

一类一阶泛函微分方程非平凡周期解的存在性

余志炜, 王全义

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 利用锥不动点定理及分析技巧, 研究一类一阶时滞泛函微分方程非平凡周期解的存在性问题, 得到该类方程存在非平凡周期解的充分条件. 所得结果推广并改进了 S. G. KANG 和 G. ZHANG 的研究成果.

关键词: 泛函微分方程; 时滞; 锥; 不动点定理; 非平凡; 周期解

中图分类号: O 175

文献标志码: A

周期时滞现象广泛存在于经济、物理、生态等领域中, 引导了人们对时滞微分方程的研究, 如人口模型^[1]、血细胞模型^[2], 甚至大米价格的浮动模型^[3]等. 这类方程研究的一个很重要的问题就是方程是否存在周期解, 尤其是非平凡的周期解. 近几年来, 这些问题已经得到广泛的研究^[4-7]. 本文利用锥不动点定理及一些分析技巧, 研究了一类一阶时滞泛函微分方程非平凡周期解的存在性问题, 得到了该类方程存在非平凡周期解的充分条件.

1 预备知识和相关引理

文献[6]利用偏序和拓扑度理论研究了方程

$$y'(t) = -a(t)y(t) + f(t, y(t - \tau(t))), \quad (1)$$

$$x'(t) = a(t)x(t) - f(t, x(t - \tau(t))) \quad (2)$$

的非平凡周期解的存在性问题, 并获得了方程(1), (2)存在非平凡周期解的充分条件.

本文将讨论更为广泛的一类一阶时滞泛函微分方程

$$x'(t) = -a(t, x(t))x(t) + f(t, x(t - \tau(t))), \quad (3)$$

$$x'(t) = a(t, x(t))x(t) - f(t, x(t - \tau(t))) \quad (4)$$

的非平凡周期解的存在性问题. 式(3), (4)中: $f(t, x) \in C(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$; $a(t, x) \in C(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$; $\tau(t)$ 是以 ω 为周期的连续函数, 且对任意的 $(t, x) \in \mathbf{R}^2$, 有 $a(t + \omega, x) = a(t, x)$, $f(t + \omega, x) = f(t, x)$, 其中 $\omega > 0$ 是常数. 显然, 方程(3), (4)包含了方程(1), (2)的情况.

总是假设如下条件成立: A) $\forall (t, x) \in \mathbf{R}^2$, 存在 \mathbf{R} 上的以 ω 为周期的连续函数 $a_1(t), a_2(t)$, 使得 $a_1(t) \leq a(t, x) \leq a_2(t)$ 且对 $a_1(t)$ 有 $\int_0^\omega a_1(s) ds > 0$.

定义 1 设 X 是 Banach 空间, K 是 X 中的一个非空子集, 且满足

- i) 对任意 $u, v \in K$ 和实数 $\alpha, \beta \geq 0, \alpha u + \beta v \in K$ 成立;
- ii) 若 $u, -u \in K$, 必有 $u = \theta$, 则称 K 是 X 中的一个锥.

由文献[13]的定理 4.2 可以直接得到如下的引理 1(限于篇幅, 引理 2~8 的证明从略).

引理 1 设 X 是 Banach 空间, K 是 X 中的一个锥, Ω_1 和 Ω_2 是 X 中的有界开集, $\theta \in \Omega_1, \bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$, $T: K \cap (\bar{\Omega}_2 / \Omega_1) \rightarrow K$ 是全连续的, 若满足如下条件:

H₁) 存在 $u_0 \in K / \{\theta\}$, 使得 $u - Tu \neq \lambda u_0, \forall u \in K \cap \partial \Omega_2, \lambda > 0; Tu \neq \mu u, \forall u \in K \cap \partial \Omega_1, \mu > 1$;

$H_2)$ 存在 $u_0 \in K/\{\theta\}$, 使得 $u - Tu \neq \lambda u_0, \forall u \in K \cap \partial\Omega_1, \lambda > 0; Tu \neq \mu u, \forall u \in K \cap \partial\Omega_2, \mu > 1$. 那么, T 在 $K \cap (\bar{\Omega}_2/\Omega_1)$ 中必有不动点.

设 $X = \{x : x \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}), x(t + \omega) = x(t), t \in \mathbf{R}\}$, 取范数 $\|x\| = \sup_{t \in [0, \omega]} |x(t)|$, 此范数下的 X 是一个 Banach 空间; 再取范数 $\|\varphi, \psi\| = \max\{\|\varphi\|, \|\psi\|\}$, 则此范数下 $X \times X$ 也是一个 Banach 空间.

引理 2 如果 $g(t)$ 是连续的 ω -周期函数, 则

$$\int_0^\omega g(t) ds = \int_0^{t+\omega} g(s) ds, \quad t \in \mathbf{R}.$$

引理 3 $x = x(t)$ 是方程 (3) 的 ω -周期解, 当且仅当 $x = x(t)$ 是积分方程

$$x(t) = \int_0^{t+\omega} G(t, s, x) f(s, x(s - \tau(s))) ds \quad (5)$$

的 ω -周期解, 且有

$$G(t, s, x) = \frac{\exp(\int_t^s a(v, x(v)) dv)}{\exp(\int_0^\omega a(v, x(v)) dv) - 1}. \quad (6)$$

根据 $a_1(t)$ 和 $a_2(t)$ 的周期性, 记

$$\begin{aligned} m &= \inf\{\exp(\int_t^s a_2(r) dr) : t \leq s \leq t + \omega, t \in \mathbf{R}\} = \\ &\inf\{\exp(\int_s^{t+\omega} a_2(r) dr) : t \leq s \leq t + \omega, t \in \mathbf{R}\}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} M &= \sup\{\exp(\int_t^s a_1(r) dr) : t \leq s \leq t + \omega, t \in \mathbf{R}\} = \\ &\sup\{\exp(\int_s^{t+\omega} a_1(r) dr) : t \leq s \leq t + \omega, t \in \mathbf{R}\}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$L_1 = \exp(\int_0^\omega a_1(r) dr) - 1, \quad L_2 = \exp(\int_0^\omega a_2(r) dr) - 1, \quad \delta = \frac{mL_1}{ML_2}, \quad (9)$$

$$G_1(t, s) = \frac{\exp(\int_t^s a_1(v) dv)}{\exp(\int_0^\omega a_2(v) dv) - 1}, \quad G_2(t, s) = \frac{\exp(\int_t^s a_2(v) dv)}{\exp(\int_0^\omega a_1(v) dv) - 1}. \quad (10)$$

式 (10) 中: $t \leq s \leq t + \omega, t \in \mathbf{R}$. 由此易见

$$\left. \begin{aligned} m &\geq \exp(-\int_0^\omega |a_1(v)| dv), \quad M \leq \exp(\int_0^\omega |a_2(v)| dv), \\ M &> 1 \geq m > 0, \quad L_2 \geq L_1 > 0, \quad \delta \in (0, 1), \\ 0 &< \frac{m}{L_2} \leq G_1(t, s) \leq G(t, s, x) \leq G_2(t, s) \leq \frac{M}{L_1}, \quad t \leq s \leq t + \omega, \quad x, t \in \mathbf{R}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

现假设如下条件成立: B) 设 $f(t, x) = f_1(t, x) - f_2(t, x)$, 其中 $f_i(t, x) \in C(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^+)$ ($i = 1, 2$) 且关于第 1 个变量 t 是 ω -周期的, 同时满足 $f_i(t, 0) = 0$ ($i = 1, 2$). 取 $P = \{\phi : \phi \in X : \phi(t) \geq \delta \|\phi\|, t \in \mathbf{R}\}$, 容易验证 $K := P \times P$ 是 $X \times X$ 中的一个锥. 建立的算子为

$$(T_1 u)(t) = \int_t^{t+\omega} G(t, s, \varphi - \psi) f_1(s, \varphi(s - \tau(s)) - \psi(s - \tau(s))) ds, \quad (12)$$

$$(T_2 u)(t) = \int_t^{t+\omega} G(t, s, \varphi - \psi) f_2(s, \varphi(s - \tau(s)) - \psi(s - \tau(s))) ds, \quad (13)$$

$$T(\varphi, \psi) = (T_1(\varphi, \psi), T_2(\varphi, \psi)). \quad (14)$$

这里 $G(t, s, x)$ 由式 (6) 给出, $u = (\varphi, \psi) \in X \times X$.

引理 4 $T : K \rightarrow X \times X$ 且 $TK \subset K$.

引理 5 $T : K \rightarrow X$ 是全连续算子.

引理 6 $x = x(t)$ 是方程 (4) 的 ω -周期解, 当且仅当 $x = x(t)$ 是积分方程

$$x(t) = \int_t^{t+\omega} H(t, s, x) f(s, x(s - \tau(s))) ds \quad (15)$$

的 ω -周期解, 且有

$$H(t,s,x) = \frac{\exp(-\int_t^s a(r,x(r))dr)}{1 - \exp(-\int_0^\omega a(r,x(r))dr)} = \frac{\exp(\int_s^{t+\omega} a(r,x(r))dr)}{\exp(\int_0^\omega a(r,x(r))dr) - 1}. \tag{16}$$

类似地, 记

$$H_1(t,s) = \frac{\exp(\int_s^{t+\omega} a_1(r)dr)}{\exp(\int_0^\omega a_2(r)dr) - 1}, \quad H_2(t,s) = \frac{\exp(\int_s^{t+\omega} a_2(r)dr)}{\exp(\int_0^\omega a_1(r)dr) - 1}. \tag{17}$$

式(17)中: $t \leq s \leq t + \omega, t \in \mathbf{R}$.

从式(7),(8),(17)和条件 A), 可得

$$\begin{cases} 0 < \frac{m}{L_2} \leq H_1(t,s) \leq H(t,s,\varphi - \psi) \leq H_2(t,s) \leq \frac{M}{L_1}, \\ u = (\varphi, \psi) \in K, \quad s \in [t, t + \omega], \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

建立算子如下:

$$(F_1 u)(t) = \int_t^{t+\omega} H(t,s,\varphi - \psi) f_1(s, \varphi(s - \tau(s)) - \psi(s - \tau(s))) ds, \tag{18}$$

$$(F_2 u)(t) = \int_t^{t+\omega} H(t,s,\varphi - \psi) f_2(s, \varphi(s - \tau(s)) - \psi(s - \tau(s))) ds, \tag{19}$$

$$F(u) = (F_1(u), F_2(u)). \tag{20}$$

式(18)~(20)中: $H(t,s,x)$ 由式(16)给出; $u = (\varphi, \psi) \in K$.

引理 7 $F : K \rightarrow X \times X$ 且 $FK \subset K$.

引理 8 $F : K \rightarrow K$ 是全连续算子.

2 主要结果及其证明

定理 1 假设条件 A)和 B)都成立, 如果存在常数 $k_1 > 0$ 和 $k_2, k_3, k_4 \geq 0$, 使得

$$\left. \begin{aligned} \frac{L_2}{mk_1} \frac{L_1 \delta}{2M(k_2 + 1)} &< \frac{\delta}{2(1 + \frac{M(k_2 + 1)}{L_1})}, \\ \frac{L_2}{mk_1 \omega} &< \frac{\delta}{2(1 + \frac{M(k_2 + 1)}{L_1})}, \quad \frac{k_3 M \omega}{L_1} < \delta, \quad \frac{k_4 M \omega}{L_1} < \delta, \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

并且下列极限

$$\liminf_{|x| \rightarrow 0} \frac{f_1(t,x)}{|x|} > k_1, \quad \limsup_{|x| \rightarrow 0} \frac{f_2(t,x)}{|x|} \leq k_2, \tag{22}$$

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(t,x)}{x} \leq k_3, \quad \limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f_2(t,x)}{|x|} \leq k_4 \tag{23}$$

对所有的 $t \in \mathbf{R}$ 一致地成立, 则方程(3)至少存在一个非平凡的 ω -周期解.

证明 由引理 5 可知, 且由式(14)定义的算子 $T : K \rightarrow K$ 是一个全连续算子. 由式(22)可知, 对 $0 < \epsilon_1 \leq 1$, 存在 $r_1 > 0$, 使得当 $|x| \leq r_1$ 时, 有

$$|f_2(t,x)| < (k_2 + \epsilon_1) |x|, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{24}$$

由式(22)可知, 存在着 $\epsilon_2 > 0$ 充分小及 $r_2 > 0$ 充分小(特别地, $0 < r_2 < r_1$), 使得当 $|x| \leq r_2$ 时, 有

$$|f_1(t,x)| \geq k_1(1 + \epsilon_2) |x|, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{25}$$

取正数 ϵ , 满足

$$0 < \frac{L_2}{mak_1} < \epsilon < \frac{\delta}{2(1 + \frac{M(k_2 + 1)\omega}{L_1})}, \tag{26}$$

且有

$$a = \min\{\omega, \frac{L_1 \delta}{2M(k_2 + 1)}\}. \quad (27)$$

令 $\Omega_1 = \{u = (\varphi, \psi) \in K : \|u\| < r\}$, $0 < r < r_2$, 又令 $u_0 = (\varphi_0, \theta)$, $\varphi_0(t) \equiv 1, t \in \mathbf{R}$, 则 $u_0 \in K \setminus \{\theta\}$.

以下证明对任意 $u = (\varphi, \psi) \in K \cap \partial\Omega_1$ 和 $\lambda > 0$, 必有

$$u - Tu \neq \lambda u_0. \quad (28)$$

否则的话, 假设存在 $u^* = (\varphi^*, \psi^*) \in K \cap \partial\Omega_1$ 和 $\lambda_0 > 0$, 使得 $u^* - Tu^* = \lambda_0 u_0$, 即

$$\varphi^* - T_1(\varphi^*, \psi^*) = \lambda_0 \varphi_0, \quad (29)$$

$$\psi^* - T_2(\varphi^*, \psi^*) = \theta. \quad (30)$$

现在令 $D(t) = \{y : y \in [t, t + \omega], |\varphi^*(y) - \psi^*(y)| > \varepsilon r\}$, 于是由 $\varphi^*(y), \psi^*(y)$ 的周期性可知, 集合 $D(t)$ 的测度 $\text{mes } D(t)$ 与 t 无关. 下面先证明

$$\text{mes } D(t) \geq a. \quad (31)$$

这里, a 由式(27)给出. 以下分两种不同情况讨论.

情况 1 如果对任意的 $y \in \mathbf{R}$, 都有 $|\varphi^*(y) - \psi^*(y)| > \varepsilon r$. 显然有 $\text{mes } D(t) = \omega \geq a$, 即此时式(31)成立.

情况 2 如果存在 $y_1 \in \mathbf{R}$, 使得 $|\varphi^*(y_1) - \psi^*(y_1)| \leq \varepsilon r$, 则分别按 $\|\varphi^*, \psi^*\| = \|\varphi^*\|$ 和 $\|(\varphi^*, \psi^*)\| = \|\psi^*\|$ 两种不同的子情况讨论.

子情况 1 在 $\|\varphi^*, \psi^*\| = \|\varphi^*\|$ 条件下, 并由 $(\varphi^*, \psi^*) \in K \cap \partial\Omega_1$, 可以得到 $\|\varphi^*\| = r$. 再由 $\varphi^*(t) \geq 0, \psi^*(t) \geq 0$ 及 $|\varphi^*(y_1) - \psi^*(y_1)| \leq \varepsilon r$, 可得

$$\|\psi^*\| \geq \psi^*(y_1) > \varphi^*(y_1) - \varepsilon r \geq \delta \|\varphi^*\| - \varepsilon r = (\delta - \varepsilon)r. \quad (32)$$

设 $y_2 \in \mathbf{R}$, 使得 $\|\psi^*\| = \psi^*(y_2)$, 由式(24), (30)和式(32)可得

$$\begin{aligned} (\delta - \varepsilon)r &\leq \|\psi^*\| = \psi^*(y_2) \leq \\ &\frac{M(k_2 + \varepsilon_1)}{L_1} \left(\int_{D(y_2)} + \int_{[y_2, y_2 + \omega] \setminus D(y_2)} |\varphi^*(s - \tau(s)) - \psi^*(s - \tau(s))| \, ds \right) \leq \\ &\frac{Mr(k_2 + \varepsilon_1)}{L_1} [\text{mes } D(y_2) + \varepsilon \cdot \text{mes}([y_2, y_2 + \omega] \setminus D(y_2))]. \end{aligned} \quad (33)$$

再由式(24), (33)得

$$\begin{aligned} \text{mes } D(t) &\geq \frac{L_1(\delta - \varepsilon)}{M(k_2 + \varepsilon_1)} - \varepsilon \cdot \text{mes}([y_2, y_2 + \omega] \setminus D(y_2)) \geq \frac{L_1(\delta - \varepsilon)}{M(k_2 + \varepsilon_1)} - \varepsilon\omega \geq \\ &\frac{L_1}{M(k_2 + \varepsilon_1)} \left[\delta - \left(1 + \frac{M(k_2 + \varepsilon_1)\varepsilon}{L_1}\right)\varepsilon \right] \geq \frac{L_1 \delta}{2M(k_2 + 1)} \geq a. \end{aligned} \quad (34)$$

即此时式(31)成立.

子情况 2 如果 $\|(\varphi^*, \psi^*)\| = \|\psi^*\|$ 成立, 仍设 $y_2 \in \mathbf{R}$, 使得 $\|\psi^*\| = \psi^*(y_2)$. 于是, 可得到

$$\begin{aligned} (\delta - \varepsilon)r &< r = \|\psi^*\| = \psi^*(y_2) = \\ &\int_{y_2}^{y_2 + \omega} G(y_2, s, \varphi^* - \psi^*) f_2(s, \varphi^*(s - \tau(s)) - \psi^*(s - \tau(s))) \, ds. \end{aligned}$$

这样, 式(33)和式(34)仍成立, 从而式(31)成立. 综上所述, 式(31)总是成立的.

从式(25), (26), (29)和式(31), 可以得到

$$\begin{aligned} \varphi^*(t) &= T_1(\varphi^*, \psi^*) + \lambda_0 \varphi_0(t) \geq \\ &\frac{mk_1(1 + \varepsilon_2)}{L_2} \int_{D(t)} |\varphi^*(s - \tau(s)) - \psi^*(s - \tau(s))| \, ds + \lambda_0 \geq \\ &\frac{mk_1(1 + \varepsilon_2)}{L_2} \varepsilon r \cdot \text{mes } D(t) \geq \frac{mk_1(1 + \varepsilon_2)}{L_2} \varepsilon a \geq (1 + \varepsilon_2)r, \quad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

由此可得 $(1 + \varepsilon_2)r \leq \varphi^*(t) \leq r$. 这就发生了矛盾. 因此式(28)成立.

由式(21), 可取 $\varepsilon_3 > 0$, 使得 $(k_3 + \varepsilon_3) \frac{M\omega}{L_1} < \delta$, $(k_4 + \varepsilon_3) \frac{M\omega}{L_1} < \delta$. 又由式(23), 对于上述的 $\varepsilon_3 > 0$, 可取 $R_0 > r_1/\delta$, 使得

$$f_1(t, x) < (k_3 + \varepsilon_3)x, \quad t \in \mathbf{R}, \quad x > R_0,$$

$$f_2(t, x) < (k_4 + \varepsilon_3) |x|, \quad t \in \mathbf{R}, \quad |x| > R_0.$$

因此,有

$$0 \leq f_1(t, x) \leq (k_3 + \varepsilon_3)x + N_1, \quad x \geq -R_1, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (35)$$

$$0 \leq f_2(t, x) < (k_4 + \varepsilon_3) |x| + N_1, \quad t, x \in \mathbf{R}. \quad (36)$$

式(35),(36)中: $N_1 = \max\{N_{11}, N_{12}\}$, $N_{11} = \sup\{f_1(t, x) : |x| \leq R_1, t \in [0, \omega]\}$, $N_{12} = \sup\{f_2(t, x) : |x| \leq R_0, t \in [0, \omega]\}$,且有

$$R_1 = \max\left\{2r, R_0, \frac{N_1 M \omega}{L_1 \delta - (k_3 + \varepsilon_3) M \omega}, \frac{N_1 M \omega}{L_1 \delta - (k_4 + \varepsilon_3) M \omega}\right\} > 0. \quad (37)$$

令 $\Omega_2 = \{u = (\varphi, \psi) \in K : \|u\| < R_1\}$, 则证明

$$Tu \neq \mu u, \quad \forall u \in K \cap \partial\Omega_2, \quad \mu > 1 \quad (38)$$

成立. 事实上, 若式(38)不成立, 则必存在一个 $u_* = (\varphi_*, \psi_*) \in K \cap \partial\Omega_2$ 和某个 $\mu_0 > 1$, 使得 $Tu_* = \mu_0 u_*$, 即下列两式

$$T_1(\varphi_*, \psi_*) = \mu_0 \varphi_*, \quad (39)$$

$$T_2(\varphi_*, \psi_*) = \mu_0 \psi_* \quad (40)$$

必同时成立. 以下将证明式(39),(40)中至少有一式不成立.

首先, 如果 $\|(\varphi_*, \psi_*)\| = R_1 = \|\varphi_*\|$ 成立, 不妨设 $t_1 \in \mathbf{R}$, 使得 $\varphi_*(t_1) = \|\varphi_*\| = R_1$. 于是, 从式(35),(37)和式(39)可得

$$\begin{aligned} R_1 &= \varphi_*(t_1) < \mu_0 \varphi_*(t_1) = T_1(\varphi_*, \psi_*)(t_1) \leq \\ &\int_{t_1}^{t_1+\omega} \frac{M}{L_1} [(k_3 + \varepsilon_3) |\varphi_*(s - \tau(s)) - \psi_*(s - \tau(s))| + N_1] ds \leq \\ &\frac{M}{L_1} [(k_3 + \varepsilon_3) R_1 \omega + N_1 \omega] \leq \delta R_1 < R_1. \end{aligned}$$

由此可得 $R_1 = \|\varphi_*\| \leq \delta R_1 < R_1$. 这就发生了矛盾, 即此时式(39)不成立.

其次, 如果 $\|(\varphi_*, \psi_*)\| = R_1 = \|\psi_*\|$ 成立, 设 $t_2 \in \mathbf{R}$, 使得 $\psi_*(t_2) = \|\psi_*\| = R_1$. 于是从式(36),(37)和式(40), 可以得到

$$\begin{aligned} R_1 &= \psi_*(t_2) < \mu_0 \psi_*(t_2) = T_2(\varphi_*, \psi_*)(t_2) \leq \\ &\int_{t_2}^{t_2+\omega} \frac{M}{L_1} [(k_4 + \varepsilon_3) |\varphi_*(s - \tau(s)) - \psi_*(s - \tau(s))| + N_1] ds \leq \\ &\frac{M}{L_1} [(k_4 + \varepsilon_3) R_1 \omega + N_1 \omega] \leq \delta R_1 < R_1. \end{aligned}$$

这就发生了矛盾. 即此时式(40)不成立.

由于 $\|(\varphi_*, \psi_*)\| = R_1 = \|\varphi_*\|$ 和 $\|(\varphi_*, \psi_*)\| = R_1 = \|\psi_*\|$ 这两者中必有一者成立, 因此式(39)和(40)这两式中至少有一者不成立, 这说明了式(38)成立.

由式(28),(38)和引理1, 可以得到算子 T 至少存在一个不动点 $(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) \in K \cap (\bar{\Omega}_2 / \bar{\Omega}_1)$, 即 $T(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) = (\bar{\varphi}, \bar{\psi})$, 或

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(t) &= \int_t^{t+\omega} G(t, s, \bar{\varphi} - \bar{\psi}) f_1(s, \bar{\varphi}(s - \tau(s)) - \bar{\psi}(s - \tau(s))) ds, \\ \bar{\psi}(t) &= \int_t^{t+\omega} G(t, s, \bar{\varphi} - \bar{\psi}) f_2(s, \bar{\varphi}(s - \tau(s)) - \bar{\psi}(s - \tau(s))) ds. \end{aligned}$$

又因为 $f_i(t, 0) = 0 (i=1, 2)$, 且 $\|(\bar{\varphi}, \bar{\psi})\| > r > 0$, 所以 $\bar{\varphi}(t) \neq \bar{\psi}(t), \forall t \in \mathbf{R}$. 因此 $\bar{\varphi}(t) - \bar{\psi}(t)$ 是方程(5)的一个非平凡 ω -周期解. 再由引理3 即知 $\bar{\varphi}(t) - \bar{\psi}(t)$ 是方程(3)的一个非平凡 ω -周期解. 证毕.

推论 1 假设 $a(t)$ 是连续的 ω -周期函数且满足 $\int_0^\omega a(t) dt > 0$, 又假设下列极限

$$\begin{cases} \lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{f_1(t, x)}{|x|} = +\infty, & \lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{f_2(t, x)}{|x|} < +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(t, x)}{x} = 0, & \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f_2(t, x)}{|x|} = 0, \end{cases}$$

对所有的 $t \in \mathbf{R}$ 一致地成立, 则方程(1)至少存在一个非平凡的周期解.

定理 2 如果定理 1 的所有条件都满足, 则方程(4)至少存在一个非平凡的 ω -周期解.

推论 2 假设 $a(t)$ 是连续的 ω -周期函数且满足 $\int_0^\omega a(t) dt > 0$, 又假设下列极限

$$\begin{cases} \lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{f_1(t, x)}{|x|} = +\infty, & \lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{f_2(t, x)}{|x|} < +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(t, x)}{x} = 0, & \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f_2(t, x)}{|x|} = 0, \end{cases}$$

对所有的 $t \in \mathbf{R}$ 一致地成立, 则方程(2)至少存在一个非平凡的周期解.

注 1 易见, 定理 1 及定理 2 大大推广并改进了文献[6] 中的定理 1 及定理 2.

参考文献:

- [1] BELAR J. Population models with state-dependent delays[J]. Lect Notes Pure Appl Math Dekker, 1991, 131: 165-176.
- [2] MACKEY M C, MILTON J. Feedback delays and the origin of blood cell dynamics[J]. Comm Theoret Biol, 1990, 1: 229-327.
- [3] MACKEY M C. Commodity price fluctuations: Price dependent delays and nonlinearities as explanatory factors[J]. J Econom Theory, 1989, 48(2): 497-509.
- [4] 余志炜, 王全义. 一类具有偏差变元的二阶泛函微分方程周期解[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2009, 30(6): 709-714.
- [5] HAN Fei, WANG Quan-yi. Existence of multiple positive periodic solutions for differential equation with state-dependent delays[J]. J Math Anal Appl, 2006, 324(2): 908-920.
- [6] KANG Shu-gui, ZHANG Guang. Existence of nontrivial periodic solutions for first order functional differential equations[J]. Appl Math Lett, 2005, 18(1): 101-107.
- [7] MA Ru-yun, CHEN Rui-peng, Chen Tian-lan. Existence of positive periodic solutions of nonlinear first-order delayed differential equations[J]. J Math Anal Appl, 2011, 384(2): 527-535.
- [8] 郭大均. 非线性范函分析[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2002: 300-301.

Existence of Nontrivial Periodic Solutions for a Class of First Order Nonlinear Functional Differential Equations

SHE Zhi-wei, WANG Quan-yi

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, by employing fixed point theorem in cones and some analysis techniques, we study the problem on the existence of nontrivial periodic solutions for a class of first order nonlinear functional differential equations, and obtain some sufficient conditions which guarantee the existence of nontrivial periodic solutions for the equations. Our results extend and improve the research results made by S. G. KANG and G. ZHANG.

Keywords: functional differential equation; delay; cone; fixed point theorem; nontrivial; periodic solution

(责任编辑: 黄晓楠 英文审校: 黄心中)