第 34 卷　第 3 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 34　No. 3
2013 年 5 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　May 2013

文章编号:1000-5013(2013)03-0334-05　　DOI:10.11830/ISSN.1000-5013.2013.03.0334

调和映照与其剪切函数的单叶性

石擎天，黄心中

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 利用调和映照像区域的线性连结性与单叶性之间的内在联系，研究单位圆盘 D 上调和映照 $f_\alpha(z)=h(z)+\alpha\overline{g(z)}$ 与其剪切函数 $F_\beta(z)=h(z)+\beta g(z)$ 的单叶性问题. 研究得到判别单位圆盘上一类局部单叶调和映照为调和拟共形映照的充分必要条件，推广了由 S. L. Chen 等得到的相应结果.

关键词： 单叶调和映照；线性连结区域；剪切函数；调和拟共形映照

中图分类号： O 174.51；O 174.55　　**文献标志码：** A

1　预备知识

平面上单连通区域 Ω 上的调和映照 $f(z)$ 可以表示成 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 的形式，其中，$h(z)$，$g(z)$ 在 Ω 上解析，记 $J_f(z)=|h'(z)|^2-|g'(z)|^2$. Lewy 在文献[1]中给出，$f(z)$ 是 Ω 上局部单叶保向的调和映照的充分必要条件是 $J_f(z)>0$，$z\in\Omega$. 若 $f(z)$ 在区域 Ω 上单叶且满足 $\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right|\leqslant k<1$，$k$ 为常数，则 $f(z)$ 为 Ω 上调和拟共形映照[2]. 近阶段来，围绕着调和映照的单叶性、拟共形性等判定问题，许多学者做出了一些成果[3-7]. Clunie 等[8]证明了，若调和映照 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 在单位圆盘 D 上局部单叶，则 $f(z)$ 在 D 上单叶且像区域 $f(D)$ 具有 CHD 性质的充要条件是 $h-g$ 具有相同的性质.

区域 $\Omega\subset C$ 是 M 线性连结区域，若存在常数 $M>0$，使得对任何 z_1，$z_2\in\Omega$，存在连结 z_1，z_2 的可求长曲线 $\gamma\in\Omega$，满足 $l(\gamma)\leqslant M|z_1-z_2|$. 这里 $l(\gamma)$ 表示 γ 的欧式弧长. 若 $f_\alpha(z)=h(z)+\alpha\overline{g(z)}$ 是 D 上调和映照，称 $F_\beta(z)=h(z)+\beta g(z)$ 为 $f_\alpha(z)$ 的剪切函数，其中 α，β 是常数. 利用调和映照像区域的线性连结性及其剪切函数的性质，可以研究调和映照的各种性质[9-10]. S. L. Chen 等[11]探讨了 D 上局部单叶调和映照 $f(z)$ 与其剪切函数 $h(z)-\exp(\mathrm{i}\theta)g(z)$ 的单叶性和像域的线性连结性之间的关系，得到了一些新的结论. 他们证明了以下定理.

定理 A[11]　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是单位圆盘 D 上单叶保向的调和映照且 $f(D)$ 是 M 线性连结区域，若 $\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right|\leqslant c<\frac{1}{1+2M}$，则对任意的 $\theta\in\mathbf{R}$，$F_\theta(z)=h(z)-\exp(\mathrm{i}\theta)g(z)$ 在 D 上单叶且 $F_\theta(D)$ 是 $M^*=\frac{M(1+c)}{1-c(1+2M)}$ 线性连结区域.

定理 B[11]　设 $F(z)=h(z)-g(z)$ 在 D 上单叶且 $F(D)$ 是 M 线性连结区域，若 $\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right|\leqslant c<\frac{1}{1+2M}$，则对任意 $\theta\in\mathbf{R}$，$f_\theta(z)=h(z)+\exp(\mathrm{i}\theta)\overline{g(z)}$，在 D 上单叶且 $f_\theta(D)$ 是 $M^*=\frac{M(1+c)}{1-c(1+2M)}$ 线性连结区域.

设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 在 D 上单叶，若存在常数 λ 使 $F(z)=h(z)+\lambda\overline{g(z)}$ 在 D 上单叶，则称 $f(z)$ 在 D 上关于 λ 具有稳定性. 对于单叶调和映照的稳定性问题，文献[10]证明了下列结论.

收稿日期：　2012-04-27
通信作者：　黄心中(1957-)，男，教授，主要从事函数论的研究. E-mail：huangxz@hqu.edu.cn.
基金项目：　福建省自然科学基金资助项目(2011J0101)

定理 C[10]　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$是单位圆盘 D 上单叶保向的调和映照且 $f(D)$是 M 线性连结区域，若$\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right|<\frac{1}{1+2M}$，则对任意 $\theta\in\mathbf{R}$，$F(z)=h(z)+\exp(\mathrm{i}\theta)\overline{g(z)}$在 D 上单叶.

事实上，调和映照 $f(z)$在 D 上关于 λ 不一定都具有稳定性. 例如，单叶调和映照 $K(z)=\frac{z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}+\overline{\frac{\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}}$关于 $\lambda=0$ 就不具有稳定性；而单叶调和映照 $L(z)=\frac{2z-z^2}{2(1-z)^2}+\frac{\overline{-z^2}}{2(1-z)^2}$对于所有 $\lambda\in\overline{D}$ 均具有稳定性. 因此，本文通过引入参数 α 和 β，对调和映照 $f_\alpha(z)=h(z)+\alpha\overline{g(z)}$与其剪切函数 $F_\beta(z)=h(z)+\beta g(z)$的单叶性关系的进一步研究，找到了二者之间的联系，推广了文献[11]的结果.

2　主要结果及其证明

首先，证明下述定理.

定理 1　设 $f_\alpha(z)=h(z)+\alpha\overline{g(z)}$是 D 上单叶保向的调和映照，满足$\left|\frac{g'(z)}{h'(z)}\right|\leqslant c<1$，$f_\alpha(D)$为 M 线性连结区域，记 $F_\beta(z)=h(z)+\beta g(z)$，则当$(M+1)|\alpha|+M|\beta|<\frac{1}{c}$时，$F_\beta(z)$在 D 内单叶且 $F_\beta(D)$为 $M^*=\frac{M(1+c|\beta|)}{1-c|\alpha|-cM(|\alpha|+|\beta|)}$线性连结区域.

证明　ⅰ）要证明 $F_\beta(z)$在 D 上单叶，等价证明 $F_\beta(\omega)=\omega+\beta G(\omega)-\alpha\overline{G(\omega)}$在 $f_\alpha(D)$上单叶，其中 $\omega=f_\alpha(z)$，$G(\omega)=g\circ f_\alpha^{-1}(\omega)$. 对任意 $\omega_1,\omega_2\in f_\alpha(D)$且 $\omega_1\neq\omega_2$. 一方面，由于 $f_\alpha(z)$在单位圆盘 D 内单叶，则对 $f_\alpha^{-1}\circ f_\alpha(z)=z$ 关于 $z,\bar{z}$ 求微分得

$$(f_\alpha^{-1})_\omega h'+(f_\alpha^{-1})_{\bar{\omega}}\bar{\alpha}g'=1,$$
$$(f_\alpha^{-1})_\omega\alpha\bar{g}'+(f_\alpha^{-1})_{\bar{\omega}}\bar{h}'=0.$$

从中解得

$$(f_\alpha^{-1})_\omega=\frac{\bar{h}'}{|h'|^2-|\alpha|^2|g'|^2},$$
$$(f_\alpha^{-1})_{\bar{\omega}}=\frac{-\alpha\bar{g}'}{|h'|^2-|\alpha|^2|g'|^2}.$$

故有

$$|G_\omega|+|G_{\bar{\omega}}|=|g'|\left(\left|\frac{\bar{h}'}{|h'|^2-|\alpha|^2|g'|^2}\right|+\left|\frac{-\alpha\bar{g}'}{|h'|^2-|\alpha|^2|g'|^2}\right|\right)=\frac{|g'|}{|h'|-|\alpha||g'|}\leqslant\frac{c}{1-|\alpha|c}.\tag{1}$$

另一方面，由于 $f_\alpha(D)$为 M 线性连结区域，则存在连接 ω_1,ω_2 的可求长曲线 $\gamma\subset f_\alpha(D)$，使 $l(\gamma)\leqslant M|\omega_1-\omega_2|$. 则由式(1)可得

$$\begin{aligned}|F_\beta(\omega_1)-F_\beta(\omega_2)|=&|(\omega_1-\omega_2)+\beta(G(\omega_1)-G(\omega_2))-\alpha\overline{G(\omega_1)-G(\omega_2)}|\geqslant\\&|\omega_1-\omega_2|-(|\alpha|+|\beta|)|G(\omega_1)-G(\omega_2)|\geqslant\\&|\omega_1-\omega_2|-(|\alpha|+|\beta|)\int_\gamma(|G_\omega|+|G_{\bar{\omega}}|)|\mathrm{d}\omega|\geqslant\\&|\omega_1-\omega_2|-(|\alpha|+|\beta|)\frac{c}{1-c|\alpha|}l(\gamma)\geqslant\\&|\omega_1-\omega_2|\left[1-(|\alpha|+|\beta|)\frac{Mc}{1-c|\alpha|}\right].\end{aligned}\tag{2}$$

因为$(M+1)|\alpha|+M|\beta|<\frac{1}{c}$，则$|F_\beta(\omega_1)-F_\beta(\omega_2)|>0$. 即证得 $F_\beta(\omega)$在 $f_\alpha(D)$内单叶，从而可以得到 $F_\beta(z)$在 D 内单叶.

ⅱ）记 $\Gamma=F_\beta(\gamma)$，由于 $F_\beta(\omega)=\omega+\beta G(\omega)-\alpha\overline{G(\omega)}$，则有

$$(F_\beta)_\omega = 1 + \beta G_\omega - \alpha \overline{G_{\bar\omega}},$$
$$(F_\beta)_{\bar\omega} = \beta G_{\bar\omega} - \alpha \overline{G_\omega}.$$

所以

$$\begin{aligned} l(\gamma) = & \int_\gamma |\,\mathrm{d}F_\beta\,| \leqslant \int_\gamma (|\,(F_\beta)_\omega\,| + |\,(F_\beta)_{\bar\omega}\,|)\,|\,\mathrm{d}\omega\,| \leqslant \\ & \int_\gamma [1 + (|\,\alpha\,| + |\,\beta\,|)(|\,G_\omega\,| + |\,G_{\bar\omega}\,|)]\,|\,\mathrm{d}\omega\,| \leqslant \\ & [1 + (|\,\alpha\,| + |\,\beta\,|)\frac{c}{1 - c\,|\,\alpha\,|}]M\,|\,\omega_1 - \omega_2\,|. \end{aligned} \tag{3}$$

由式(2)可知

$$l(\gamma) \leqslant \frac{M(1 + c\,|\,\beta\,|)}{1 - c\,|\,\alpha\,| - cM(|\,\alpha\,| + |\,\beta\,|)}\,|\,F_\beta(\omega_1) - F_\beta(\omega_2)\,|,$$

从而定理得证.

注 1 由定理1,考虑 $\alpha=1$,$c<\dfrac{1}{1+2M}$的情况得到了下述推论.

推论 1 设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$为单位圆盘 D 上单叶保向的调和映照,$f(D)$为 M 线性连结区域且满足$|\dfrac{g'(z)}{h'(z)}|\leqslant c<\dfrac{1}{1+2M}$,记 $F_\beta(z)=h(z)+\beta g(z)$,则当$|\beta|\leqslant 1$ 时,$F_\beta(z)$在 D 内单叶且 $F_\beta(D)$为$\dfrac{M(1+c|\beta|)}{1-c(1+M+M|\beta|)}$线性连结区域.

推论1中,当 $\beta=-\exp(\mathrm{i}\theta)$时,即为定理A的结果,所以推论1是对定理A的推广.

接着,探讨在剪切函数 $F_\beta(z)$在 D 内单叶且 $F_\beta(D)$线性连结的条件下调和映照 $f_\alpha(z)$的单叶性与像区域的线性连结性问题,得到如下结论.

定理 2 设 $F_\beta(z)=h(z)+\beta g(z)$是 D 内单叶解析映照,满足$|\dfrac{g'(z)}{h'(z)}|\leqslant c<1$,$F_\beta(D)$为 M 线性连结区域,令 $f_\alpha(z)=h(z)+\alpha\overline{g(z)}$,则当 $M|\alpha|+(M+1)|\beta|<\dfrac{1}{c}$时,$f_\alpha(z)$在 D 内单叶且 $f_\alpha(D)$为 $M^*=\dfrac{M(1+c|\alpha|)}{1-c|\beta|-cM(|\alpha|+|\beta|)}$线性连结区域.

证明 ⅰ) 要证明 $f_\alpha(z)$在 D 内单叶,等价证明 $F_\alpha(\omega)=\omega-\beta G(\omega)+\alpha\overline{G(\omega)}$在 $F_\beta(D)$内单叶即可,其中 $\omega=F_\beta(z)$,$G(\omega)=g\circ F_\beta^{-1}(\omega)$. 对任何 $\omega_1,\omega_2\in F_\beta(D)$且 $\omega_1\neq\omega_2$. 一方面,由于 $F_\beta(z)$在 D 内单叶,则对 $F_\beta^{-1}\circ F_\beta(z)=z$ 关于 z 求微分有

$$(F_\beta^{-1})_\omega(h' + \beta g') = 1,$$

所以

$$\left.\begin{aligned} (F_\beta^{-1})_\omega &= \frac{1}{h' - \beta g'}, \\ |\,G_\omega\,| &= |\,\frac{g'}{h' + \beta g'}\,| \leqslant \frac{c}{1 - c\,|\,\beta\,|}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

另一方面,由于 $F_\beta(D)$为 M 线性连结区域,则存在连接 ω_1,ω_2 的可求长曲线 $\gamma\subset F_\beta(D)$,使 $l(\gamma)\leqslant M|\omega_1-\omega_2|$. 则由式(4)有

$$\begin{aligned} |\,F_\alpha(\omega_1) - F_\alpha(\omega_2)\,| = & |\,(\omega_1 - \omega_2) - \beta(G(\omega_1) - G(\omega_2)) + \alpha\overline{G(\omega_1) - G(\omega_2)}\,| \geqslant \\ & |\,\omega_1 - \omega_2\,| - (|\,\alpha\,| + |\,\beta\,|)\,|\,G(\omega_1) - G(\omega_2)\,| \geqslant \\ & |\,\omega_1 - \omega_2\,| - (|\,\alpha\,| + |\,\beta\,|)\int_\gamma |\,G_\omega\,|\,|\,\mathrm{d}\omega\,| \geqslant \\ & [1 - (|\,\alpha\,| + |\,\beta\,|)\frac{cM}{1 - c\,|\,\beta\,|}]\,|\,\omega_1 - \omega_2\,|. \end{aligned} \tag{5}$$

由于 $M|\alpha|+(M+1)|\beta|<\dfrac{1}{c}$,则有$|f_\alpha(\omega_1)-f_\alpha(\omega_2)|>0$. 即证得 $f_\alpha(\omega)$在 $F_\beta(D)$内单叶,从而得 $f_\alpha(z)$在 D 内单叶.

ⅱ）记 $\Gamma=f_\alpha(\gamma)$，由于 $f_\alpha(\omega)=\omega-\beta G(\omega)+\alpha\overline{G(\omega)}$，则 $(F_\alpha)_\omega=1-\beta G_\omega$，$(F_\alpha)_{\bar\omega}=\alpha\overline{G_\omega}$. 所以

$$l(\Gamma)=\int_\Gamma|\mathrm{d}f_\alpha|\leqslant\int_\gamma[1+(|\alpha|+|\beta|)|G_\omega|]|\mathrm{d}\omega|\leqslant$$

$$[1+(|\alpha|+|\beta|)\frac{c}{1-c|\beta|}]M|\omega_1-\omega_2|,$$

由式(5)可得

$$l(\Gamma)\leqslant\frac{M(1+c|\alpha|)}{1-c|\beta|-cM(|\alpha|+|\beta|)}|f_\alpha(\omega_1)-f_\alpha(\omega_2)|.$$

故定理得证.

注 2　由定理 2，考虑 $\beta=-1$，$c<1/(1+2M)$ 的情况得到了如下推论，推广了定理 B 的结果.

推论 2　设 $F(z)=h(z)-g(z)$ 是单位圆盘 D 上单叶的解析映照，$F(D)$ 为 M 线性连结区域，且满足 $|\frac{g'(z)}{h'(z)}|\leqslant c<\frac{1}{1+2M}$，令 $f_\alpha(z)=h(z)+\alpha\overline{g(z)}$，则当 $|\alpha|\leqslant 1$ 时，$f_\alpha(z)$ 在 D 上单叶，且 $f_\alpha(D)$ 为 $\frac{M(1+c|\alpha|)}{1-c(1+M)-cM|\alpha|}$ 线性连结区域.

3　应用

结合定理 1 和定理 2，可得到如下判别单位圆盘上一类局部单叶的调和映照是调和拟共形映照的充分必要条件.

定理 3　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 是 D 上局部单叶保向的调和映照，$f(D)$ 为 M 线性连结区域，且满足 $|\frac{g'(z)}{h'(z)}|\leqslant c<\frac{1}{1+2M+\sqrt{(1+2M)^2-1}}$，则 $f(z)$ 为 D 上拟共形映照的充分必要条件是对任意 $\theta\in[0,2\pi]$，$F_\theta(z)=h(z)+\exp(\mathrm{i}\theta)g(z)$ 或 $F_\theta(z)=h(z)+\exp(\mathrm{i}\theta)\overline{g(z)}$ 在 D 上单叶且 $F_\theta(z)$ 为 $\frac{M(1+c)}{1-c(1+2M)}$ 线性连结区域.

1）必要性的证明. 由于 $c<\frac{1}{1+2M+\sqrt{(1+2M)^2-1}}<\frac{1}{1+2M}$，则令推论 1 中 $\beta=\exp(\mathrm{i}\theta)$，即可证得 $F_\theta(z)=h(z)+\exp(\mathrm{i}\theta)g(z)$ 在单位圆盘 D 上单叶且 $F_\theta(D)$ 为 $\frac{M(1+c)}{1-c(1+2M)}$ 线性连结区域. 另外，对于 $F_\theta(z)=h(z)+\exp(\mathrm{i}\theta)\overline{g(z)}$ 在 D 上单叶，可以由定理 C 直接得证.

2）充分性的证明. 仅以 $F_\theta(z)=h(z)+\exp(\mathrm{i}\theta)g(z)$ 为例，$F_\theta(z)=h(z)+\exp(\mathrm{i}\theta)\overline{g(z)}$ 的情形可类似得证. 要证明 $f(z)$ 为单位圆盘 D 上拟共形映照，等价证明 $f(\omega)=\omega-\exp(\mathrm{i}\theta)G(\omega)+\overline{G(\omega)}$ 在 $F_\theta(D)$ 上单叶，其中，$\omega=F_\theta(z)$，$G(\omega)=g\circ F_\theta^{-1}(\omega)$.

对任意 $\omega_1,\omega_2\in F_\theta(D)$ 且 $\omega_1\neq\omega_2$. 一方面，对 $F_\theta^{-1}\circ F_\theta(z)=z$ 关于 z 求微分得 $(F_\theta^{-1})_\omega=\frac{1}{h'+\exp(\mathrm{i}\theta)g'}$，即 $|G_\omega(\omega)|=|\frac{g'}{h'+\exp(\mathrm{i}\theta)g'}|\leqslant\frac{c}{1-c}$. 另一方面，由于 $F_\theta(D)$ 为 $M^*=\frac{M(1+c)}{1-c(1+2M)}$ 线性连结区域，则存在连接 ω_1,ω_2 的可求长曲线 $\gamma\subset F_\theta(D)$，使 $l(\gamma)\leqslant\frac{M(1+c)}{1-c(1+2M)}|\omega_1-\omega_2|$. 则有

$$|f(\omega_1)-f(\omega_2)|=|(\omega_1-\omega_2)-\exp(\mathrm{i}\theta)(G(\omega_1)-G(\omega_2))+\overline{(G(\omega_1)-G(\omega_2))}|\geqslant$$

$$|\omega_1-\omega_2|-2|G(\omega_1)-G(\omega_2)|\geqslant$$

$$|\omega_1-\omega_2|-2\frac{c}{1-c}\frac{M(1+c)}{1-c(1+2M)}|\omega_1-\omega_2|\geqslant$$

$$[1-2\frac{c}{1-c}\frac{M(1+c)}{1-c(1+2M)}]|\omega_1-\omega_2|.$$

由于 $c<\frac{1}{1+2M+\sqrt{(1+2M)^2-1}}$，所以 $|f(\omega_1)-f(\omega_2)|>0$，即证得 $f(\omega)$ 在 $F_\theta(D)$ 上单叶，故有 $f(z)$ 为 D 上拟共形映照.

参考文献:

[1] LEWY H. On the non-vanishing of the jacobian in certain one-to-one mappings[J]. Bull Amer Math Soc,1936,42(10):689-692.

[2] AHLFORS L V. Lectures on quasiconformal mappings[M]. New Jersey:Van Nostrand Princeton,1966:21-24.

[3] PAVLOVIC M. Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomrphisms diffenmophisms of the unit disk[J]. Ann Acad Sci Fen Math,2002,27(2):365-372.

[4] KALAJ D,PAVLOVIC M. Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomrphisms diffenmophisms of a half-plane[J]. Ann Acad Sci Fen Math,2005,30(1):159-165.

[5] KALAJ D. Quasiconformal harmonic functions between convex domains[J]. Publications De Linstitut Mathe,2004,75(89):130-146.

[6] HUANG Xin-zhong. Harmonic quasiconformal mappings on the upper half-plane[EB/OL]. [2012-4-27]. http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/17476933.2011.620097.

[7] 胡春英,黄心中.单叶调和函数及其反函数为拟共形映照的充要条件[J].华侨大学学报:自然科学版,2010,31(5):586-589.

[8] CLUNIE J,SHEIL-SMALL T. Harmonic univalent functions[J]. Ann Acad Sci Fenn (A),1984,9(1):3-25.

[9] 黄心中.具有线性连结像域的局部单叶调和映照[J].数学年刊,2010,31A(5):625-630.

[10] CHUAQUI M,HERNAANDEZ R. Harmonic univalent mappings and linearly connected domains[J]. J Math Anal Appl,2007,33(2):1189-1194.

[11] CHEN S H,PONNUSAMY S,WANG X T. Properties of some class of planar harmonic and planar biharmonic mappings[J]. Complex Analysis and Operator Thorey Oper Theory,2011,5(3):901-916.

Univalent Relation between Harmonic Mapping and Its Shear Function

SHI Qing-tian, HUANG Xin-zhong

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: By the use of the inner relations between linear connectivity of image domains and univalence of harmonic mappings, the univalence of harmonic mapping $f_\alpha(z)=h(z)+\alpha\overline{g(z)}$ and its shear function $F_\beta(z)=h(z)+\beta g(z)$ in the unit disk is investigated. Our results improve and generalize the one made by S. L. Chen and other authors. As an application, one necessary and sufficient condition for a class of locally univalent harmonic mappings in the unit disk to be harmonic quasiconformal mappings is obtained.

Keywords: univalent harmonic mapping; linearly connected domain; shear function; harmonic quasiconformal mapping

(责任编辑:钱筠 英文审校:黄心中)