

一类新的 Salagean-Type 单叶调和映照的特征

潘旭玲, 黄心中

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究由 Salagean 定义的微分算子的一类新的 Salagean-type 函数类 $S_H(m, n, \alpha, \beta)$ 的子类 $S_{HK}(m, n, \alpha, \beta)$, 得到 $S_{HK}(m, n, \alpha, \beta)$ 为调和拟共形映照及凸像函数的充分条件, 研究 $S_{HK}(m, n, \alpha, \beta)$ 的稳定性与调和映照 δ -邻域的相关问题, 推广了 B. Seker 等人的相应结果.

关键词: 单叶调和映照; 拟共形映照; 凸像; 稳定性; δ -邻域

中图分类号: O 174.51; O 174.55

文献标志码: A

1 预备知识

令 S_H 表示定义在单位圆盘 $D = \{z \mid |z| < 1\}$ 内且满足 $f(0) = f_z(0) - 1 = 0$ 的单叶调和映照类. 如果 $f(z) \in S_H$, 则有 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, 其中解析函数 h 和 g 可表示为

$$h(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k, \quad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k, \quad |b_1| < 1, \quad z \in D. \quad (1)$$

Clunie 等^[1]将单叶解析函数的经典理论和思想推广到单叶调和映照类. 近期, 不少学者又研究了单叶调和映照与拟共形映照之间的关系, 相继出现了许多结果^[2-5].

文献[6]研究 $S_H(m, n, \alpha, \beta)$ 与 $\bar{S}_H(m, n, \alpha, \beta)$, 证明了 $S_H(m, n, \alpha, \beta)$ 的单叶性问题, 并对 $\bar{S}_H(m, n, \alpha, \beta)$ 的偏差定理、极值点的条件及凸像区域等问题进行了系统的研究. 文献[6]证明了以下结论.

定理 A^[6] 设 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ 为具有式(1)的调和映照, 且满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} ([(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n] |a_k| + [(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n] |b_k|) \leq 2(1-\alpha). \quad (2)$$

式(2)中: $0 \leq \alpha < 1, \beta \geq 0, m \in N^+, n \in N, m > n$, 则 $f(z)$ 在 D 上单叶保向且 $f(z) \in S_H(m, n, \alpha, \beta)$.

假设 $f(z) \in S_H(m, n, \alpha, \beta)$, 称 $f(z)$ 的 δ -邻域为满足下列条件的单叶保向调和映照 F 的全体, 即

$$N_{\delta}(f) = \{F : \sum_{k=2}^{\infty} ([(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n] |a_k - A_k| + [(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n] |b_k - B_k|) + [(1+\beta) - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)] |b_1 - B_1| \leq (1-\alpha)\delta\},$$

其中: $F(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} A_k z^k + \overline{\sum_{k=1}^{\infty} B_k z^k}$.

定理 B^[6] 设 $f = h + \bar{g}$ 为具有式(1)的调和映照, 且满足

$$\sum_{k=2}^{\infty} k([(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n] |a_k| + [(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n] |b_k|) \leq (1-\alpha) - [(1+\beta) - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)] |b_1|. \quad (3)$$

若 $\delta \leq \frac{1-\alpha}{2-\alpha} \left(1 - \frac{(1+\beta) - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)}{1-\alpha} |b_1| \right)$, 则 $N_{\delta}(f) \subset S_H(m, n, \alpha, \beta)$.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(2011J0101)

以上结果考虑了调和映照满足一定条件下的单叶性与 δ -邻域的问题,但是,该函数类的调和拟共形性质、调和稳定性性质都值得深入研究,也是最近在这方面的研究热点^[3-5,7-9].

引入 $S_H(m, n, \alpha, \beta)$ 的一个子类 $S_{HK}(m, n, \alpha, \beta)$, 其具有式(1)的调和映照,且满足式(2),以进一步研究子类 $S_{HK}(m, n, \alpha, \beta)$ 的相关问题.通过对定理 A 中的式(2)加以精确化考虑,引入系数不等式的最佳估计式,得到关于调和拟共形性、像区域的凸像性和调和稳定性的一些更好的结果,推广和改进了 B. Seker 等人的相应结果.

称 $f(z)$ 为区域 Ω 上的拟共形映照,设 f 是平面区域 Ω 到 Ω' 的一个同胚映照,如果 f 可以满足: f 在 Ω 上具有 ACL 性质(即线段上的绝对连续性)且 $f_z(z) = \mu_f(z) f_{\bar{z}}(z)$ 在区域 Ω 上几乎处处成立,其中 $\operatorname{ess} \sup_{z \in \Omega} \|\mu_f(z)\|_{\infty} = k < 1$. 若 $f(z)$ 为单连通区域 Ω 上的调和映照,则 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, 其中 h, g 为 Ω 上的解析函数;若 $f(z)$ 在 Ω 上单叶,且 $|g'(z)| < k |h'(z)|$, 则称 $f(z)$ 为 Ω 上的调和拟共形映照.

2 主要结果及证明

定理 1 若 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} \in S_{HK}(m, n, \alpha, \beta)$, 则除 $m=1, n=\alpha=\beta=0$ 外, $f(z)$ 为 D 上的调和拟共形映照. 特别地,当 $m \geq 2$ 时, $f(z)$ 为 D 上的凸像调和拟共形映照.

为了证明定理 1, 建立如下引理.

引理 1 设 $\gamma = \frac{1-\alpha}{(1+\beta)2^{m-1} - (\alpha+\beta)2^{n-1}}$, 其中 $0 \leq \alpha < 1, \beta \geq 0, m \in N^+, n \in N, m > n$, 则有

i) $0 < \gamma \leq 1, \gamma = 1$ 当且仅当 $m=1, n=\alpha=\beta=0$.

ii) 当 $k \geq 2$ 时, 有

$$k \leq \gamma \frac{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}, \quad k \leq \gamma \frac{(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}.$$

引理 1 条件 i) 的证明 容易看出 $\gamma > 0$, 有

$$\gamma = \frac{1-\alpha}{(1+\beta)2^{m-1} - (\alpha+\beta)2^{n-1}} = \frac{1-\alpha}{2^{m-1}[(1+\beta) - (\alpha+\beta)2^{-(m-n)}]} \leq \frac{1}{2^{m-1}} \leq 1.$$

当且仅当 $m=1, n=\alpha=\beta=0$ 时, 上式等号成立.

引理 1 条件 ii) 的证明 当 $k \geq 2$ 时, 有

$$\gamma \frac{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} = \frac{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n}{(1+\beta)2^{m-1} - (\alpha+\beta)2^{n-1}} = k \frac{(1+\beta)k^{m-1} - (\alpha+\beta)k^{n-1}}{(1+\beta)2^{m-1} - (\alpha+\beta)2^{n-1}} \geq k.$$

从而有, $k \leq \gamma \frac{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}, k \geq 2$.

同理可得 $k \leq \gamma \frac{(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha}, k \geq 2$.

定理 1 的证明 1) 首先证明拟共形性. 从拟共形映照的定义可知, 对于 $f(z) \in S_{HK}(m, n, \alpha, \beta)$, 要验证其是否为拟共形映照, 只需估计伸缩商 $\|\mu_f(z)\|_{\infty} = \sup_{z \in D} \left| \frac{g'(z)}{h'(z)} \right| \leq k < 1$.

取 $\gamma = \frac{1-\alpha}{(1+\beta)2^{m-1} - (\alpha+\beta)2^{n-1}}$, 由式(2)可得 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} |a_k| \leq 1$. 由引理 1 条件 i),

可得除 $m=1, n=\alpha=\beta=0$ 外, 有 $0 < 1 - \gamma \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} |a_k| < 1$. 利用引理 1 条件 ii), 可得

$$|\mu_f(z)| = \left| \frac{g'(z)}{h'(z)} \right| \leq \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k |b_k|}{1 - \sum_{k=2}^{\infty} k |a_k|} \leq$$

$$\frac{|b_1| + \sum_{k=2}^\infty \gamma \frac{(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} |b_k|}{1 - \sum_{k=2}^\infty \gamma \frac{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} |a_k|} \leqslant$$
$$\frac{|b_1| + \gamma(1 - \sum_{k=2}^\infty \frac{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} |a_k| - |b_1|)}{1 - \sum_{k=2}^\infty \gamma \frac{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} |a_k|} \leqslant$$
$$1 - \frac{(1-\gamma)(1 - |b_1|)}{1 - \gamma \sum_{k=2}^\infty \frac{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} |a_k|} \leqslant$$
$$1 - (1-\gamma)(1 - |b_1|). \tag{4}$$

由于除 $m=1, n=\alpha=\beta=0$ 外, $1-(1-\gamma)(1-|b_1|)$ 为严格小于 1 的常数, 从而 $f(z)$ 为 D 上的调和拟共形映照.

2) 其次, 证明其凸性, 即有

$$\frac{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} - k^2 = \frac{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n - (1-\alpha)k^2}{1-\alpha} \geqslant$$
$$\frac{k^m[(1+\beta) - (\alpha+\beta)k^{n-m} - (1-\alpha)k^{2-m}]}{1-\alpha} \geqslant$$
$$\frac{k^m[(1-\alpha) - (1-\alpha)k^{2-m}]}{1-\alpha} = k^m(1 - k^{2-m}).$$

要使 $k^m(1 - k^{2-m}) \geqslant 0$, 即只需 $m \geqslant 2$.

当 $m \geqslant 2$ 时, 从而有

$$\sum_{k=2}^\infty k^2(|a_k| + |b_k|) \leqslant \sum_{k=2}^\infty \frac{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} (|a_k| + |b_k|) \leqslant$$
$$\sum_{k=2}^\infty \left[\frac{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} |a_k| + \frac{(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} |b_k| \right] \leqslant$$
$$1 - \frac{(1+\beta) - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)}{1-\alpha} |b_1| \leqslant 1 - |b_1|.$$

由文献[10]可知, 如果 $f(z) \in S_H$, 且当 $\sum_{k=2}^\infty k^2(|a_k| + |b_k|) \leqslant 1 - |b_1|$ 时, 则 $f(D)$ 是凸像的. 由于 $f(z) \in S_{HK}(m, n, \alpha, \beta) \subset S_H(m, n, \alpha, \beta)$, 故 $f(z)$ 是凸像的. 由拟共形性的证明可知: 当 $m \geqslant 2$ 时, $f(z)$ 为 D 上的凸像调和拟共形映照.

注 1 当 $m-n$ 为偶数, $f(z) = z + |b_1|\bar{z} + \frac{(1-\alpha)(1-|b_1|)}{(1+\beta)2^m - (\alpha+\beta)2^n}\bar{z}^2$ 时, 有 $f(z) \in S_{HK}(m, n, \alpha, \beta)$, 此时 $\operatorname{ess\,sup}_{z \in D} \|\mu_f(z)\|_\infty = 1 - (1-\gamma)(1 - |b_1|)$, 因此知式(4)的估计是精确的.

当 $m=1, n=\alpha=\beta=0$ 时, 取 $f_0(z) = z + 1/2\bar{z}^2$, 由定理 A 知 $f_0 \in S_H(1, 0, 0, 0)$, 此时 f_0 不是调和拟共形映照且非凸.

文献[7]研究了在 $f(D)$ 满足一定条件的情况下, 当 $|\lambda| \leqslant 1$ 时, $F(z)$ 在 D 上单叶性的稳定性问题. 对于 $f(z) \in S_{HK}(m, n, \alpha, \beta)$, 可得到如下定理.

定理 2 设 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} \in S_{HK}(m, n, \alpha, \beta)$, 当 $|\lambda| \leqslant \frac{1+\gamma|b_1|}{|b_1|+\gamma}$ 时, 则除 $m=1, n=\alpha=\beta=0$ 外, $F(z) = h(z) + \lambda \overline{g(z)}$ 在 D 上单叶保向.

证明 由定理 A 知 $f(z)$ 在 D 内单叶保向且 $f(z) \in S_H(m, n, \alpha, \beta)$. 对于 $\forall z_1, z_2 \in D$, 若 $z_1 \neq z_2$, 则 $|F(z_1) - F(z_2)| \geqslant |h(z_1) - h(z_2)| - |\lambda| |g(z_1) - g(z_2)| =$

$$|(z_1 - z_2) + \sum_{k=2}^\infty a_k(z_1^k - z_2^k)| - |\lambda| |\sum_{k=2}^\infty b_k(z_1^k - z_2^k)| >$$

$$|z_1 - z_2| (1 - \sum_{k=2}^{\infty} k |a_k| - |\lambda| \sum_{k=2}^{\infty} k |b_k|).$$

取 $\gamma = \frac{1-\alpha}{(1+\beta)2^{m-1} - (\alpha+\beta)2^{n-1}}$, 由引理知

$$\begin{aligned} |F(z_1) - F(z_2)| &> |z_1 - z_2| (1 - \sum_{k=2}^{\infty} k |a_k| - |\lambda| \sum_{k=2}^{\infty} k |b_k|) \geq \\ &|z_1 - z_2| (1 - |\lambda| |b_1| - \sum_{k=2}^{\infty} \gamma \frac{(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} |a_k| - \\ &|\lambda| \sum_{k=2}^{\infty} \gamma \frac{(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} |b_k|) \geq \\ &|z_1 - z_2| (1 - \gamma + (\gamma - |\lambda|) |b_1| + \\ &\gamma(1 - |\lambda|) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} |b_k|). \end{aligned}$$

i) 当 $|\lambda| \leq 1$ 时, 容易得出 $F(z)$ 在 D 上单叶保向.

ii) 当 $1 < |\lambda| \leq \frac{1+\gamma|b_1|}{|b_1|+\gamma}$ 时, 有

$$\begin{aligned} |F(z_1) - F(z_2)| &> |z_1 - z_2| ((1-\gamma) + \gamma(1 - \frac{1+\gamma|b_1|}{|b_1|+\gamma})) \times \\ &\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n}{1-\alpha} |b_k| + (\gamma - \frac{1+\gamma|b_1|}{|b_1|+\gamma}) |b_1| \geq \\ &|z_1 - z_2| ((1-\gamma) + \gamma(1 - \frac{1+\gamma|b_1|}{|b_1|+\gamma})) + (\gamma - \frac{1+\gamma|b_1|}{|b_1|+\gamma}) |b_1| = 0, \end{aligned}$$

则 $F(z)$ 是单叶的.

由定理 1 的证明可知 $|\frac{g'(z)}{h'(z)}| < 1 - (1-\gamma)(1-|b_1|)$, 从而有

$$|\frac{F_z(z)}{F_z(z)}| = |\lambda| |\frac{g'(z)}{h'(z)}| < \frac{1+\gamma|b_1|}{|b_1|+\gamma} [\gamma + (1-\gamma)|b_1|] \leq 1,$$

则 $F(z)$ 是保向的.

注 2 定理 2 的意义在于, 存在有 $|\lambda| > 1$, 仍保持 $F(z)$ 在 D 上单叶性的稳定性问题.

下面推广定理 B 的结论.

定理 3 设 $f(z)$ 为具有式(1)的调和映照, 满足

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} k[(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n] |a_k| + [(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n] |b_k| \leq \\ (1-\alpha) - [(1+\beta) - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)] |b_1|. \end{aligned} \quad (5)$$

若 $\delta \leq \frac{1}{2}(1 - \frac{(1+\beta) - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)}{1-\alpha} |b_1|)$, 则 $N_\delta(f) \subset S_H(m, n, \alpha, \beta)$.

证明 设 $f(z)$ 满足定理的条件, 令 $F(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} A_k z^k + \sum_{k=2}^{\infty} \bar{B}_k \bar{z}^k \in N_\delta(f)$, 取 $\delta \leq \frac{1}{2}(1 - \frac{(1+\beta) - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)}{1-\alpha} |b_1|)$, 因为

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} ([(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n] |A_k| + [(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n] |B_k|) \leq \\ (1-\alpha) + [(1+\beta) - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)] |B_1 - b_1| + \\ \sum_{k=2}^{\infty} ([(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n] |A_k - a_k| + \\ [(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n] |B_k - b_k|) + \\ [(1+\beta) - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)] |b_1| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{\infty} ([(1+\beta)k^m - (\alpha+\beta)k^n] | a_k | + \\ & [(1+\beta)k^m - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)k^n] | b_k |) \leqslant \\ & (1-\alpha) + \frac{1-\alpha}{2} (1 - \frac{(1+\beta) - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)}{1-\alpha} | b_1 |) + \\ & [(1+\beta) - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)] | b_1 | + \\ & \frac{1}{2} ((1-\alpha) - [(1+\beta) - (-1)^{m-n}(\alpha+\beta)] | b_1 |) = 2(1-\alpha). \end{aligned}$$

由定义可知 $N_{\delta}(f) \subset S_H(m,n,\alpha,\beta)$.

参考文献：

[1] CLUNIE J, SHELL-SMALL T. Harmonic univalent functions[J]. Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math, 1984, 9: 3-26.

[2] PAVLOVIC M. Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomorphisms of the unit disk[J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2002, 27: 365-372.

[3] KALAJ D. Quasiconformal harmonic functions between convex domains[J]. Publications De L'Institut Mathématique, 2004, 76(90): 3-20.

[4] HUANG Xin-zhong. Harmonic quasiconformal mappings on the upper half-plane[J]. Complex Variables and Elliptic Equations: An International Journal, 2011: 1-7.

[5] 黄心中. 单位圆上的调和拟共形同胚[J]. 数学年刊, 2008, 29A(4): 519-524.

[6] SEKER B. Salagean-type harmonic univalent functions[J]. International Journal of the Physical Sciences, 2011, 6(4): 801-807.

[7] 黄心中. 具有线性连接像域的局部单叶调和函数[J]. 数学年刊, 2010, 31A(5): 625-630.

[8] CHEN S H, PONNUSAMY S, WANG X. Properties of some classes of planar harmonic and planar biharmonic mappings[J]. Complex Anal Oper Theory, 2011, 5(3): 901-916.

[9] 谢志春, 黄心中. 某些单叶调和函数类的解析特征[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2011, 30(6): 704-708.

[10] JAHANGIRI J, SILVERMAN H. Harmonic close-to-convex mappings[J]. J Appl Math and Stoch Anal, 2002, 15(1): 23-28.

On the Property of a New Class of Salagean-Type
Univalent Harmonic Mappings

PAN Xu-ling, HUANG Xin-zhong

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: We study the subclass $S_{HK}(m,n,\alpha,\beta)$ of $S_H(m,n,\alpha,\beta)$ which is a new Salagean-type class with a differential operator defined by Salagean. One sufficient condition for functions in the subclass $S_{HK}(m,n,\alpha,\beta)$ to be harmonic quasiconformal mappings and convex harmonic mappings is obtained. Meanwhile, the stability property and the δ -neighborhood of harmonic mappings for the subclass $S_{HK}(m,n,\alpha,\beta)$ are considered. Our results improve and generalize the one made by B. Seker.

Keywords: univalent harmonic mapping; quasiconformal mapping; convex; stability; δ -neighborhood

(责任编辑：黄晓楠 英文审校：黄心中)