (\hat{\Psi}_i(x), \hat{\Psi}_p(x)) &= \begin{cases} 1, & p = i + 2, \\ -4, & p = i + 1, \\ 6, & p = i, \\ -4, & p = i - 1, \\ 1, & p = i - 2, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases} & (\hat{\Psi}'_i(x), \hat{\Psi}'_p(x)) &= \begin{cases} -1/4, & p = i + 2, \\ 1/2, & p = i, \\ -1/4, & p = i - 2, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases} \\
 (\hat{\Psi}''_i(x), \hat{\Psi}''_p(x)) &= \begin{cases} 1/16, & p = i + 2, \\ 1/4, & p = i + 1, \\ 3/8, & p = i, \\ 1/4, & p = i - 1, \\ 1/16, & p = i - 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

由此可知: 矩阵 $\mathbf{A}, \hat{\mathbf{A}}, \mathbf{B}, \hat{\mathbf{B}}, \mathbf{C}, \hat{\mathbf{C}}$ 都是稀疏的矩阵, 因而线性系统(4)可以有效地用共轭梯度法进行求解.

2 误差估计

首先记

$$w_r(x) = x^r \exp(-x), \quad \hat{w}_r(x) = x^r, \quad \hat{\partial}_x = \partial_x + 1/2.$$

对 $m \geq 2$, 定义空间

$$\hat{B}^m(R^+) := \{v \mid \hat{\partial}_x^k v \in L^2_{\hat{w}_k}(R^+), 0 \leq k \leq m\}.$$

该空间的全范数和半范数定义为

$$\|v\|_{\hat{B}^m} = \left(\sum_{k=0}^m \|\hat{\partial}_x^k v\|_{\hat{w}_k}^2 \right)^{1/2}, \quad |v|_{\hat{B}^m} = \|\hat{\partial}_x^m v\|_{\hat{w}_m}.$$

此外, 定义

$$\hat{B}_*^m(R^+) := \{v \mid \hat{\partial}_x^2 v \in \hat{B}^{m-2}(R^+)\}.$$

相应的全范数和半范数定义为

$$\|v\|_{\hat{B}_*^m} = \|\hat{\partial}_x^2 v\|_{\hat{B}_{m-2}}, \quad |v|_{\hat{B}_*^m} = |\hat{\partial}_x^2 v|_{\hat{B}_{m-2}}.$$

记

$$\hat{P}_M^{2,0}(R^+) = \hat{P}_M(R^+) \cap H_0^2(R^+), \quad \hat{P}_N^{2,0}(I) = P_N(I) \cap H_0^2(I).$$

定义以下几个投影算子

$H_0^2(R^+)$ -正交投影算子 $\hat{\pi}_{M,x}^{2,0} : H_0^2(R^+) \rightarrow \hat{P}_M^{2,0}(R^+)$, 对于 $\forall v \in H_0^2(R^+)$, 关系式 $(\partial_x^2(v - \hat{\pi}_{M,x}^{2,0}v),$

$\partial_x^2 \phi)_{R^+} = 0, \forall \phi \in \dot{P}_M^{2,0}(R^+)$ 成立.

$H_0^2(I)$ -正交投影算子 $\pi_{N,y}^{2,0} : H_0^2(I) \rightarrow P_N^{2,0}(I)$, 对于 $\forall v \in H_0^2(I)$, 关系式 $(\partial_y^2(v - \pi_{N,y}^{2,0}v), \partial_y^2 \phi)_I = 0$, $\forall \phi \in P_N^{2,0}(I)$ 成立.

$H_0^2(\Omega)$ -正交投影算子 $\pi_{\mathcal{N}}^{2,0} : H_0^2(\Omega) \rightarrow v_{\mathcal{N}}^0$, 对于 $\forall v \in H_0^2(\Omega)$, 关系式 $(\Delta(v - \pi_{\mathcal{N}}^{2,0}v), \Delta \phi)_{\Omega} = 0, \forall \phi \in V_{\mathcal{N}}^0$ 成立.

引理 1^[14] 若 $v \in H_0^2(I) \cap H^r(I), r \geq 2$, 则

$$\|v - \pi_{N,y}^{2,0}v\|_s \lesssim N^{s-r} \|v\|_r, \quad s = 0, 1, 2.$$

引理 2 若 $v \in H_0^2(R^+) \cap \dot{B}_*^m(R^+), m \geq 2$, 则

$$\|v - \hat{\pi}_{M,x}^{2,0}v\|_2 \lesssim M^{1-m/2} \|\hat{\partial}_x^m v\|_{\dot{w}_{m-2}}.$$

证明 对任意的 $v \in H_0^2(R^+) \cap \dot{B}^m(R^+)$, 令

$$\Psi_M(x) = \exp(-x/2) \int_0^x \int_0^z \pi_{M-2}^{(x)} \partial_y^2(v(y) \exp(y/2)) dy dz,$$

则可以验证 $\Psi_M \in \dot{P}_M(R^+)$.

另一方面

$$v(x) = \exp(-x/2) \int_0^x \int_0^z \partial_y^2(v(y) \exp(y/2)) dy dz.$$

由文献[1]的引理 2 以及文献[15]的定理 3.1, 可得

$$\begin{aligned} \|v - \hat{\pi}_{M,x}^{2,0}v\|_{\frac{2}{2}, \omega_0}^2 &\leq \|v - \Psi\|_{\frac{2}{2}}^2 \lesssim \|\exp(x/2)(v - \Psi)\|_{\frac{2}{2}, \omega_0}^2 = \\ &\|\partial_x^2(\exp(x/2)v) - \pi_{M-2}^{(x)} \partial_x^2(\exp(x/2)v)\|_{\frac{2}{2}, \omega_0}^2 \lesssim \\ &M^{2-m} \|\partial_x^m(\exp(x/2)v)\|_{\frac{2}{2}, \dot{w}_{m-2}}^2 = M^{2-m} \|\hat{\partial}_x^m v\|_{\frac{2}{2}, \dot{w}_{m-2}}^2. \end{aligned}$$

由此即可得引理结论.

为了表达误差估计式, 引入如下记号

$$Y_{\Omega}^{m;n}(u) = \|u\|_{0;n} + \|\hat{\partial}_x^2 u\|_{0;n-2} + \|\partial_y^2 \hat{\partial}_x^m u\|_{\dot{w}_{m-2};0} + \|\hat{\partial}_x^m u\|_{\dot{w}_{m-2};0},$$

$$\begin{aligned} \text{其中: } \|u\|_{0;n}^2 &= \int_{R^+} \|u\|_{n,I}^2 dx; \|\partial_y^2 \hat{\partial}_x^m u\|_{\dot{w}_{m-2};0}^2 = \int_I \|\hat{\partial}_x^m(\partial_y^2 u)\|_{\dot{w}_{m-2}}^2 dy; \|\hat{\partial}_x^2 u\|_{0;n-2}^2 = \\ &\int_{R^+} \|\hat{\partial}_x^2 u\|_{n,I}^2 dx; \|\hat{\partial}_x^m u\|_{\dot{w}_{m-2};0}^2 = \int_I \|\hat{\partial}_x^m u\|_{\dot{w}_{m-2}}^2 dy. \end{aligned}$$

定理 1 设 $m, n \geq 2$. 若 $u \in H_0^2(\Omega)$ 且 $Y_{\Omega}^{m;n}(u)$ 是有限的. u 和 $u_{\mathcal{N}}$ 分别是式(1)和式(3)的解, 则

$$\|u - u_{\mathcal{N}}\|_{2,\Omega} \lesssim (N^{2-n} + M^{1-m/2}) Y_{\Omega}^{m;n}(u). \quad (5)$$

证明 对任意的 $u_{\mathcal{N}} \in V_{\mathcal{N}}^0$, 有

$$\begin{aligned} \|u - u_{\mathcal{N}}\|_{2,\Omega}^2 &\lesssim \|u - \pi_{\mathcal{N}}^{2,0}u\|_{2,\Omega}^2 \lesssim \|u - u_{\mathcal{N}}\|_{2,\Omega}^2 \lesssim \\ &\|\partial_x^2(u - v_{\mathcal{N}})\|_{2,\Omega}^2 + \|\partial_y^2(u - v_{\mathcal{N}})\|_{2,\Omega}^2. \end{aligned}$$

选取 $v_{\mathcal{N}} = \hat{\pi}_{M,x}^{2,0} \pi_{N,y}^{2,0} u$. 利用引理 1 及引理 2 可得

$$\begin{aligned} \|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u - v_{\mathcal{N}})\|_{0,\Omega} &\leq \|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u - \hat{\pi}_{M,x}^{2,0}u)\|_{0,\Omega} + \|\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\hat{\pi}_{M,x}^{2,0}(u - \pi_{N,y}^{2,0}u)]\|_{0,\Omega} \lesssim \\ &\|u - \hat{\pi}_{M,x}^{2,0}u\|_{2;0} + N^{2-n} \|\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\hat{\pi}_{M,x}^{2,0}u]\|_{0;n-2} \lesssim \\ &M^{1-m/2} \|\hat{\partial}_x^m u\|_{\dot{w}_{m-2};0} + N^{2-n} \|\frac{\partial^2}{\partial x^2}[(\hat{\pi}_{M,x}^{2,0}u - u)]\|_{0;n-2} + N^{2-n} \|\partial_x^2 u\|_{0;n-2} \lesssim \\ &M^{1-m/2} \|\hat{\partial}_x^m u\|_{\dot{w}_{m-2};0} + N^{2-n} \|\partial_x^2 u\|_{0;n-2} + N^{2-n} \|\partial_x^2 u\|_{0;n-2} \lesssim \\ &M^{1-m/2} \|\hat{\partial}_x^m u\|_{\dot{w}_{m-2};0} + N^{2-n} \|\partial_x^2 u\|_{0;n-2}; \\ \|\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u - v_{\mathcal{N}})\|_{0,\Omega} &\leq \|\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u - \hat{\pi}_{N,y}^{2,0}u)\|_{0,\Omega} + \|\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\pi_{N,y}^{2,0}(u - \hat{\pi}_{M,x}^{2,0}u)]\|_{0,\Omega} \lesssim \\ &\|u - \pi_{N,y}^{2,0}u\|_{2;0} + \|\partial_y^2(u - \hat{\pi}_{M,x}^{2,0}u)\|_{0,\Omega} \lesssim \end{aligned}$$

$$N^{2-n} \| u \|_{0;n-2} M^{1-m/2} \| \partial_y^2 \partial_x^m u \|_{\dot{w}_{m-2;0}}.$$

联立上述 3 个式子即可得

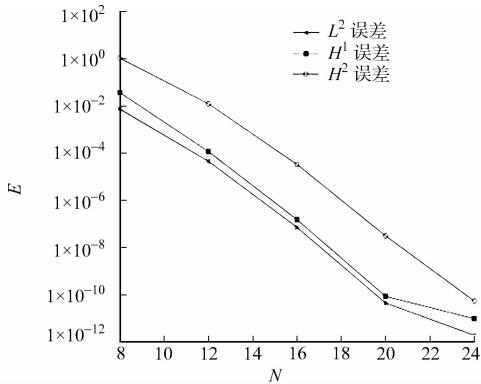
$$\begin{aligned} \| \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u - v_N) \|_{0,\Omega} &\lesssim M^{1-m/2} \| \partial_x^m u \|_{\dot{w}_{m-2;0}} + N^{2-n} \| \partial_x^2 u \|_{0;n-2} + M^{1-m/2} \| \partial_y^2 \partial_x^m u \|_{\dot{w}_{m-2;0}} + \\ &N^{2-n} \| \partial_x^2 u \|_{0;n-2} \leq N^{2-n} (\| \partial_x^2 u \|_{0;n-2} + \| \partial_y^2 u \|_{0;n-2}) + \\ &M^{1-m/2} (\| \partial_x^m u \|_{\dot{w}_{m-2;0}} + \| \partial_y^2 \partial_x^m u \|_{\dot{w}_{m-2;0}}) \lesssim (N^{2-n} + M^{1-m/2}) Y_{\Omega}^{m;n}(u). \end{aligned}$$

3 数值结果

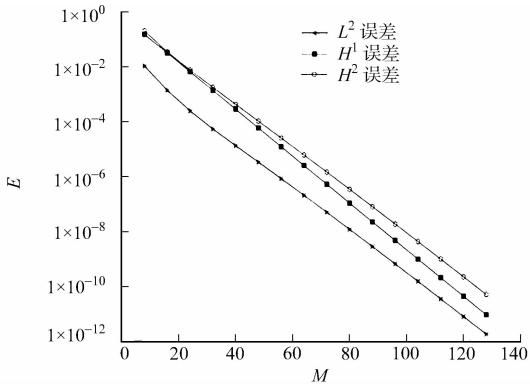
在问题(1)中取定 $\alpha=\beta=1$, 同时取问题的精确解为 $u(x,y)=\exp(-x)\sin^2 x \cdot \sin^2(\pi y)$.

首先, 固定 $M=128$, 以使 Laguerre 方向产生的误差对 Legendre 方向计算误差的影响可以忽略不计; 然后, 让 N 从 8 变化到 24. 图 1(a)给出的是相应计算结果. 由图 1(a)可见: 误差的各种范数关于 N 都呈现指数衰减.

其次固定 $N=32$, 以使 Legendre 方向产生的误差对 Laguerre 方向计算误差的影响可以忽略不计; 然后, 让 M 从 8 变化到 128. 图 1(b)给出的是相应计算结果. 由图 1(b)同样可见: 误差的各种范数关于 M 都呈指数衰减.



(a) $M=128$



(b) $N=32$

图 1 误差随 M 和 N 的变化情况

Fig. 1 Errors as a function of M and N

计算中固定 $M=128, N=64$, 同时取问题的精确解为 $u(x,y)=\exp(-x)\sin^2(2x) \cdot \sin^2(2\pi y)$. 图 2 是计算的数值解在 $[0,8] \times [-1,1]$ 上的图形. 由图 2 的光滑性可见: 混合谱逼近对震荡不是太大的数值解的逼近效果是可行的.

4 结束语

对二维半无界条状区域上四阶方程的 Laguerre-Legendre 混合谱方法作了研究, 得到了具有稀疏系数矩阵的线性系统. 数值结果验证了混合谱方法的指数收敛性与可行性, 为日后工程实际问题的解决奠定基础.

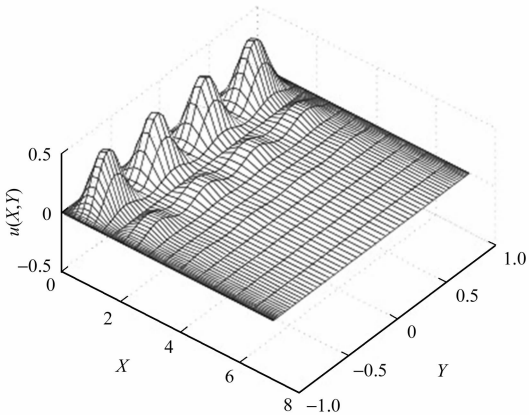


图 2 数值解

Fig. 2 Numerical solution

参考文献:

[1] GUO Ben-yu, SHEN Jie. Laguerre-Galerkin method for nonlinear partial differential equations on a semi-infinite interval[J]. Numerische Mathematik, 2000, 86(4): 635-654.

- [2] SHEN Jie. Stable and efficient spectral methods in unbounded domains using laguerre functions[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2001, 38(4): 1113-1133.
- [3] 王志焕. 一类自由边界问题解的渐近性[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2006, 27(2): 133-136.
- [4] WANG Li-lian, GUO Ben-yu. Stair Laguerre pseudospectral method for differential equations on the half line[J]. Advances in Computational Mathematics, 2006, 25(1): 305-322.
- [5] 叶小华. 四阶方程的 Legendre-Laguerre 复合谱方法[J]. 吉林师范大学学报: 自然科学版, 2009, 30(2): 122-128.
- [6] GUO Ben-yu, MA He-ping. Composite Legendre-Laguerre approximation in unbounded domains[J]. Journal of Computational Mathematics, 2001, 19(1): 101-112.
- [7] GUO Ben-yu, WANG Li-lian. Modified Laguerre pseudospectral method refined by multidomain Legendre pseudospectral approximation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, 190(1): 304-324.
- [8] SHEN Jie, WANG Li-lian. Laguerre and composite Legendre-Laguerre dual-Petrov-Galerkin methods for third-order equations[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, 2006, 6(6): 1381-1402.
- [9] ZHUANG Qing-qu, XU Chuan-ju. Legendre-Laguerre coupled spectral element methods for second- and fourth-order equations on the half line[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010, 235(3): 615-630.
- [10] GUO Ben-yu, XU Cheng-long. Mixed Laguerre-Legendre pseudospectral method for incompressible flow in an infinite strip[J]. Mathematics of computation, 2004, 73(245): 95-126.
- [11] GUO Ben-yu, WANG Tian-jun. Composite Laguerre-Legendre spectral method for fourth-order exterior problems [J]. Journal of Scientific Computing, 2010, 44(3): 255-285.
- [12] WANG Zhong-qin, GUO Ben-yu. A mixed spectral method for incompressible viscous fluid flow in an infinite strip [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2005, 24(3): 343-346.
- [13] XU Cheng-long, GUO Ben-yu. Mixed Laguerre-Legendre spectral method for incompressible flow in an infinite strip[J]. Advances in Computational Mathematics, 2002, 16(1): 77-96.
- [14] BERNARDI C, MADAY Y. Approximations spectrales de problemes aux limites elliptiques[M]. Paris: Springer-Verlag, 1992: 21-27.
- [15] SHEN Jie, WANG Li-lian. Some recent advances on spectral methods for unbounded domains[J]. Communications in Computational Physics, 2009, 5(2/3/4): 195-241.

Mixed Laguerre-Legendre Spectral Approximation of the Fourth-Order Equations in a Semi-Infinite Channel

LI Min, ZHUANG Qing-qu

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Mixed Laguerre-Legendre spectral method without weight function is presented to solve the fourth-order equations in a semi-infinite channel. By constructing appropriate basis functions satisfying the boundary conditions, the coefficient matrix of the corresponding linear system is sparse, and the solution can be solved efficiently. Rigorous analysis of the convergence of this method is carried out. Numerical experiments are given to confirm the convergence and efficiency of the method.

Keywords: fourth-order equations; semi-infinite channel; mixed Laguerre-Legendre spectral method; basis function; convergence

(责任编辑: 黄晓楠 英文审校: 黄心中)