第34卷　第3期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 34　No. 3
2013年5月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　May 2013

文章编号:1000-5013(2013)03-0339-05　　DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.2013.03.0339

一类带退化扩散的哈密尔顿-雅克比方程组的适定性

黄小萍，曾有栋

(福州大学 数学与计算机科学学院，福建 福州 350108)

摘要： 讨论带狄利克雷边界条件的退化扩散哈密尔顿-雅克比方程组$\partial_t u-\mathrm{div}(|\nabla \boldsymbol{u}|^{p_1-2}\nabla \boldsymbol{u})=|\nabla \boldsymbol{v}|^{q_1}$，$\partial_t v-\mathrm{div}(|\nabla \boldsymbol{v}|^{p_2-2}\nabla \boldsymbol{v})=|\nabla \boldsymbol{u}|^{q_2}$的弱解性质，其中$\Omega\subset R^N$是有界区域，$q_i>\max\{(p_1-1),(p_2-1)\}$，$p_i>2$，$i=1,2$. 研究结果得到关于时间的极大解$(u,v)\in W^{1,\infty}\times W^{1,\infty}$，以及$(u_t,v_t)$的正则性结论.

关键词： 哈密尔顿-雅克比方程组；适定性；弱解；局部存在性；爆破二择一；正则性

中图分类号： O 175.02　　**文献标志码：** A

1　预备知识

考虑如下初边值问题

$$\left.\begin{aligned}&\partial_t u-\mathrm{div}(|\nabla \boldsymbol{u}|^{p_1-2}\nabla \boldsymbol{u})=|\nabla \boldsymbol{v}|^{q_1}, && x\in\Omega,\quad t>0,\\&\partial_t v-\mathrm{div}(|\nabla \boldsymbol{v}|^{p_2-2}\nabla \boldsymbol{v})=|\nabla \boldsymbol{u}|^{q_2}, && x\in\Omega,\quad t>0,\\&u(x,t)=v(x,t)=g(x), && x\in\partial\Omega,\quad t>0,\\&u(x,0)=u_0(x),\qquad v(x,0)=v_0(x), && x\in\Omega.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

其中:$\Omega\subset R^N$是有界区域，$\exists\,\alpha>0$，使得$\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$，$q_i>\max\{(p_1-1),(p_2-1)\}$，$p_i>2$，$i=1,2$. 为了方便，记$Q_T=\Omega\times(0,T)$，$\partial_p Q_T=\{\partial\Omega\times[0,T]\}\cup\{\bar{\Omega}\times\{0\}\}$，$T>0$.

当$p=2$时，问题(1)中的单个方程$\partial_t u-\mathrm{div}(|\nabla \boldsymbol{u}|^{p-2}\nabla \boldsymbol{u})=|\nabla \boldsymbol{v}|^{q}$被称为粘性哈密顿雅克比方程，常出现在增长和粗化表面的物理理论中. 其中，最著名方程是Kardar-Parisi-Zhang方程($q=2$)，这类方程被许多作者所研究[1-3].

当$p>2$时，若$|\nabla \boldsymbol{u}|=0$，方程$\partial_t u-\mathrm{div}(|\nabla \boldsymbol{u}|^{p-2}\nabla \boldsymbol{u})=|\nabla \boldsymbol{v}|^{q}$被称为退化抛物方程组，不存在古典解. 弱解可通过正则化问题的逼近解得到. 文献[4]研究更为一般的方程，即

$$\partial_t u-\mathrm{div}(|\nabla \boldsymbol{u}|^{p-2}\nabla \boldsymbol{u})=f(u,\nabla \boldsymbol{u},x,t).$$

其中:$f(u,\nabla \boldsymbol{u},x,t)$是非线性函数. 文献[5-6]研究了问题(1)的单个方程的粘性解. 当$q\leqslant p$或$q>p$，初值适当小，得到解在空间$W^{1,\infty}$上全局存在；另一方面，当$q>p$，初值充分大时，全局解不存在.

文献[7]讨论问题(1)中的单个方程$\partial_t u-\mathrm{div}(|\nabla \boldsymbol{u}|^{p-2}\nabla \boldsymbol{u})=|\nabla \boldsymbol{v}|^{q}$适定性和梯度爆破估计，其中$p>2$，$q>p-1$. 为了研究这个问题梯度爆破想象，首先建立在$W^{1,\infty}$范数下爆破二择一局部适定性，再得到精确梯度估计；然后，证明了梯度爆破仅发生在边界上，并最终得到u_t正则性结论.

受以上文献的启发，本文将文献[7]的结果推广到方程组，并且致力于弱解性质的研究.

为了叙述方便，先给出初值(u_0,v_0)，$g(x)$满足的条件:$g(x)\geqslant 0$是$C^2(\bar{\Omega})$上的正则函数，且

$$u_0,v_0\in W^{1,\infty}(\Omega),\qquad (u_0,v_0)\geqslant 0,\quad (u_0,v_0)=(g(x),g(x)),\quad x\in\partial\Omega.\tag{2}$$

下面给出问题(1)的上、下解定义.

收稿日期： 2012-11-12

通信作者： 曾有栋(1961-)，男，教授，主要从事偏微分方程的研究. E-mail:zengyd@fzu.edu.cn.

基金项目： 福建省自然科学基金资助项目(Z0511015)

定义 1 令 $m=\max\{p_1,p_2,q_1,q_2\}$，函数 $(u(x,t),v(x,t))$ 被称为问题(1)在 Q_T 上的上解. 若 $u,v\in C(\bar{\Omega}\times[0,T))\cap L^m((0,T);W^{1,m}(\Omega))$，$u_t$，$v_t\in L^2((0,T);L^2(\Omega))$，$(u(x,0),v(x,0))\geqslant(u_0(x,0),v_0(x,0))$，$(u(x,t),v(x,t))\geqslant(g(x),g(x))$，$x\in\partial\Omega$，且满足

$$\left.\begin{aligned}&\iint_{Q_T}u_t\varphi+|\nabla\boldsymbol{u}|^{p_1-2}\nabla\boldsymbol{u}.\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant\iint_{Q_T}|\nabla\boldsymbol{v}|^{q_1}\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\\&\iint_{Q_T}v_t\Psi+|\nabla\boldsymbol{v}|^{p_2-2}\nabla\boldsymbol{v}.\nabla\Psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant\iint_{Q_T}|\nabla\boldsymbol{u}|^{q_2}\Psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

式(3)中：$\varphi\in C^0(\bar{\Omega}_T)\cap L^{p_1}((0,T);W^{1,p_1}(\Omega))$，$\Psi\in C^0(\bar{\Omega}_T)\cap L^{p_2}((0,T);W^{1,p_2}(\Omega))$，而且 $(\varphi,\Psi)\geqslant0$，$(x,t)\in\bar{Q}_T(\varphi,\Psi)=0$，$(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T)$.

类似的，可以定义问题(1)的下解.

2 主要结论

定理 1 假设 $M>0$，(u_0,v_0) 满足条件(2)，$|\nabla\boldsymbol{u}_0|_\infty\leqslant M$，$|\nabla\boldsymbol{v}_0|_\infty\leqslant M$. 则有

1) 存在 $T=T(M,p_1,p_2,q_1,q_2,N,\|g\|_{C^2})$，使得问题(1)在 $[0,T)$ 有弱解 (u,v)，且 $u,v\in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,T);W^{1,\infty}(\Omega))$.

2) $\forall\tau>0$，问题(1)至少存在一个弱解 (u,v)，满足 $u,v\in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,T);W^{1,\infty}(\Omega))$.

3) 问题(1)存在极大弱解 (u,v)，$T_{\max(u_0,v_0)}$ 是它存在最大时间，则

$$\min_\Omega u_0\leqslant u\leqslant\max_\Omega u_0,(x,t)\in\Omega\times(0,T_{\max(u_0,v_0)}).\tag{4}$$

如果 $T_{\max(u_0,v_0)}<\infty$，则

$$\lim_{t\to T_{\max(u_0,v_0)}}(\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\nabla\boldsymbol{v}\|_{L^\infty(\Omega)})=\infty.$$

定理 2 假设 (u,v) 是问题(1)的唯一弱解，且 $u,v\in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,T_{\max(u_0,v_0)});W^{1,\infty}(\Omega))$，则有

$$u_t+v_t\leqslant\frac{1}{p_1-2}\frac{\|u_0\|_\infty}{t}+\frac{1}{p_2-2}\frac{\|v_0\|_\infty}{t},\qquad x\in\Omega,\quad \text{a. e. }t>0.\tag{5}$$

3 定理的证明

3.1 局部存在性

考虑问题(1)的逼近问题

$$\left.\begin{aligned}&\partial_tu_n-\mathrm{div}((|\nabla\boldsymbol{u}_n|^2+\frac{1}{n})^{(p_1-2)/2}\nabla\boldsymbol{u}_n)=\\&\qquad(|\nabla\boldsymbol{v}_n|^2+\frac{1}{n})^{q_1/2}-\frac{1}{n^{q_1/2}}),\qquad x\in\Omega,\quad t>0,\\&\partial_tv_n-\mathrm{div}((|\nabla\boldsymbol{v}_n|^2+\frac{1}{n})^{(p_2-2)/2}\nabla\boldsymbol{v}_n)=\\&\qquad(|\nabla\boldsymbol{u}_n|^2+\frac{1}{n})^{q_2/2}-\frac{1}{n^{q_2/2}}),\qquad x\in\Omega,\quad t>0,\\&u(x,t)=v(x,t)=g(x),\qquad x\in\partial\Omega,\quad t>0,\\&u(x,0)=u_0(x),\qquad v(x,0)=v_0(x),\qquad x\in\Omega.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

以下分 5 个步骤证明序列函数 $\{(u_n,v_n)\}$ 的极限函数为 (u,v).

由于存在 $\eta_0>0$，使得 $\forall x\in\bar{\Omega}$ 有 $\delta(x)\leqslant\eta_0$，定义点 $x:=\mathrm{pro}_{\partial\Omega}(x)$ 表示 x 在 $\partial\Omega$ 上的投影，这样的定义点是唯一确定.

步骤 1 存在 $T_0>0$，$\eta\in(0,\eta_0)$，$M_i>0$，$i=1,2$，M_i 仅依赖于 u_0,v_0,g，与 n 无关，使得

$$\|u_n\|_{L^\infty(Q_{T_0})}+\|v_n\|_{L^\infty(Q_{T_0})}\leqslant M_1:=\max(\|u_0\|_\infty,\|g\|_\infty)+\max(\|v_0\|_\infty,\|g\|_\infty),\tag{7}$$

$$\sup_{\substack{x\in\Omega\\\delta(x)\leqslant\eta}}\frac{|u_n(x,t)-u_n(x,t)|}{\delta(x)}+\sup_{\substack{x\in\Omega\\\delta(x)\leqslant\eta}}\frac{|v_n(x,t)-v_n(x,t)|}{\delta(x)}\leqslant M_2,0<t\leqslant T_0.\tag{8}$$

对于任意 n，M_1 是问题(6)的上解，由极大值原理可以直接得到不等式(7). 为了证明式(8)，先构造

一个局部闸函数在区域 Ω 上满足外球条件，即任意邻近 Ω 边界的点 $x\in\Omega$，在 x 附近都有一个上解.

取 $\rho>0$，使 $\forall x\in\partial\Omega$ 都有 $\overline{B_\rho(x+\rho v_x)}\cap\bar{\Omega}=\{x\}$，而 v_x 是 x 在 $\partial\Omega$ 上的外单位法向量. 任意给定 $x_0\in\Omega$，使 $\delta(x_0)\leqslant\eta$，$\eta\in(0,\eta_0)$，待定. 定义 $x_1=x_0+\rho v_{x_0}$. 不失一般性，假设 $x_1=0$，记 $r=|x|$. 对 $s\geqslant 0$，取

$$a_i(s)=(s+\frac{1}{n})^{(p_i-2)/2},\qquad k_i=\frac{2a'_i(s)s}{a_i(s)}\in[0,p-2],\qquad i=1,2. \tag{9}$$

取 $\bar{u}(x,t)=\bar{v}(x,t)=\phi(r-\rho)+g(x)$，$\phi$ 是关于单个变量的递增且凹的光滑函数.

$$\operatorname{div}((|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}|^2+\frac{1}{n})^{(p_1-2)/2}\nabla\bar{\boldsymbol{u}})=a_1(|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}|^2)(\nabla\bar{\boldsymbol{u}}+k_1\frac{(\nabla\bar{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}D^2\bar{u}\nabla\bar{\boldsymbol{u}}}{|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}|^2}), \tag{10}$$

$$\operatorname{div}((|\nabla\bar{\boldsymbol{v}}|^2+\frac{1}{n})^{(p_2-2)/2}\nabla\bar{\boldsymbol{v}})=a_2(|\nabla\bar{\boldsymbol{v}}|^2)(\nabla\bar{\boldsymbol{v}}+k_2\frac{(\nabla\bar{\boldsymbol{v}})^{\mathrm{T}}D^2\bar{v}\nabla\bar{\boldsymbol{v}}}{|\nabla\bar{\boldsymbol{v}}|^2}). \tag{11}$$

式中：$(\nabla\bar{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}$，$(\nabla\bar{\boldsymbol{v}})^{\mathrm{T}}$ 分别表示矩阵 $\nabla\bar{\boldsymbol{u}}$，$\nabla\bar{\boldsymbol{v}}$ 的转置.

$$\begin{aligned}\left[\Delta\bar{u}+k_1\frac{(\nabla\bar{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}D^2\bar{u}\nabla\bar{\boldsymbol{u}}}{|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}|^2})\right]=&\phi''(r-\rho)+\frac{(N-1)\phi'(r-\rho)}{r}+\Delta g+\\&k_1\frac{(\phi''(r-\rho)(\nabla\bar{\boldsymbol{u}},x)^2}{r^2|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}|^2}+k_1\frac{\phi'(r-\rho)}{r}-\\&k_1\frac{\phi'(r-\rho)(\nabla\bar{\boldsymbol{u}},x)^2}{r^3|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}|^2}+k_1\frac{(\nabla\bar{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}D^2g\nabla\bar{\boldsymbol{u}}}{|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}|^2}.\end{aligned} \tag{12}$$

只要 $\phi'(r-\rho)\geqslant\|\Delta g\|$，则有

$$(|\nabla\bar{\boldsymbol{v}}|^2+\frac{1}{n})^{(q_1-p_1+2)/2}\leqslant[4(\phi'(r-\rho))^2+1]^{(q_1-p_1+2)/2}, \tag{13}$$

同理可得

$$(|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}|^2+\frac{1}{n})^{(q_2-p_2+2)/2}\leqslant[4(\phi'(r-\rho))^2+1]^{(q_2-p_2+2)/2}. \tag{14}$$

取 $\phi(s)=s(s+\delta)^{-\beta}$，这里 $\beta=\beta(p_1q_1,p_2,q_2)\in(0,1)$ 待定. 记 $\Gamma:=B(x_1,\rho+\eta)\cap\Omega$.

以下证明 $(\bar{u},\bar{v})$ 是问题(6)在 $\Gamma\times(0,T_0)$ 的上解，其中 $T_0,\delta>0$，$\eta\in(0,\eta_0)$. 从下面的证明过程可以得到，常数 T_0,δ,C 与 x_0,n 无关，仅依赖于 u_0,v_0,M. 即

$$\phi'(s)=[(1-\beta)s+\delta](s+\delta)^{-\beta-1}, \tag{15}$$

$$\phi''(s)=-\beta[(1-\beta)s+2\delta](s+\delta)^{-\beta-2}. \tag{16}$$

根据 $\bar{u}(x,t)=\bar{v}(x,t)$，以及式(10)，(11)，可得式(12)成立的充分条件是

$$\left.\begin{aligned}-(\Delta\bar{u}+k_1\frac{(\nabla\bar{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}D^2\bar{u}\nabla\bar{\boldsymbol{u}}}{|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}|^2})\geqslant(|\nabla\bar{\boldsymbol{v}}|^2+\frac{1}{n})^{(q_1-p_1+2)/2},\\-(\Delta\bar{v}+k_2\frac{(\nabla\bar{\boldsymbol{v}})^{\mathrm{T}}D^2\bar{v}\nabla\bar{\boldsymbol{v}}}{|\nabla\bar{\boldsymbol{v}}|^2})\geqslant(|\nabla\bar{\boldsymbol{u}}|^2+\frac{1}{n})^{(q_2-p_2+2)/2}.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

只要 $\eta,\delta:\begin{cases}4(r-\rho+\delta)^{-2\beta}\geqslant4(\eta+\delta)^{-2\beta}\geqslant1,\\2\beta\delta+(3-N-p_t)\dfrac{(\eta+\delta)^2}{\rho}\geqslant\beta\delta,\end{cases}$ $\beta=\max\{\dfrac{1}{2(q_2-p_2+2)},\dfrac{1}{2(q_1-p_1+2)}\}$ 且 $\eta=\delta$ 适当小，则式(17)成立. 所以，对于 $T_0>0$，$(\bar{u},\bar{v})$ 是问题(6)在 $\Gamma\times(0,T_0)$ 的上解. 当 $T_0>0$ 时，为了对 $\Gamma\times(0,T_0)$ 抛物边界进行控制，引入另一个比较函数，即

$$\begin{cases}u_1(x,t)=(C^2K^2+1)^{q_1/2}t+C(1-\exp(-K(r-\rho)))+\|g\|_\infty,\\v_1(x,t)=(C^2K^2+1)^{q_2/2}t+C(1-\exp(-K(r-\rho)))+\|g\|_\infty.\end{cases}$$

若 $K>\max\{\dfrac{N+p_1-3}{\rho},\dfrac{N+p_2-3}{\rho}\}$，则有 $\begin{cases}-\operatorname{div}(|\nabla\boldsymbol{u}|^{(p_1-2)}\nabla\boldsymbol{u})\geqslant0,\\-\operatorname{div}(|\nabla\boldsymbol{v}|^{(p_2-2)}\nabla\boldsymbol{v})\geqslant0.\end{cases}$

取 $C>0$（仅依赖于 M），使得 $C(1-\exp(-K(r-\rho)))+\|g\|_\infty\geqslant\max\{u_0(x),v_0(x)\}$，$x\in\Omega$. 因为 $(u_1,v_1)\geqslant(g,g)$，$x\in\partial\Omega\subset\{x\in R^N,|x|\geqslant\rho\}$，故由极大值原理可知

$$\forall n,(u_n,v_n)\leqslant(u_1,v_1),\qquad(x,t)\in\Omega_T.$$

所以可得

$$u_n(x,t)\leqslant(C^2K^2+1)^{q_1/2}t+C(1-\exp(-K(r-\rho)))+\|g\|_\infty\leqslant2^{-\beta}\eta^{1-\beta}+g(x)=\bar{u}(x,t),$$

$$v_n(x,t)\leqslant(C^2K^2+1)^{q_2/2}t+C(1-\exp(-K(r-\rho)))+\|g\|_\infty\leqslant 2^{-\beta}\eta^{1-\beta}+g(x)=\bar{v}(x,t).$$

即若$(x,t)\in\{x\in\Omega,|x|=\rho+\eta\}\times[0,T_0]$,则只要$T_0,\eta=\delta$适当小即可.另一方面,$(u_n,v_n)=(g,g)\leqslant(\bar{u},\bar{v})$,$(x,t)\in\partial\Omega\times[0,T_0]$.所以$(\bar{u},\bar{v})$是问题(6)的上解.

同理,可证$(\underline{u},\underline{v})$是问题(6)的下解.其中,$\underline{u}(x,t)=\underline{v}(x,t)=-\phi(r-\rho)+g(x)$.由极大值原理可知,$(\underline{u},\underline{v})\leqslant(u_n,v_n)\leqslant(\bar{u},\bar{v})$,$(x,t)\in\Gamma\times[0,T_0]$.所以式(8)成立.

步骤2 利用类似于文献[8]中定理5的方法可以证明不等式,即

$$\|\nabla\boldsymbol{u}_n\|_{L^\infty(Q_{T_0})}\leqslant M_3:=M_2+2\|\nabla\boldsymbol{g}\|_\infty,\tag{18}$$

$$\|\nabla\boldsymbol{v}_n\|_{L^\infty(Q_{T_0})}\leqslant M_3:=M_2+2\|\nabla\boldsymbol{g}\|_\infty.\tag{19}$$

取$h\in R^N$满足$|h|\leqslant\eta$,根据问题(6)逆变换可知,若(u_n,v_n)是问题(6)在Ω上的古典解,则向量函数$(u_n^h,v_n^h)=(u_n(x-h),v_n(x-h))$是问题(6)在$\Omega_h\times(0,T_0)$上的古典解,其中$\Omega_h=\{x\in R^N\,|\,x-h\in\Omega\}$.令$t\in[0,T_0]$,$x\in\partial(\Omega\cap\Omega_h)$.假设$x\in\partial\Omega$,对于$x+h\in\partial\Omega$,这种情况也是类似的.

根据$|\tilde{y}-\tilde{z}|\leqslant|y-z|$和公式(8),利用极大值原理可知:$|u_n(x,t)-u_n^h(x,t)|\leqslant M_3|h|$,$|v_n(x,t)-v_n^h(x,t)|\leqslant M_3|h|$.因此,根据$|h|\leqslant\eta$任意性,式(18),(19)得证.

步骤3 令$\varepsilon>0$,集合$Q_{T_0,\varepsilon}=\{x\in\Omega,\delta(x)>\varepsilon\}\times(\varepsilon,T_0-\varepsilon)$.证明存在常数$M_4>0$(与$n$无关),使得$\forall(x_i,t_i)\in Q_{T_0,\varepsilon}$都有

$$|\nabla\boldsymbol{u}_n(x_1,t_1)-\nabla\boldsymbol{u}_n(x_2,t_2)|\leqslant M_4(|x_1-x_2|^\alpha+|t_1-t_2|^{\alpha/2}),\tag{20}$$

$$|\nabla\boldsymbol{v}_n(x_1,t_1)-\nabla\boldsymbol{v}_n(x_2,t_2)|\leqslant M_4(|x_1-x_2|^\alpha+|t_1-t_2|^{\alpha/2}).\tag{21}$$

其中:M_4,α是依赖于M_3,T_0,ε的正常数.利用类似于文献[9]中一种方法即可得证.

步骤4 证明存在常数$M_5>0$(与n无关),使得

$$\|\partial_t u_n\|_{L^2(Q_{T_0})}+\|\partial_t v_n\|_{L^2(Q_{T_0})}\leqslant M_5\tag{22}$$

成立.式(6)的第1,2式两边分别乘以$\partial_t u_n$和$\partial_t v_n$,在Q_{T_0}上积分,并由Hölder不等式可得

$$\int_0^{T_0}\int_\Omega(\partial_t u_n)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^{T_0}\int_\Omega(\partial_t v_n)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant M_5.$$

其中:$M_5=M_5(|\Omega|,M_3,T_0,p_i,q_i)>0$,$i=1,2$.

步骤5 根据式(7),(18),(21),(22)和紧定理[10]可知

$$\left.\begin{aligned}&(u_n,v_n)\to(u,v),\qquad(x,t)\in C(\bar{\Omega}\times[0,T_0]),\\&(\nabla\boldsymbol{u}_n,\nabla\boldsymbol{v}_n)\to(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v}),\qquad(x,t)\in C(Q_{T_0,\varepsilon}),\\&(\partial_t u_n,\partial_t v_n)\xrightarrow{w}(\partial_t u,\partial_t v),\qquad(x,t)\in L^2(Q_{T_0}).\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

在式(6)两边同乘以测试函数和积分,根据Lebesgues控制收敛定理,并令$n\to\infty$,可知(u,v)是问题(1)的弱解.

3.2 唯一性

弱解唯一性结论由以下比较原理得到,反过来也证明了式(4).

命题1 令$(\underline{u},\underline{v})$,$(\bar{u},\bar{v})$分别是问题(1)的上、下解,假设$\underline{u},\underline{v},\bar{u},\bar{v}\in L^\infty((0,T);W^{1,\infty}(\Omega))$,则$(\bar{u},\bar{v})\leqslant(\bar{u},\bar{v})$,$(x,t)\in\Omega\times(0,T)$.命题1的证明类似参考文献[7]的证明.

3.3 正则性结论

如文献[11],(u,v)是式(1)在$L^\infty_{\mathrm{loc}}((0,T);W^{1,\infty}(\Omega))\times L^\infty_{\mathrm{loc}}((0,T);W^{1,\infty}(\Omega))$上的弱解,$(u_\lambda,v_\lambda)=(\lambda^{\gamma-1}u(x,\lambda t),\lambda^{\gamma-1}v(x,\lambda t))$.其中$\lambda>1$,$\gamma=\max\{\dfrac{1}{p_1-2},\dfrac{1}{p_2-2}\}$.则$(u_\lambda,v_\lambda)$是以下初边值问题的弱解.

$$\left.\begin{aligned}&\partial_t u_\lambda-\mathrm{div}(|\nabla\boldsymbol{u}_\lambda|^{p_1-2}\nabla\boldsymbol{u}_\lambda)=\lambda^{-(q_1-p_1+1)\gamma}|\nabla\boldsymbol{v}_\lambda|^{q_1},\qquad x\in\Omega,\quad t\in(0,T/\lambda),\\&\partial_t v_\lambda-\mathrm{div}(|\nabla\boldsymbol{v}_\lambda|^{p_2-2}\nabla\boldsymbol{v}_\lambda)=\lambda^{-(q_2-p_2+1)\gamma}|\nabla\boldsymbol{u}_\lambda|^{q_2},\qquad x\in\Omega,\quad t\in(0,T/\lambda),\\&u(x,t)=v(x,t)=\lambda^\gamma g(x),\qquad x\in\partial\Omega,\quad t\in(0,T/\lambda),\\&u(x,0)=\lambda^\gamma u_0(x),\qquad v(x,0)=\lambda^\gamma v_0(x),\qquad x\in\Omega.\end{aligned}\right\}$$

令$w=(w_1,w_2)=(u_\lambda-u,v_\lambda-v)$.另取$\varphi=(w_1-k_1)_+$,$\boldsymbol{\Psi}=(w_2-k_2)_+$,$k_1=(\lambda^\gamma-1)\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$,$k_2=(\lambda^\gamma-1)\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}$,根据式(2)可知,$(\varphi,\boldsymbol{\Psi})=0$,$x\in\partial\Omega$.

类似于命题 1 证明过程中的方法，可得

$$\int_{\Omega}(w_1-k_1)^2\mathrm{d}x+\int_{\Omega}(w_2-k_2)^2\mathrm{d}x\leqslant(\int_{\Omega}(w_1(x,0)-k_1)^2\mathrm{d}x+\int_{\Omega}(w_2(x,0)-k_2)^2\mathrm{d}x)\exp(Ct).$$

根据$(\lambda^{\gamma}-1)u_0(x)\leqslant(\lambda^{\gamma}-1)\|u_0\|_{L^{\infty}(\Omega)}$，$(\lambda^{\gamma}-1)v_0(x)\leqslant(\lambda^{\gamma}-1)\|v_0\|_{L^{\infty}(\Omega)}$，可得

$$((w_1-k_1)_+,(w_2-k_2)_+)\equiv 0,\qquad \text{a. e.},\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T/\lambda)$$

所以有

$$\lambda^{\gamma}u(x,\lambda t)-u(x,t)\leqslant(\lambda^{\gamma}-1)\|u_0\|_{L^{\infty}(\Omega)},\qquad \lambda^{\gamma}v(x,\lambda t)-v(x,t)\leqslant(\lambda^{\gamma}-1)\|v_0\|_{L^{\infty}(\Omega)}.\tag{24}$$

对式(24)的两个不等式关于λ求导，并令$\lambda\to 1^+$，可得$\gamma u(x,t)+tu_t(x,\partial t)\leqslant\gamma\|u_0\|_{L^{\infty}(\Omega)}$，$\gamma v(x,t)+tv_t(x,t)\leqslant\gamma\|v_0\|_{L^{\infty}(\Omega)}$，得到$(u,v)$正值，故定理 2 得证.

参考文献：

[1] BEN-ARTZI M, SOUPLET P, WEISSLER F. The local theory for viscous Hamilton-Jacobi equations in Lebesgue spaces[J]. J Math Pures Appl, 2002, 81(4): 343-378.

[2] QUITTNER P, SOUPLET P. Superlinear parabolic problems: Blow-up, global existence and steady states[M]. Switzerland: Birkhauser Verlag AG, 2007: 329.

[3] CHEN C, NAKAO M, OHARA Y. Global existence and gradientestimates for quasilinear parabolic equations of the m-Laplacian type with a strong perturbation[J]. Adv Math Sci Appl, 2000, 10(1): 225-237.

[4] ZHAO Jun-ning. Existence and nonexistence of solutions for $u_t=\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+f(\nabla u,u,x,t)$[J]. J Math Anal Appl, 1993, 172(1): 130-146.

[5] LAURENÇOT P, STINNER C. Convergence to separate variables solutions for a degenerate parabolic equation with gradient source[J]. J Dynam. Differential Equations, 2012, 24(1): 29-49.

[6] BARLES G, LAURENÇOT P, STINNER C. Convergence to steady states for radially symmetric solutions to a quasilinear degenerate diffusive Hamilton-Jacobi equation[J]. Asymptot Anal, 2010, 67(3/4): 229-250.

[7] ATTOUCHI A. Well-posedness and gradientblow-upestimatenear the boundary for a Hamilton-Jacobi equation with degenerate diffusion[J]. J Differential Equations, 2012, 253(8): 2474-2492.

[8] KAWOHL B, KUTEV N. Comparison principle and Lipschitz regularity for viscosity solutions of some classes of nonlinear partial differential equations[J]. Funkcial Ekvac, 2000, 43(2): 241-253.

[9] DIBENEDETTO E, FRIEDMAN A. Hölder estimates for nonlinear degenerate parabolic systems Journal fur die reine und angewandte Mathematik[J]. J reine angew Math, 1985, 357(1): 1-22.

[10] SIMON J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$[J]. Ann Mat Pura Appl, 1986, 146(1): 65-96.

[11] ZHAO Jun-ning. A note to the regularity of solutions for the evolution p-Laplacian equations[J]. Methods Appl Anal, 2001, 8(4): 595-598.

Well-Posedness for a Hamilton-Jacobi System with Degenerate Diffusion

HUANG Xiao-ping, ZENG You-dong

(College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China)

Abstract: This paper discusses the properties of weak solutions to a degenerate viscous Hamilton-Jacobi system $\partial_t u-\mathrm{div}(|\nabla \boldsymbol{u}|^{p_1-2}\nabla \boldsymbol{u})=|\nabla \boldsymbol{v}|^{q_1}$, $\partial_t v-\mathrm{div}(|\nabla \boldsymbol{v}|^{p_2-2}\nabla \boldsymbol{v})=|\nabla \boldsymbol{u}|^{q_2}$, with Dirichlet boundary conditions in a bounded domain $\Omega\subset R^N$, where $q_i>\max\{(p_1-1),(p_2-1)\}$ and $p_i>2, i=1,2$. We constructe a unique, maximal in time, $W^{1,\infty}\times W^{1,\infty}$ solution, without size restriction on the initial data and to establish the blow up alternative in $W^{1,\infty}\times W^{1,\infty}$ norm. Furthermore, we also obtain a regularizing effect for (u_t,v_t).

Keywords: Hamilton-Jacobi system; well-posedness; weak solutions; local existence; blow up alternative; regularizing effect

（责任编辑：黄晓楠　　英文审校：黄心中）