第 34 卷　第 3 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 34　No. 3
2013 年 5 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　May 2013

文章编号:1000-5013(2013)03-0356-05　　DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.2013.03.0356

Serre 商范畴的 Auslander-Reiten 序列

张阳，林增强

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 设 A 是有限维 k-代数，$\mathscr{A}=A$-mod，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的有厚度子范畴，通过从 $\mathscr{A}$ 的 Auslander-Reiten(AR)序列到导出范畴 $D^b(\mathscr{A})$ 的 AR 三角的转化，研究 $\mathscr{A}$ 的 AR 序列与 Serre 商范畴 $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ 的 AR 序列的关系．文中给出 $\mathscr{A}$ 的 AR 序列在商函子 Q：$\mathscr{A}\to\mathscr{A}/\mathscr{B}$ 下的像是 $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ 的 AR 序列的充要条件.

关键词： 商范畴；Auslander-Reiten 序列；垂范畴；有限维 k-代数

中图分类号： O 153.3；O 154.1　　**文献标志码：** A

1981 年，Auslander 等[1]通过研究子范畴的 Auslander-Reiten(AR)序列，证明了有限生成模范畴的函子有限子范畴存在 AR 序列. 1995 年，Auslander 等[2]证明了 Artin 代数的有限生成模范畴存在 AR 序列．最近，Puiman[3]给出了有限维 k-代数的有限生成模范畴的对扩张及直和项封闭的子范畴存在 AR 序列的充要条件. 类似地，Happel[4]在三角范畴中引入 AR 三角的概念，证明有限维 k-代数 A 的有界导出范畴存在 AR 三角的充要条件是 A 的整体维数有限[5]. Jørgensen[6]证明了三角范畴的反变有限子范畴的 AR 三角的存在性，并同时给出了有限生成模范畴的函子有限子范畴 AR 序列存在性的一个新的证明. Liu[7]引入 Krull-Schmidt 范畴的 AR 序列的概念，统一 Abel 范畴的 AR 序列和三角范畴的 AR 三角，并证明了 Krull-Schmidt 范畴的 AR 序列可以诱导稳定商范畴的 AR 序列. 林增强[8]给出了三角范畴的 AR 三角诱导 Verdier 商范畴的 AR 三角的充要条件. 本文主要研究 $\mathscr{A}$ 中的 AR 序列与 Serre 商范畴 $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ 中的 AR 序列的关系，给出 $\mathscr{A}$ 中的 AR 序列诱导 $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ 中的 AR 序列的充要条件.

1　AR 序列与 AR 三角

设 $\mathscr{A}$ 为加法范畴，$\mathscr{A}$ 中非可裂单态射 f：$A\to B$ 称为左几乎可裂的，若任意非可裂单态射 f'：$A\to B'$ 均可以经过 f 分解. 态射 f：$A\to B$ 称为左极小的，若态射 h：$B\to B$ 满足 $hf=f$ 蕴含 h 是同构. 对偶地，有右几乎可裂态射和右极小态射的概念.

定义 1[1]　设 $\mathscr{A}$ 为 Abel 范畴，$\mathscr{A}$ 的一个短正合列 $0\to A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\to 0$ 称为 AR 序列，如果满足以下 2 个条件：

1) f 是左几乎可裂的；

2) g 是右几乎可裂的.

下面的命题给出了 AR 序列的几个等价定义.

命题 1[2]　设 $\mathscr{A}$ 为 Abel 范畴，$0\to A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\to 0$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个短正合列，则以下叙述等价：

1) 这个短正合列是 AR 序列；

2) A 是不可分解的，g 是右几乎可裂的；

3) C 是不可分解的，f 是左几乎可裂的；

4) f 是左极小几乎可裂的；

收稿日期： 2012-05-12
通信作者： 林增强(1980-)，男，副教授，主要从事代数表示论的研究. E-mail:lzq134@163.com.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11126331)；福建省自然科学基金资助项目(2011J01004)

5）g 是右极小几乎可裂的.

定义 2[4]　设 $\mathscr{C}$ 是 Hom 有限的 Krull-Schmidt 三角范畴，称 $\mathscr{C}$ 的一个好三角 $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}X[1]$称为 AR 三角，如果满足下列 3 个条件：

1）X,Z 是不可分解的；

2）$w\neq 0$；

3）u 是左几乎可裂的.

注 1　在条件 1)与 2)下，条件 3)等价于条件 v 是右几乎可裂的.

设 $\mathscr{A}$ 是 Abel 范畴，则自然函子 $i:\mathscr{A}\to D^b(\mathscr{A})$是完全忠实的. 在不引起混淆的情况下，将 $\mathscr{A}$ 的对象等同于 $D^b(\mathscr{A})$的 0 次茎复形，将 $\mathscr{A}$ 中态射 $f:A\to B$ 与 $i(f)$等同起来.

从下面的命题可以看出 AR 三角与 AR 序列的紧密联系.

命题 2[2]　设 A 是整体维数有限的有限维 k-代数，$0\to X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\to 0$ 是 A-mod 的 AR 序列，则 $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}X[1]$为 $D^b(A\text{-mod})$的 AR 三角的充要条件是 $\mathrm{Pd}(Z)\leqslant 1$，$\mathrm{Id}(X)\leqslant 1$，其中 $w\in \mathrm{Hom}_{D^b(A\text{-mod})}(Z,X[1])\cong \mathrm{Ext}_A^1(Z,X)$对应于短正合列 $0\to X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\to 0$.

证明　这里只证明必要性. 由文献[4]知，$X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}X[1]$是 $D^b(A\text{-mod})$的 AR 三角当且仅当存在复形 $P^{\cdot}\in K^b(A\text{-proj})$，使得在 $D^b(A\text{-mod})$中，$Z\cong P^{\cdot}$，$X\cong vP^{\cdot}[-1]$，其中 v 为 $D^b(A\text{-mod})$的 Nakayama 函子.

设 Z 的极小投射表现为 $P_{-1}\xrightarrow{p}P_0\to Z\to 0$，则 $\tau Z=\mathrm{Ker}(vp)$，这里 τ 是 A-mod 的 AR 变换. 由 τ 右正合，得正合列 $0\to\tau Z\to vP_{-1}\xrightarrow{vp}vP_0\to 0$.

设复形 $P^{\cdot}=\cdots\to 0\to P_{-1}\xrightarrow{p}P_0\to 0\to\cdots$，记 $P^{\cdot}=(P_{-1}\to P_0)$. 若 $\mathrm{Pd}(Z)\leqslant 1$，$\mathrm{Id}(X)\leqslant 1$，则有 $\mathrm{Ker}\,p=0$，$vZ=0$，故 $D^b(A\text{-mod})$中 $Z\cong P^{\cdot}$. 由 $0\to X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\to 0$ 是 AR 序列得 $X\cong\tau Z\cong(vP_{-1}\to vP_0)[-1]=vP^{\cdot}[-1]$.

命题 3　设 $\mathscr{A}$ 为 Abel 范畴，$0\to A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\to 0$ 是 $\mathscr{A}$ 的短正合列. 若 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\xrightarrow{h}A[1]$是 $D^b(\mathscr{A})$的 AR 三角，则 $0\to A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\to 0$ 是 $\mathscr{A}$ 的 AR 序列.

证明　因为 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\xrightarrow{h}A[1]$是 $D^b(\mathscr{A})$的 AR 三角，所以 $h\neq 0$. 进而在 $D^b(\mathscr{A})$中，f 是非可裂单态射，g 是非可裂满态射. 所以在 $\mathscr{A}$ 中，f 是非可裂单态射，g 是非可裂满态射. 设 $w:A\to W$ 为 $\mathscr{A}$ 的任意非可裂单态射，则 $w:A\to W$ 是 $D^b(\mathscr{A})$的非可裂单态射.

进一步，因 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\xrightarrow{h}A[1]$是 $D^b(\mathscr{A})$的 AR 三角，所以 $f:A\to B$ 在 $D^b(\mathscr{A})$中是左几乎可裂的. 因此，存在 $D^b(\mathscr{A})$的态射 $\Psi=t\backslash e$，t 为拟同构，使得 $\Psi\circ(id_B\backslash f)=id_W\backslash w$，则有 $K^b(\mathscr{A})$中的交换图(图 1)，其中，v 是拟同构.

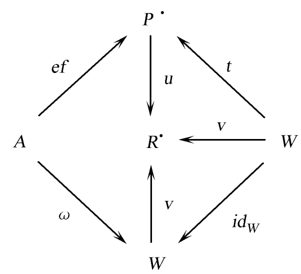

图 1　$K^b(\mathscr{A})$中的交换图

Fig. 1　Commutative diagram in $K^b(\mathscr{A})$

于是，$w=H^0(w)=H^0(v)^{-1}H^0(u)H^0(ef)=H^0(t)^{-1}H^0(e)f$，进而 w 可经 f 分解，所以 f 是 $\mathscr{A}$ 的左几乎可裂态射. 对偶可证，g 是 $\mathscr{A}$ 的右几乎可裂态射. 这就证明了 $0\to A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\to 0$ 是 $\mathscr{A}$ 的 AR 序列.

推论 1　设 A 是遗传 k-代数，$X,Y,Z\in A\text{-mod}$，则 A-mod 的短正合列 $0\to X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\to 0$ 是 AR 序列，当且仅当 $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}X[1]$是 $D^b(A\text{-mod})$的 AR 三角. 其中，$w\in\mathrm{Hom}_{D^b(A\text{-mod})}(Z,X[1])\cong\mathrm{Ext}_A^1(Z,X)$对应于短正合列 $0\to X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\to 0$.

2 相关引理

设 $\mathscr{D}$ 是三角范畴,$\mathscr{D}$ 的三角子范畴 $\mathscr{U}$ 称为有厚度子范畴,如果 $\mathscr{U}$ 对直和项封闭. Verdier 商范畴 $\mathscr{D}/\mathscr{U}$ 是三角范畴,标准商函子 $Q:\mathscr{D}\to\mathscr{D}/\mathscr{U}$ 是正合函子.

设 $\mathscr{A}$ 为 Abel 范畴,$\mathscr{A}$ 的一个非平凡满子范畴 $\mathscr{B}$ 称为有厚度子范畴,若 $\mathscr{A}$ 的短正合列 $0\to M'\to M\to M''\to 0$ 满足 $M',M''\in\mathscr{B}$ 当且仅当 $M\in\mathscr{B}$. $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的 Abel 子范畴.

令 $S_{\mathscr{B}}=\{f:M\to N\mid \mathrm{Ker}\, f,\mathrm{Coker}\, f\in\mathscr{B}\}$,则 $S_{\mathscr{B}}$ 可以作成 $\mathscr{A}$ 的一个乘法系. Serre 商范畴 $\mathscr{A}/\mathscr{B}=S_{\mathscr{B}}^{-1}\mathscr{A}$ 是 Abel 范畴,标准商函子 $Q:\mathscr{A}\to\mathscr{A}/\mathscr{B}$ 是正合函子[9]. 记 $D^b_{\mathscr{B}}(\mathscr{A})=\{X^{\cdot}\in D^b(\mathscr{A})\mid \forall p\in\mathbf{Z},H^p(X^{\cdot})\in\mathscr{B}\}$,则 $D^b_{\mathscr{B}}(\mathscr{A})$ 是 $D^b(\mathscr{A})$ 的三角子范畴.

引理 1[10] 设 $\mathscr{A}$ 是 Abel 范畴,$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的有厚度子范畴,则有三角等价 $D^b(\mathscr{A})/D^b_{\mathscr{B}}(\mathscr{A})\cong D^b(\mathscr{A}/\mathscr{B})$.

设 $\mathscr{B}$ 是 Abel 范畴 $\mathscr{A}$ 的有厚度子范畴,记 $\mathscr{B}^{\perp}=\{X\in\mathscr{A}\mid \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{B},X)=0,\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(\mathscr{B},X)=0,\forall i\in\mathbf{Z}^+\}$,称为 $\mathscr{B}$ 的右垂范畴.

对偶地,记 ${}^{\perp}\mathscr{B}=\{Z\in\mathscr{A}\mid \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Z,\mathscr{B})=0,\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(Z,\mathscr{B})=0,\forall i\in\mathbf{Z}^+\}$,称为 $\mathscr{B}$ 的左垂范畴. 设 $\mathscr{U}$ 是三角范畴 $\mathscr{D}$ 的有厚度子范畴,记 $\mathscr{U}_{\perp}=\{X\in\mathscr{D}\mid \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(\mathscr{U},X)=0\}$. 对偶地,记 ${}_{\perp}\mathscr{U}=\{Z\in\mathscr{D}\mid \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(Z,\mathscr{U})=0\}$.

引理 2[8] 设 $\mathscr{D}$ 是三角范畴,$\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{D}$ 的有厚度子范畴,$Q:\mathscr{D}\to\mathscr{D}/\mathscr{U}$ 是商函子,$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\xrightarrow{h}A[1]$ 是 $\mathscr{D}$ 的 AR 三角,下列叙述等价:

1) $A\xrightarrow{Q(f)}B\xrightarrow{Q(g)}C\xrightarrow{Q(h)}A[1]$ 是 $\mathscr{D}/\mathscr{U}$ 的 AR 三角;

2) $A\in\mathscr{U}_{\perp}$;

3) $C\in{}_{\perp}\mathscr{U}$.

引理 3 设 $\mathscr{A}$ 是 Abel 范畴,$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的有厚度子范畴,X,Z 是 $\mathscr{A}$ 中的对象,则有

1) $X\in D^b_{\mathscr{B}}(\mathscr{A})_{\perp}$ 当且仅当 $X\in\mathscr{B}^{\perp}$;

2) $Z\in{}_{\perp}D^b_{\mathscr{B}}(\mathscr{A})$ 当且仅当 $Z\in{}^{\perp}\mathscr{B}$.

证明 这里只证明 1),对偶地可以证明 2).

若 $X\in D^b_{\mathscr{B}}(\mathscr{A})_{\perp}$,则 $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathscr{A})}(\mathscr{B}[-i],X)=0$ 对任意整数 i 成立,所以 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{B},X)=0$,$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(\mathscr{B},X)\cong\mathrm{Hom}_{D^b(\mathscr{A})}(\mathscr{B},X[i])\cong\mathrm{Hom}_{D^b(\mathscr{A})}(\mathscr{B}[-i],X)=0$,所以 $X\in\mathscr{B}^{\perp}$.

反之,若 $X\in\mathscr{B}^{\perp}$,要证 $X\in D^b_{\mathscr{B}}(\mathscr{A})_{\perp}$,只需要证明任意 $D^b_{\mathscr{B}}(\mathscr{A})$ 中的复形 $N^{\cdot}$ 均满足 $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathscr{A})}(N^{\cdot},X)=0$,记 $m=l(N^{\cdot})=\mathrm{card}\{p\in\mathbf{Z}\mid H^p(N^{\cdot})\neq 0\}$.

下面对 m 进行归纳.

对任意正整数 n,记 $(\mathscr{D}^{\leqslant n},\mathscr{D}^{\geqslant n})$ 是 $D^b(\mathscr{A})$ 的 t-结构[11],其中 $\mathscr{D}^{\leqslant n}=\{Y^{\cdot}\in D^b(\mathscr{A})\mid H^p(Y^{\cdot})\neq 0,\forall p>n\}$,$\mathscr{D}^{\geqslant n}=\{Y^{\cdot}\in D^b(\mathscr{A})\mid H^p(Y^{\cdot})\neq 0,\forall p<n\}$. 设 $\tau_{\leqslant n}:\mathscr{D}^{\leqslant n}\to\mathscr{D}$ 与 $\tau_{\geqslant n}:\mathscr{D}^{\geqslant n}\to\mathscr{D}$ 是相应的截短函子.

ⅰ) 当 $m=0$ 时,在 $D^b(\mathscr{A})$ 中 $N^{\cdot}\cong 0$,$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathscr{A})}(N^{\cdot},X)=0$ 成立.

ⅱ) 当 $m=1$ 时,存在 $n_0\in\mathbf{Z}$,使得 $H^{n_0}(N^{\cdot})\neq 0$,而当 $p\neq n_0$ 时,$H^p(N^{\cdot})=0$,$r:\tau_{\leqslant n_0}(N^{\cdot})\to N^{\cdot}$ 是拟同构,$q:\tau_{\leqslant n_0}(N^{\cdot})\to\tau_{\geqslant n_0}(\tau_{\leqslant n_0}(N^{\cdot}))$ 是拟同构. 所以,在 $D^b(\mathscr{A})$ 中,$N^{\cdot}\cong\tau_{\geqslant n_0}(\tau_{\leqslant n_0}(N^{\cdot}))\cong H^{n_0}(N^{\cdot})[-n_0]\in D^b_{\mathscr{B}}(\mathscr{A})$. 因对 $\mathscr{B}$ 中任意对象 B 及正整数 i,有 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B,X)=0$,$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(B,X)=0$,故 $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathscr{A})}(B[i],X)=0\,(i\leqslant 0)$. 由 $(\mathscr{D}^{\leqslant n},\mathscr{D}^{\geqslant n})$ 是 $D^b(\mathscr{A})$ 的 t-结构得 $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathscr{A})}(B[j],X)=0\,(j\geqslant 0)$. 所以对任意整数 n,$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathscr{A})}(B[n],X)=0$,从而 $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathscr{A})}(H^{n_0}(N^{\cdot})[-n_0],X)=0$,于是 $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathscr{A})}(N^{\cdot},X)=0$.

ⅲ) 设当 $m\leqslant n-1$ 时,$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathscr{A})}(N^{\cdot},X)=0$ 成立;当 $m=n$ 时,有 $p\in\mathbf{Z}$,使截短三角 $\tau_{\leqslant p}(N^{\cdot})\to N^{\cdot}\to\tau_{\geqslant p+1}(N^{\cdot})\to\tau_{\leqslant p}(N^{\cdot})[1]$ 满足 $l(\tau_{\leqslant p}(N^{\cdot}))=n-1$,$l(\tau_{\geqslant p+1}(N^{\cdot}))=1$,用函子 $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathscr{A})}(-,X)$ 作用得到正合列 $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathscr{A})}(\tau_{\leqslant p}(N^{\cdot}),X)\to\mathrm{Hom}_{D^b(\mathscr{A})}(N^{\cdot},X)\to\mathrm{Hom}_{D^b(\mathscr{A})}(\tau_{\geqslant p+1}(N^{\cdot}),X)$.

由归纳假设 $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathscr{A})}(\tau_{\leqslant p}(N^{\cdot}),X)=0$,$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathscr{A})}(\tau_{\geqslant p+1}(N^{\cdot}),X)=0$. 进而得到 $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathscr{A})}(N^{\cdot},X)=0$. 由归纳法原理,当 $X\in\mathscr{B}^{\perp}$ 时,对任意 $D^b_{\mathscr{B}}(\mathscr{A})$ 中的复形 $N^{\cdot}$ 均满足 $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathscr{A})}(N^{\cdot},X)=0$,即 $X\in D^b_{\mathscr{B}}(\mathscr{A})_{\perp}$.

3　主要结论及其证明

定理 1　设 A 是整体维数有限的有限维 k-代数，$\mathscr{A}=A\text{-mod}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的有厚度子范畴，$Q:\mathscr{A}\to\mathscr{A}/\mathscr{B}$ 是商函子，$0\to X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\to 0$ 是 $\mathscr{A}$ 的 AR 序列，满足 $\mathrm{Pd}(Z)\leqslant 1$，$\mathrm{Id}(X)\leqslant 1$. 以下 3 个叙述等价：

1) $0\to X\xrightarrow{Q(u)}Y\xrightarrow{Q(v)}Z\to 0$ 是 $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ 的 AR 序列；

2) $X\in\mathscr{B}^{\perp}$；

3) $Z\in{}^{\perp}\mathscr{B}$.

证明　这里只证明 1)和 2)等价，1)和 3)的等价可以对偶地证明.

1)⇒2) 设 $0\to X\xrightarrow{Q(u)}Y\xrightarrow{Q(v)}Z\to 0$ 是 $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ 的 AR 序列. 因为 $\mathrm{Id}(X)\leqslant 1$，所以要证 $X\in\mathscr{B}^{\perp}$，只需证 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{B},X)=0$，$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(\mathscr{B},X)=0$.

ⅰ) 设 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{B},X)\neq 0$，则存在 $B\in\mathscr{B}$，以及存在非零态射 $\alpha:B\to X$. 故 $\mathscr{A}$ 中态射 $p:X\to\mathrm{Coker}\,\alpha$ 作为满态射一定非可裂单. 由于 u 左几乎可裂，所以存在 $\mathscr{A}$ 中态射 $\sigma:Y\to\mathrm{Coker}\,\alpha$，使得 $p=\sigma u$，因此，$Q(p)=Q(\sigma)Q(u)$在 $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ 中成立. 又因 $\mathrm{Coker}\,p=0$，$\mathrm{Ker}\,p=\mathrm{Im}\,\alpha$ 都是 $\mathscr{B}$ 的商对象，$p\in S_{\mathscr{B}}$，$Q(p)$是 $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ 的同构态射，故 $Q(u)$是 $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ 的可裂单态射. 这与 $0\to X\xrightarrow{Q(u)}Y\xrightarrow{Q(v)}Z\to 0$ 是 $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ 的 AR 序列矛盾，这样就证明了 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{B},X)=0$.

ⅱ) 假设 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(\mathscr{B},X)\neq 0$，则存在 $B'\in\mathscr{B}$ 以及 $\mathscr{A}$ 的非可裂短正合列 $0\to X\xrightarrow{m}M\xrightarrow{n}B'\to 0$，由 u 是左几乎可裂态射以及 m 是非可裂单态射，得 $\mathscr{A}$ 中行正合交换图，如图 2(a)所示. 因为 Q 是正合函子，所以有 $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ 中行正合交换图，如图 2(b)所示.

在 $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ 中，$B'\cong 0$，所以 $Q(m)$是同构态射. 故由 $Q(m)=Q(s)Q(u)$可得 $Q(u)$是可裂单态射. 这与 $0\to X\xrightarrow{Q(u)}Y\xrightarrow{Q(v)}Z\to 0$ 是 $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ 的 AR 序列矛盾，即证明了 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(\mathscr{B},X)=0$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "s"] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "m"] & M \arrow[r, "n"] & B' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(a) $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "Q(u)"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "Q(v)"] \arrow[d, "Q(s)"'] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "Q(m)"] & M \arrow[r, "Q(n)"] & B' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(b) $\mathscr{A}/\mathscr{B}$

图 2　行正合交换图

Fig. 2　Commutative diagrams with exact rows

2)⇒1) 设 $X\in\mathscr{B}^{\perp}$，由引理 3 得 $X\in D^b_{\mathscr{B}}(\mathscr{A})_{\perp}$. 根据命题 2，由 $\mathrm{Pd}(Z)\leqslant 1$，$\mathrm{Id}(X)\leqslant 1$，得 $D^b(\mathscr{A})$的 AR 三角 $X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}X[1]$，其中，$w$ 对应于短正合列 $0\to X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\to 0$. 由引理 2 可得 $D^b(\mathscr{A})/D^b_{\mathscr{B}}(\mathscr{A})$的 AR 三角 $X\xrightarrow{Q'(u)}Y\xrightarrow{Q'(v)}Z\xrightarrow{Q'(w)}X[1]$，其中 $Q':D^b(\mathscr{A})\to D^b(\mathscr{A})/D^b_{\mathscr{B}}(\mathscr{A})$是商函子. 进一步，由引理 1，得 $D^b(\mathscr{A}/\mathscr{B})$的 AR 三角 $X\xrightarrow{Q(u)}Y\xrightarrow{Q(v)}Z\xrightarrow{Q(w)}X[1]$，最后由命题 3，可得到 $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ 的 AR 序列 $0\to X\xrightarrow{Q(u)}Y\xrightarrow{Q(v)}Z\to 0$.

例 1　设路代数 $A=k\vec{\Delta}$，其中 $\vec{\Delta}:1\to 2\to 3\to 4$. 记 $\mathscr{A}=A\text{-mod}$，则 $\mathscr{A}$ 的 AR 箭图如图 3 所示.

取 $\mathscr{B}$ 由 3 生成的 $\mathscr{A}$ 的有厚度子范畴，则在 Serre 商范畴 $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ 中，3 同构于零对象. 从而有 $4\cong\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}$，$\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\cong 2$，$\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\cong\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$，所以 $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ 的互不同构的不可分解对象是 $1,2,\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}2\\3\\4\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}1\\2\\3\\4\end{smallmatrix}$. 于是，根据定理 1 得到商范畴 $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ 的 AR 箭图，如图 4 所示.

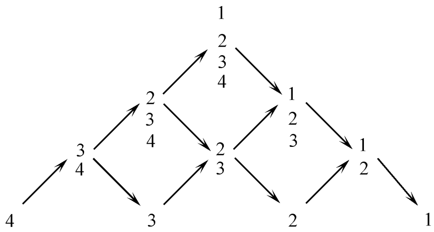

图 3 $\mathscr{A}$的 AR 箭图

Fig. 3 AR quiver of $\mathscr{A}$

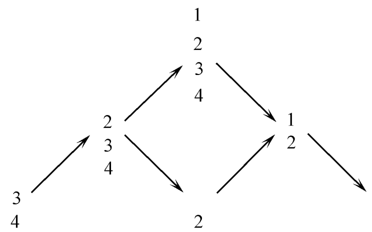

图 4 $\mathscr{A}/\mathscr{B}$的 AR 箭图

Fig. 4 AR quiver of $\mathscr{A}/\mathscr{B}$

参考文献:

[1] AUSLANDER M, SMALØ S O. Almost split sequences in subcategories[J]. J Algebras, 1981, 69(2): 426-454.

[2] AUSLANDER M, REITEN I, SMALØ S O. Representation theory of Artin algebras[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995: 136-185.

[3] PUIMAN N. Existence of Auslander-Reiten sequences in subcategories[J]. J Pure and Applied Algebra, 2011, 215(10): 2378-2384.

[4] HAPPEL D. Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1988: 31-34.

[5] HAPPEL D. Auslander-Reiten triangles in derived categories of finite-dimensionalalgebras[J]. Proc Amer Math Soc, 1991(12): 641-648.

[6] JØRGENSEN P. Auslander-Reiten triangles in subcategories[J]. J K Theory, 2009(3): 583-601.

[7] LIU Shi-ping. Auslander-Reiten theory in a Krull-Schmidt category[J]. The Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences, 2010, 4(3): 425-472.

[8] 林增强. 商范畴与 AR 三角[J]. 数学物理学报, 2012, 32(4): 654-660.

[9] GABRIEL P. Des catégories abéliennes[J]. Bull S M F, 1962, 90: 323-448.

[10] MIYACHI J. Localization of triangulated categories and derived categories[J]. J Algebra, 1991, 141(2): 463-483.

[11] BEILINSON A A, BERNSTEIN J, DELIGNE P. Faisceaux perverse[J]. Astérisque, 1982, 100: 5-171.

Auslander-Reiten Sequences of Serre Quotient Categories

ZHANG Yang, LIN Zeng-qiang

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Let A be a finite dimensional k-algebra, $\mathscr{A}$ be the category of finitely generated A-modules and $\mathscr{B}$ be a thick subcategory of $\mathscr{A}$. This paper mainly discusses the relationship between the Auslander-Reiten (AR) sequences of $\mathscr{A}$ and $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ by transforming the AR-sequences of $\mathscr{A}$ to the AR-triangles of the bounded derived category of $\mathscr{A}$. We get some necessary and sufficient conditions that the AR-sequences of $\mathscr{A}/\mathscr{B}$ are induced by the AR-sequences of $\mathscr{A}$.

Keywords: quotient category; Auslander-Reiten sequence; perpendicular category; finite dimensional k-algebra

(责任编辑: 钱筠 英文审校: 黄心中)