

位移最小化的抗风柱的拓扑优化设计

李霞, 周克民

(华侨大学 土木工程学院, 福建 厦门 361021)

摘要: 通过对抗风柱的分析, 得出抗风柱的拓扑优化模型. 分析抗风柱在不同长细比时的处理方法, 即在抗风柱的长细比较大的时候可以采取将柱分段, 将每段划分有限元网格, 进行有限元分析. 每一段的处理方法和最终结果是相同的. 优化基结构采用各向异性类桁架连续体材料模型, 以材料在结点位置的密度和主方向为设计变量, 结点在指定方向的位移为目标函数. 采用优化准则法, 借助有限元分析, 优化材料分布场形成类桁架连续体, 得到抗风柱的优化结果.

关键词: 拓扑优化; 类桁架连续体; 抗风柱; 有限元法

中图分类号: TU 311; TU 323.04

文献标志码: A

结构拓扑优化的目的是寻找最优传力路径, 其主要有均匀化法^[1]、进化结构方法^[2]、渐进结构优化设计(ESO)法^[3]和独立连续映射(ICM)法^[4]等. 这些方法普遍以各向同性材料为基结构, 因此限制了寻优路径, 并且产生各种数值不稳定问题^[5-7]. Michell^[8]理论揭示了拓扑优化结构的类桁架性质, 基于类桁架材料的拓扑优化方法具有更大的寻优空间, 更可能找到接近理论解的最优解. 类桁架材料具有难以制造的问题, 可以通过离散化方法克服. 类桁架材料模型采用满应力准则方法成功地处理了应力约束问题, 具有很高的计算效率^[9-10]. 但是处理位移约束体积最小(或体积约束位移最小)问题则需要研究新的准则和方法. 考虑到抗风柱与山墙连接的理想方式是柱与墙体整体连接, 这种连接方式抗风柱承受均布荷载, 但是施工不易且造价提高. 工程上常采用抗风柱与墙体多点连接, 连接点的个数以满足工程计算和需要为准, 这种连接方式抗风柱承受集中力作用^[11-12]. 抗风柱的上下固定限制水平位移和竖向位移^[13]. 按照抗风柱所承受荷载方式的不同, 分别给出优化结果和解释. 本文通过研究体积约束位移最小问题解决山墙抗风柱的拓扑优化问题.

1 力学模型的建立

1.1 类桁架材料的弹性矩阵

在抗风柱的纵向对称受力面的两个方向布置材料, 且允许材料连续变化可实现设计目标在理论上的最优^[7]. 考虑到各向异性材料难以制造, 采取先优化材料的分布场, 然后再布置各向同性材料^[14]. 假设类桁架材料在域内连续非均匀分布, 材料的密度和主方向连续变化. 仍采用线弹性材料假设, 弹性模量为 E . 假设任一点材料在主方向的密度为 t , 则材料在该主方向的应力 σ 和应变 ϵ 关系为 $\sigma = tE\epsilon$.

在类桁架连续体中的任一点, 同一方向的相邻杆件之间没有相互联系, 所以这里取泊松比为零. 剪切刚度本来也应假设为零, 但是, 剪切刚度为零会导致结构不稳定, 刚度矩阵奇异. 为了避免这个问题, 将切应力 τ 和切应变 γ 之间的关系假设为

$$\tau = (1 - R_G)tE\gamma/4, \quad 0 \leq R_G < 1. \quad (1)$$

式(1)中: R_G 为剪切模量系数, 在迭代过程中逐渐从 0 趋近于 1, 最终剪切刚度趋于消失, 从而模拟了类

桁架材料的性质.

当材料仅沿一个方向分布时,该方向称为材料主轴. 如果材料主轴方向的材料密度为单位 1,在材料主轴下的弹性矩阵可以表示为

$$\mathbf{D}(1,0) = E \cdot \text{diag}[1 \quad 0 \quad (1 - R_G)/4]. \tag{2}$$

如果材料主轴与结构坐标轴的夹角为 α ,则在结构坐标系下的弹性矩阵可以表示为

$$\mathbf{D}(1,\alpha) = \mathbf{T}^\text{T}(\alpha)\mathbf{D}(1,0)\mathbf{T}(\alpha) = E \sum_{r=1}^6 \mathbf{g}_r(\alpha)\mathbf{A}_r. \tag{3}$$

式(3)中: $\mathbf{T}(\alpha)$ 是坐标变换矩阵,表示为

$$\mathbf{T}(\alpha) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \cos 2\alpha & 1 - \cos 2\alpha & 2\sin 2\alpha \\ 1 - \cos 2\alpha & 1 + \cos 2\alpha & -2\sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \sin 2\alpha & 2\cos 2\alpha \end{bmatrix}. \tag{4}$$

$\mathbf{g}_r(\alpha)$ 为函数矩阵表示为

$$\mathbf{g}_r(\alpha) = [R_G \cos 4\alpha \quad R_G \sin 4\alpha \quad \cos 2\alpha \quad \sin 2\alpha \quad R_G \quad 1] \tag{5}$$

的分量, \mathbf{A}_r 为常数矩阵,有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_2 &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_3 &= \frac{1}{2} \text{diag}[1 \quad -1 \quad 0], & \mathbf{A}_4 &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_5 &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_6 &= \frac{1}{2} \text{diag}[1 \quad 1 \quad \frac{1}{2}]. \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

在结点 j 位置的 2 个材料主轴方向,材料密度和材料主轴方向角度分别为 $t_{b,j}$ 和 $\alpha_{b,j} (b=1,2)$,则其弹性矩阵可以表示为

$$\mathbf{D}_j = \mathbf{D}(t_{b,j},\alpha_{b,j}) = \sum_{b=1}^2 t_{b,j} \mathbf{D}(1,\alpha_{b,j}) = E \sum_{b=1}^2 t_{b,j} \sum_{r=1}^6 \mathbf{g}_r(\alpha_{b,j})\mathbf{A}_r. \tag{7}$$

单元内材料可以连续变化,单元 e 内任意点的弹性矩阵可以由结点位置的弹性矩阵通过形函数插值近似表示,即

$$\mathbf{D}_e(\xi,\eta) = \sum_{j \in S_e} N_j(\xi,\eta) \mathbf{D}_j = E \sum_{j \in S_e} N_j(\xi,\eta) \sum_{b=1}^2 t_{b,j} \sum_{r=1}^6 \mathbf{g}_r(\alpha_{b,j})\mathbf{A}_r. \tag{8}$$

式(8)中: $N_j(\xi,\eta)$ 是结点 j 的形函数; S_e 是单元 e 的所有结点集合. 因为 $\alpha_{1,j}$ 和 $\alpha_{2,j}$ 之间是独立的,杆件一般不是正交的.

1.2 刚度矩阵及其导数

将式(8)代入单元刚度矩阵的定义 $\mathbf{k}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}^\text{T} \mathbf{D}_e \mathbf{B} \text{d}V$,得

$$\mathbf{k}_e = E \sum_{j \in S_e} \sum_{b=1}^2 t_{b,j} \sum_{r=1}^6 \mathbf{g}_r(\alpha_{b,j}) \int_{V_e} N_j \mathbf{B}^\text{T} \mathbf{A}_r \mathbf{B} \text{d}V = \sum_{j \in S_e} \sum_{b=1}^2 t_{b,j} \sum_{r=1}^6 \mathbf{g}_r(\alpha_{b,j}) \mathbf{H}_{e,j,r}. \tag{9}$$

式(9)中: \mathbf{B} 是几何矩阵; $\mathbf{H}_{e,j,r} = E \int_{V_e} N_j \mathbf{B}^\text{T} \mathbf{A}_r \mathbf{B} \text{d}V$ 是与材料分布无关,只与单元形状有关的常数矩阵,在优化过程中保持不变,而如果使用规则网格划分,也与单元无关.

单元刚度矩阵累加得到整体刚度矩阵,即

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}_e = \sum_e \sum_{j \in S_e} \sum_{b=1}^2 t_{b,j} \sum_{r=1}^6 \mathbf{g}_r(\alpha_{b,j}) \mathbf{H}_{e,j,r} = \sum_j \sum_{e \in S_j} \sum_{b=1}^2 t_{b,j} \sum_{r=1}^6 \mathbf{g}_r(\alpha_{b,j}) \mathbf{H}_{e,j,r}. \tag{10}$$

式(10)中: S_j 是围绕结点 j 周围的单元集合; J 为结点总数. 第 2 个等式仅是交换了对单元和对结点的求和顺序. 式(10)中分别对设计变量 $t_{b,j}$ 和 $\alpha_{b,j}$ 求导,得到刚度矩阵的灵敏度方程为

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t_{b,j}} = \sum_{e \in S_j} \sum_{r=1}^6 \mathbf{g}_r(\alpha_{b,j}) \mathbf{H}_{e,j,r}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha_{b,j}} = \sum_{e \in S_j} t_{b,j} \sum_{r=1}^6 \mathbf{g}'_r(\alpha_{b,j}) \mathbf{H}_{e,j,r}. \quad (12)$$

式(11)~(12)中: $\mathbf{g}'_r(\alpha_{b,j})$ 是函数矩阵求导的分量, 有

$$\mathbf{g}'(\alpha) = 2[-2R_G \sin 4\alpha \quad 2R_G \cos 4\alpha \quad -\sin 2\alpha \quad \cos 2\alpha \quad 0 \quad 0]. \quad (13)$$

2 最小位移抗风柱的类桁架连续体

2.1 目标函数及其导数

有限元结构刚度方程表达式为

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (14)$$

式(14)中: \mathbf{U} 和 \mathbf{F} 分别是结点的位移列向量和结点力列向量; \mathbf{K} 是结构刚度矩阵.

考虑到问题实际背景, 图 1(a)所示的平面连续体边界上作用有均布荷载 q , 上下边界固定, 在另一指定点和方向上有最大输出位移 u . 寻找材料的优化分布, 使得结构在给定的外荷载 q 作用下, 指定点的位移 u 输出最小. 为了便于求指定点的位移, 构造单位力状态如图 1(b)所示. 设 $\bar{\mathbf{U}}$ 和 $\bar{\mathbf{F}}$ 分别是单位荷载作用下的结点位移列向量和结点力列向量, 建立单位力状态下的结构刚度方程, 即

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{F}}. \quad (15)$$

由功的互等定理得

$$u = \mathbf{F}^T \bar{\mathbf{U}}. \quad (16)$$

式(16)关于设计变量 $t_{b,j}$ 求导, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial t_{b,j}} = \mathbf{F}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t_{b,j}}. \quad (17)$$

式(15)关于设计变量 $t_{b,j}$ 求导, 可得

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t_{b,j}} \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t_{b,j}} = 0, \quad \text{或} \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t_{b,j}} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t_{b,j}} \bar{\mathbf{U}}. \quad (18)$$

将式(18)第 2 式代入式(17), 并结合式(11)得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t_{b,j}} &= -\mathbf{F}^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t_{b,j}} \bar{\mathbf{U}} = -\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t_{b,j}} \bar{\mathbf{U}} = \\ &= -\sum_{r=1}^6 \mathbf{g}_r(\alpha_{b,j}) \sum_{e \in S_j} \mathbf{U}_e^T \mathbf{H}_{e,j,r} \bar{\mathbf{U}}_e = -\sum_{r=1}^6 \mathbf{g}_r(\alpha_{b,j}) h_{j,r}. \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)中: $h_{j,r} = \sum_{e \in S_j} \mathbf{U}_e^T \mathbf{H}_{e,j,r} \bar{\mathbf{U}}_e$.

类似的, 式(16)关于设计变量 $\alpha_{b,j}$ 求导, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t_{b,j}} &= -\mathbf{F}^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t_{b,j}} \bar{\mathbf{U}} = -\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t_{b,j}} \bar{\mathbf{U}} = \\ &= -t_{b,j} \sum_{r=1}^6 \mathbf{g}_r(\alpha_{b,j}) \sum_{e \in S_j} \mathbf{U}_e^T \mathbf{H}_{e,j,r} \bar{\mathbf{U}}_e = -t_{b,j} \sum_{r=1}^6 \mathbf{g}'_r(\alpha_{b,j}) h_{j,r}. \end{aligned} \quad (20)$$

2.2 体积约束及其导数

由于材料在单元内不均匀分布, 材料体积需要积分计算. 由材料在结点的密度插值得到单元内部的材料密度, 从而计算出结构的体积.

$$V = \sum_e \sum_{b=1}^2 \int_{V_e} \sum_{j \in S_e} N_j t_{b,j} dV = \sum_j \sum_{e \in S_j} \int_{V_e} N_j dV = \sum_{b=1}^2 t_{b,j} = \sum_j z_j \sum_{b=1}^2 t_{b,j}. \quad (21)$$

式(21)中: $z_j = \sum_{e \in S_j} \int_{V_e} N_j dV$. 由式(21)可以容易得到体积对设计变量的灵敏度 $\frac{\partial V}{\partial t_{b,j}} = z_j$, $\frac{\partial V}{\partial \alpha_{b,j}} = 0$.

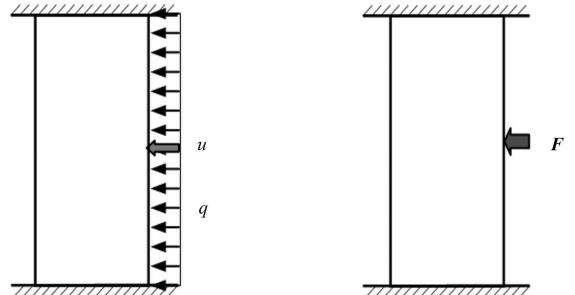


图 1 抗风柱的力学模型

Fig. 1 Mechanics model of wind resistance column

2.3 优化问题列式

优化问题可写成

$$\begin{cases} \text{find} & t_{b,j} \geqslant 0, \quad \alpha_{b,j}, \quad b = 1, 2; \quad j = 1, 2, \cdots, J; \\ \text{min} & u = \mathbf{F}^T \bar{\mathbf{U}}; \\ \text{s. t.} & V \leqslant V_0. \end{cases}$$

(22)

式(22)中: V_0 初始给定体积.

为了求解这个带有体积约束的位移最小化问题,建立拉格朗日函数,通过拉格朗日乘子 λ 将体积约束引入.

$$L = u + \lambda(V_0 - V).$$

(23)

式(23)取极值的条件为

$$\frac{\partial L}{\partial t_{b,j}} = \frac{\partial u}{\partial t_{b,j}} - \lambda \frac{\partial V}{\partial t_{b,j}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \alpha_{b,j}} = \frac{\partial u}{\partial \alpha_{b,j}} = 0.$$

(24)

由式(24)第 1 式得到

$$\frac{\partial u}{\partial t_{b,j}} / (\lambda \frac{\partial V}{\partial t_{b,j}}) = 1.$$

(25)

式(25)说明该比值是与单元无关的常数. 由式(24)第 2 式得到关于 $\alpha_{b,j}$ 三角函数超越方程,即

$$\sum_{r=1}^6 \mathbf{g}'_r(\alpha_{b,j}) h_{j,r} = 0.$$

(26)

采用数值方法求解得到角度.

3 优化过程与数值算例

优化结构拓扑的过程有如下 5 个主要步骤.

步骤 1 把设计域划分成有限个单元网格.

步骤 2 设置杆件在结点位置的密度和方向的初始值,有

$$t_{1,j}^0 = t_{2,j}^0 = 0, \quad \alpha_{1,j}^0 = 0, \quad \alpha_{2,j}^0 = \pi/2, \quad j = 1, 2, \cdots, J.$$

(27)

式(27)中:上角标是迭代指标. 式(2)中的剪切模量系数 R_G 值设为 0.

步骤 3 有限元分析得到结点位移和应力.

采用 Bendsøe^[5] 提出的优化准则法更新材料密度,即有

$$t_{b,j}^{i+1} = \begin{cases} \max(t_c, t_{b,j}^i - m), & \theta t_{b,j}^i < \max(t_c, t_{b,j}^i - m), \\ \theta t_{b,j}^i, & \max(t_{b,j}^i, t_{b,j}^i - m) \leqslant \theta t_{b,j}^i \leqslant t_{b,j}^i + m, \\ t_{b,j}^i + m & \theta t_{b,j}^i > t_{b,j}^i + m. \end{cases}$$

(28)

是根据式(25)定义的系数,有

$$\theta = -(\frac{\partial u}{\partial x})^s / (\lambda \frac{\partial V}{\partial x}).$$

(29)

式(28),(29)中:指数 s 是为了增加迭代稳定设置的阻尼系数,文中取 $s=1/2$; λ 是拉格朗日乘子,可以用二分法根据体积不变条件确定;式(29)中的导数分别由式(19),式(20)计算得到; t_c 为密度下限,为了避免刚度矩阵奇异,可以选择大于零的一个小数,文中取 10^{-7} ; m 是移动限界,初始取 0.2,如果迭代中目标函数反向变化,说明移动步长过大,移动限界减半. 由于不限制密度上限,合理的移动限界不容易确定. 这样动态选择移动限界可以更合理.

步骤 4 如果在连续两次的迭代中材料密度的相对改变量很小, $\max_{b,j}(|t_{b,j}^{i+1} - t_{b,j}^i|) / \max_{b,j} t_{b,j}^{i+1} < r$. 其中: r 是容许值,在文中取 0.2%,则进入下一步;否则,回到第 3 步.

步骤 5 如果 $R_G=1$,结束计算;否则,更新 $R_G=R_G+0.1$.

算例 1 优化结构的拓扑,单位采用无量纲化,均布荷载取厦门 50 a 一遇的基本风压 1.4 Pa(折算基本风速 $47.33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$),弹性模量 $E=3 \text{ GPa}$,高度 H 取 9.0 m. 此时,不同截面宽度 B 的优化结果,如图 2 所示.

由图 2 可知:柱体优化的结果为若干杆件的组合结构,且柱体截面宽度越大,杆件的数量越少,布置越简单.从迭代过程图形看,迭代次数较少,收敛性也非常好,说明本文的优化结果是可靠的;其次,柱体截面越小,位移越大,位移的变化幅度也很大,截面增大时位移减小,当截面宽度增大到一定尺寸时,最大位移的变化很小.所以在实际工程应用中,在满足抗风柱的最大挠度要求的前提下,应尽量控制柱体截面宽度在一个合理的范围之内.

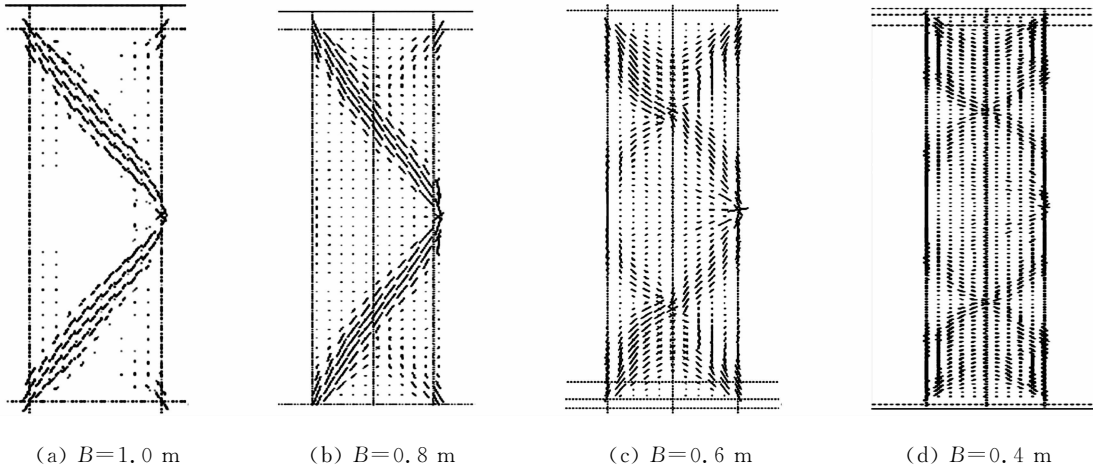


图 2 不同截面宽度的优化结果
Fig. 2 Optimization results of different width

算例 2 考虑到实际工程情况,柱体与墙体为多点连接,这时抗风柱所受的力为多点处每点的集中力作用,这时的优化结果与均布荷载作用下的结果相同,所以在优化过程中只以均布荷载作用为准.

算例 3 当柱体的长细比太大,同时要控制柱体截面宽度,此时可将柱体分为合理的几段,每段单独优化,挠度控制取各段挠度的累加和.优化结果如图 3 所示.

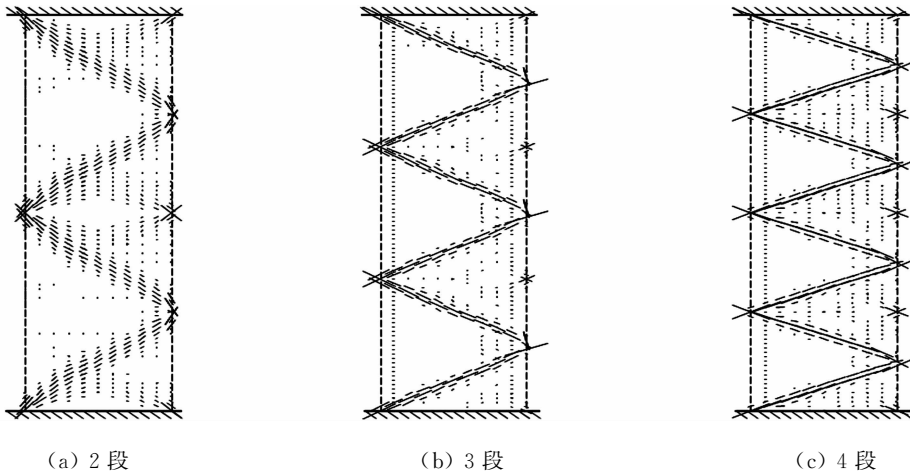


图 3 分段优化结果
Fig. 3 Sub-optimal results

由图 3 可以看出:一般柱体长细比较大的情况下,将柱体分为 2~3 段就可以满足要求,分的太多就失去了拓扑优化的意义.

4 结束语

采用两相类桁架材料模型,对山墙抗风柱进行了拓扑优化设计.对抗风柱在不同长细比的情况下,分别进行了优化,并对比了优化结果.分析了优化过程中函数迭代过程的收敛性,得出了收敛性很好的结论,这也进一步印证了对抗风柱进行优化的合理性和可行性.同时,给出了如果柱体的长细比太大,可以将柱体分段优化的结果;且不管是整体优化还是分段优化,结果均是桁架结果.这也和工程上的实际结构非常接近,所以实际工程应用也较容易.

参考文献：

[1] BENDSØE M P,KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method [J]. Comput Meth Appl Mech Eng,1988,71(2):197-224.

[2] QUERIN O M,YOUNG V,STEVEN G P,et al. Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimization[J]. Comput Meth Appl Mech Eng,2000,189(2):559-573.

[3] ALLAIRE G,JOUVE F. A level-set method for vibration and multiple loads structural optimization[J]. Comput Meth Appl Mech Eng,2005,194(30/31):3269-3290.

[4] SUI Yun-kang,YU Xin. The topological optimization for truss structures with stress constraints based on the exist-null combined model[J]. Acta Mechanica Sinica,1998,14(2):179-185.

[5] DIAZ A,SIGMUND O. Checkerboard patterns in layout optimization[J]. Struct Optim,1995,10(1):40-45.

[6] SIGMUND O,PETERSSON J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima[J]. Struct Optim,1998,16(1):68-75.

[7] 周克民,李俊峰,李霞. 结构拓扑优化研究方法综述[J]. 力学进展,2005,35(1):69-76.

[8] MICHELL A G M. The limits of economy of material in frame structure[J]. Phil Mag,1904,8(47):589-597.

[9] 闫凯,周克民. 类桁架结构的多工况应力约束拓扑优化设计[J]. 华侨大学学报:自然科学版,2009,30(6):686-690.

[10] ZHOU Ke-min,LI Xia. Topology optimization of structures under multiple load cases using fiber-reinforced composite material model[J]. Computational Mechanics,2006,38(2):163-170.

[11] 泮威风. 门式刚架轻钢结构抗风柱的设计[J]. 宁波大学学报,2005,18(4):11-12.

[12] 储涛,陈道政. 桁架式抗风柱在轻钢厂房中的应用[J]. 山西建筑,2008,34(31):28-30.

[13] 武延民,王元清,石永久,等. 门式刚架轻钢结构抗风柱的设计与分析[J]. 工业建筑,2003,33(1):56-57.

[14] 周克民,李霞. 三杆类桁架材料模型多工况最小柔度优化[J]. 工程力学,2011,28(10):16-20.

Topological Optimum Design of Wind Resistant Pillars
with Minimal Displacement

LI Xia, ZHOU Ke-min

(College of Civil Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China)

Abstract: The topology optimization models of wind resistant pillars were established by analyzing their different slenderness ratios. The wind resistant pillars with larger slenderness ratios were divided into several segments. The every segment was divided by finite element mesh and was analyzed by finite element method. The optimization method and optimization results were identical for every segment. The anisotropic truss-like continua material model was adopted as ground structures. The densities and principal orientations of material at nodes were taken as design variables. The nodal displacement along the prescribed direction was taken as the objective function. The material distribution field were optimized to form truss-like continua by optimality criteria method. As the result, the optimized wind resistant pillars were obtained.

Keywords: topology optimization; truss-like continuum; wind resistant pillars; finite element method

(责任编辑：黄晓楠 英文审校：方德平)