

文章编号: 1000-5013(2013)02-0230-06

求解一类新的二次规划问题的 时滞投影神经网络方法

刘德友, 牛九肖

(燕山大学 理学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 把 Q 为正定矩阵或半正定矩阵推广到 Q 为亚正定矩阵, 利用时滞投影神经网络模型和李亚普诺夫函数的特性, 给出判断这种特殊二次优化最优解的充分条件. 最后通过数值仿真说明了该网络的有效性.

关键词: 亚正定矩阵; 全局稳定; 时滞投影; 李雅普诺夫函数; 最优解

中图分类号: O 175

文献标志码: A

常见的二次规划问题

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x, \\ \text{s. t. } x \in \Omega. \end{cases}$$

其中: $x \in \mathbf{R}^n$ 是决策变量; $c \in \mathbf{R}^n$; $\Omega \in \mathbf{R}^m$ 是闭的凸集. 约束二次规划已经应用于许多科学和工程领域, 如回归分析、信号和图像的处理、制造业、优化控制和模式识别等. 在过去的十年里, 神经网络被认为是解决二次规划问题的一种最有前景的方法^[1-5]. 目前, 已经有一些投影神经网络技术解决了二次优化问题. 然而, 以往所研究的二次规划仅仅停留在凸二次规划上, 即矩阵 Q 为正定或者半正定的^[6-7], 而在许多情况下, 二次规划并不是凸的, 也就是说矩阵 Q 可能不是正定或半正定的. 此外, 在许多实际应用中, 最优化问题还有一个自然时变亟待解决, 时间延时可能导致震动现象或者网络的不稳定. 本文研究一类新的二次规划问题最优解的稳定性, 推广了以往所研究的凸二次规划问题,

1 模型的提出

所研究的二次规划问题为

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x, \\ \text{s. t. } x \in \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中: $x \in \mathbf{R}^n$ 是决策变量; $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是亚(半)正定矩阵; $c \in \mathbf{R}^n$; $\Omega \in \mathbf{R}^m$ 是闭的凸集.

为了方便讨论, 给出亚(半)正定矩阵的定义.

设 $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 易知 $Q = \frac{1}{2}(Q + Q^T) + \frac{1}{2}(Q - Q^T)$, 且这种分解是唯一的, 分别称 $R(Q) = \frac{1}{2}(Q + Q^T)$, $S(Q) = \frac{1}{2}(Q - Q^T)$ 为 Q 的对称分支和反对称分支. 因此, 对任意的 $0 \neq X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, 有 $X^T Q X = X^T R(Q) X + X^T S(Q) X = X^T R(Q) X$.

定义 1 如果实方阵 Q 的对称分支 $R(Q) = \frac{1}{2}(Q + Q^T)$ 是实对称正定阵, 则称 Q 为亚正定矩

收稿日期: 2012-08-05

通信作者: 刘德友(1961-), 男, 教授, 主要从事神经网络稳定性的研究. E-mail: liudeyouysu@163.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71071133)

阵; 如果 $R(Q) = \frac{1}{2}(Q + Q^T)$ 为实对称半正定矩阵, 则称 Q 为亚半正定矩阵.

问题(1)的拉格朗日函数是

$$L(x, y, u) = f(x) - y^T(x - u).$$

其中: $u \in \Omega$, $y \in \mathbf{R}^m$ 是拉格朗日乘数.

根据著名的鞍点定理, x^* 是问题(1)的最优解, 当且仅当存在 y^* 和 u^* 满足

$$L(x^*, y, u^*) \leq L(x^*, y^*, u^*) \leq L(x, y^*, u),$$

也就是说对于任意的 $u \in \Omega$ 和 $y \in \mathbf{R}^m$, 有

$$f(x^*) - y^T(x^* - u^*) \leq f(x^*) - (y^*)^T(x^* - u^*) \leq f(x) - (y^*)^T(x - u). \quad (2)$$

从不等式(2)的左边, 可得对于任意的 $y \in \mathbf{R}^m$, 有 $(y - y^*)^T(x^* - u^*) \geq 0$ 成立. 即 x^* 和 u^* 总是满足

$$x^* - u^* = 0. \quad (3)$$

从不等式(2)的右边, 可以得到

$$f(x^*) - (y^*)^T x^* - f(x) + (y^*)^T x \leq (y^*)^T(u - u^*), \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \quad u \in \Omega. \quad (4)$$

若存在 $x' \in \mathbf{R}^n$ 满足 $f(x^*) - (y^*)^T x^* - f(x') + (y^*)^T x' > 0$, 那么对于任意的 $u \in \Omega$ 有 $(y^*)^T(u - u^*) > 0$ 成立. 显然, 当 $u = u^*$ 时是矛盾的. 因此, 对任意的 $x \in \mathbf{R}^n$, 有 $f(x^*) - (y^*)^T x^* - f(x) + (y^*)^T x \leq 0$ 成立. 即当 $x \in \mathbf{R}^n$ 时, x^* 是函数 $f(x) - (y^*)^T x$ 的最小值.

因为对任意的 $0 \neq X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, 有 $X^T Q X = X^T R(Q) X$, 并且 $R(Q)$ 为正定矩阵, 所以 x^* 也是凸函数 $\frac{1}{2} x^T R(Q) x + c^T x - (y^*)^T x$ 的最小值. 因此, x^* 和 y^* 满足

$$R(Q)x^* + c - y^* = 0. \quad (5)$$

类似上面分析, 若存在 $u' \in \Omega$ 满足 $(y^*)^T(u' - u^*) < 0$, 通过式(4)对于任意的 $x \in \mathbf{R}^n$, 有 $f(x^*) - (y^*)^T x^* - f(x) + (y^*)^T x < 0$, 当 $x = x^*$ 时是矛盾的. 因此, 对任意的 $u \in \Omega$, 有 $(y^*)^T(u - u^*) \geq 0$. 由投影定理知, 它等价于

$$u^* = P_\Omega(u^* - \alpha y^*). \quad (6)$$

式(6)中: α 是一个正的常数; $P_\Omega: \mathbf{R}^m \rightarrow \Omega$ 是一个由 $P_\Omega(x) = \arg \min_{z \in \Omega} \|x - z\|$ 定义的投影算符; $\|\cdot\|$

表示欧几里德范数.

将 $u^* = x^*$ 代入式(6), 可以得到

$$x^* = P_\Omega(x^* - \alpha y^*). \quad (7)$$

由式(5)可得

$$y^* = R(Q)x^* + c. \quad (8)$$

将式(8)代入式(7), 可得

$$x^* = P_\Omega(x^* - \alpha(R(Q)x^* + c)). \quad (9)$$

基于式(9)及延迟方法, 提出了解决问题(1)的新的时滞投影神经网络, 即

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -2x(t) + P_\Omega(x(t) - \alpha(R(Q)x(t) + c)) + x(t - \tau), \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式(10)中: $\tau \geq 0$ 是时间延迟; $\phi(t)$ 在 $[-\tau, 0]$ 上是连续的.

显然, 神经网络式(10)的平衡点和二次规划问题(1)的解是一致的. 因此, 时滞神经网络在其平衡点是稳定的, 那么网络的输出就是式(1)的解.

下面给出一些相关的定义和引理.

引理 1 Q 为对称的亚正定矩阵, 当且仅当 Q 为正定矩阵.

由此可见, 以前所研究的严格凸的二次规划是本文所研究二次规划的一种特例.

引理 2^[8] (Gronwall 引理) 令 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是定义在区间 $\{t | t \geq t_0\}$ 上的非负实值连续函数, $a(t) = a_0(|t - t_0|)$, 其中 $a_0(\cdot)$ 是单调递增函数.

若 $x(t) \leq a(t) + \int_{t_0}^t x(s)y(s)ds, \forall t \geq t_0$, 则 $x(t) \leq a(t)\exp\left\{\int_{t_0}^t y(s)ds\right\}$.

引理 3^[9] 设 $\Omega \in \mathbf{R}^n$ 是闭的凸集,那么投影算子 P_Ω 有如下 2 点性质:

1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n, \|P_\Omega(\mathbf{x}) - P_\Omega(\mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ 和 $(P_\Omega(\mathbf{x}) - P_\Omega(\mathbf{y}))^\top (P_\Omega(\mathbf{x}) - P_\Omega(\mathbf{y})) \leq (P_\Omega(\mathbf{x}) - P_\Omega(\mathbf{y}))^\top (\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 恒成立;

2) $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{u} \in \Omega, (\mathbf{v} - P_\Omega(\mathbf{v}))^\top (P_\Omega(\mathbf{v}) - \mathbf{u}) \geq 0$ 恒成立.

引理 4^[10] 对任意的 $\boldsymbol{\phi}(t) \in C[-\tau, 0], \mathbf{R}^n$, 如泛函微分方程(10)在区间 $[0, T]$ 上存在满足初始条件 $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), t \in [-\tau, 0]$ 的唯一连续的解 $\mathbf{x}(t)$, 并且 $\mathbf{x}(t)$ 在 $[0, T]$ 上有界, 则式(10)的解的存在区间可延拓到 $[0, +\infty)$ 上.

2 稳定性分析

定理 1 对任意的 $\boldsymbol{\phi}(t) \in C[-\tau, 0], \mathbf{R}^n$, 网络(10)在 $[0, +\infty)$ 上存在唯一连续解 $\mathbf{x}(t)$.

证明 令 $f(\mathbf{x}(t)) = -2\mathbf{x}(t) + P_\Omega(\mathbf{x}(t) - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})) + \mathbf{x}(t - \tau)$.

因为对任意的 $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\varphi} \in C[-\tau, 0], \mathbf{R}^n$, 都有

$$\|f(\boldsymbol{\phi}) - f(\boldsymbol{\varphi})\| \leq \|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\varphi}\| + \|I - \alpha(R(\mathbf{Q}))\| \|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\varphi}\| \leq (2 + \alpha \|R(\mathbf{Q})\|) \|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\varphi}\|.$$

所以, $f(\mathbf{x}(t))$ 在 C 上是 Lipschitz 连续的. 因此, 对于任意的 $\boldsymbol{\phi}(t) \in C[-\tau, 0], \mathbf{R}^n$, 式(10)在 $[0, T]$ 上都存在满足初始条件的唯一连续的解 $\mathbf{x}(t)$.

设 \mathbf{x}^* 是时滞神经网络(10)的平衡点, 那么有

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}(t))\| &= \|f(\mathbf{x}(t)) - f(\mathbf{x}^*)\| \leq 2\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| + \|\mathbf{x}(t - \tau) - \mathbf{x}^*\| + \\ &\|P_\Omega(\mathbf{x}(t) - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})) - P_\Omega(\mathbf{x}^* - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}^* + \mathbf{c}))\| \leq \\ &(4 + \alpha \|R(\mathbf{Q})\|) \|\mathbf{x}^*\| + (3 + \alpha \|R(\mathbf{Q})\|) \|\mathbf{x}(t)\| + \|\mathbf{x}(t - \tau)\| = \\ &\beta_1 \|\mathbf{x}^*\| + \beta_2 \|\mathbf{x}(t)\| + \|\mathbf{x}(t - \tau)\|. \end{aligned}$$

其中: $\beta_1 = 4 + \alpha \|R(\mathbf{Q})\|$; $\beta_2 = 3 + \alpha \|R(\mathbf{Q})\|$.

对任意 $t \in [0, T]$, 有 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t f(\mathbf{x}(s)) ds$ 和 $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), t \in [-\tau, 0]$, 因此有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\| &\leq \|\boldsymbol{\phi}\| + \int_0^t \|f(\mathbf{x}(s))\| ds \leq \|\boldsymbol{\phi}\| + \int_0^t (\beta_1 \|\mathbf{x}^*\| + \beta_2 \|\mathbf{x}(s)\| + \\ &\|\mathbf{x}(s - \tau)\|) ds \leq \|\boldsymbol{\phi}\| + \beta_1 \|\mathbf{x}^*\| T + \beta_2 \int_0^t \|\mathbf{x}(s)\| ds + \int_{-\tau}^{t-\tau} \|\mathbf{x}(s)\| ds \leq \\ &(1 + \tau) \|\boldsymbol{\phi}\| + \beta_1 \|\mathbf{x}^*\| T + \beta_1 \int_0^t \|\mathbf{x}(s)\| ds. \end{aligned}$$

其中: $\|\boldsymbol{\phi}\| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \|\boldsymbol{\phi}(\theta)\|$.

根据引理 2 可以得到 $\|\mathbf{x}(t)\| \leq ((1 + \tau) \|\boldsymbol{\phi}\| + \beta_1 \|\mathbf{x}^*\| T) \exp(\beta_1 t), t \in [0, T]$. 所以, $\mathbf{x}(t)$ 在 $[0, T]$ 上是有界的. 根据引理 4, 式(10)在区间 $[0, +\infty)$ 上存在一个连续解 $\mathbf{x}(t)$.

定理 2 时滞神经网络(10)全局渐近稳定于二次优化(1)的解, 当矩阵 \mathbf{Q} 是一个亚(半)正定矩阵.

证明 假设 \mathbf{x}^* 是(10)的平衡点, 考虑如下的李亚普诺夫函数

$$V(\mathbf{x}(t)) = V_0(\mathbf{x}(t)) + \frac{1}{2} \int_{t-\tau}^t (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*)^\top \left(\frac{\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^\top}{2} + \mathbf{I} \right) (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*) ds.$$

其中: \mathbf{I} 是 n 维的单位向量; $V_0(\mathbf{x}(t)) = \alpha(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) - \langle f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle) + \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2, f(\mathbf{x}) =$

$$\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \left(\frac{\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^\top}{2} \right) + \mathbf{c}^\top \mathbf{x}, f'(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^\top}{2} \right) + \mathbf{x} + \mathbf{c}, \langle \cdot, \cdot \rangle \text{表示内积. 则有}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_0(\mathbf{x}(t))}{dt} &= \langle \alpha f'(\mathbf{x}) - \alpha f'(\mathbf{x}^*), \frac{d\mathbf{x}}{dt} \rangle + \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}^*, \frac{d\mathbf{x}}{dt} \rangle = \\ &\langle \alpha f'(\mathbf{x}) - \alpha f'(\mathbf{x}^*), P_\Omega(\mathbf{x}(t) - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})) - \mathbf{x}(t) \rangle + \\ &\langle \alpha f'(\mathbf{x}) - \alpha f'(\mathbf{x}^*), -\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t - \tau) \rangle + \\ &\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}^*, P_\Omega(\mathbf{x}(t) - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})) - \mathbf{x}(t) \rangle + \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}^*, -\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t - \tau) \rangle. \end{aligned}$$

其中: $\langle \alpha f'(\mathbf{x}) - \alpha f'(\mathbf{x}^*), P_\Omega(\mathbf{x}(t) - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})) - \mathbf{x}(t) \rangle = \langle \alpha f'(\mathbf{x}) - \alpha f'(\mathbf{x}^*), P_\Omega(\mathbf{x}(t) - \alpha \times (R$

$$\langle \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{c} \rangle - \mathbf{x}^* \rangle + \langle \alpha f'(\mathbf{x}) - \alpha f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}(t) \rangle = \langle \alpha f'(\mathbf{x}), P_{\Omega}(\mathbf{x}(t) - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})) - \mathbf{x}^* \rangle - \langle \alpha f'(\mathbf{x}^*), P_{\Omega}(\mathbf{x}(t) - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})) - \mathbf{x}^* \rangle + \langle \alpha f'(\mathbf{x}) - \alpha f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{x}(t) \rangle.$$

由此可得到

$$\begin{aligned} & \langle \alpha f'(\mathbf{x}), P_{\Omega}(\mathbf{x}(t) - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})) - \mathbf{x}^* \rangle = \\ & \langle \alpha f'(\mathbf{x}) - \mathbf{x}(t) + P_{\Omega}(\mathbf{x}(t) - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})), P_{\Omega}(\mathbf{x}(t) - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})) - \mathbf{x}^* \rangle + \\ & \langle \mathbf{x}(t) - P_{\Omega}(\mathbf{x}(t) - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})), P_{\Omega}(\mathbf{x}(t) - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})) - \mathbf{x}(t) \rangle + \\ & \langle \mathbf{x}(t) - P_{\Omega}(\mathbf{x}(t) - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})), \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^* \rangle. \end{aligned}$$

结合以上式子和引理 3, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dV_0(\mathbf{x}(t))}{dt} &= \langle \alpha f'(\mathbf{x}) - \mathbf{x}(t) + P_{\Omega}(\mathbf{x}(t) - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})), P_{\Omega}(\mathbf{x}(t) - \\ & \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})) - \mathbf{x}^* \rangle - \| P_{\Omega}(\mathbf{x}(t) - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})) - \mathbf{x}(t) \|^2 + \\ & \langle \mathbf{x}(t) - P_{\Omega}(\mathbf{x}(t) - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})), \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^* \rangle - \\ & \langle \alpha f'(\mathbf{x}^*), P_{\Omega}(\mathbf{x}(t) - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})) - \mathbf{x}^* \rangle + \\ & \langle \alpha f'(\mathbf{x}) - \alpha f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{x}(t) \rangle + \langle \alpha f'(\mathbf{x}) - \alpha f'(\mathbf{x}^*), -\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t - \tau) \rangle + \\ & \langle \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*, P_{\Omega}(\mathbf{x}(t) - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})) - \mathbf{x}(t) \rangle + \\ & \langle \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*, -\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t - \tau) \rangle \leq \\ & - \| P_{\Omega}(\mathbf{x}(t) - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})) - \mathbf{x}(t) \|^2 + \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}^*, -\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t - \tau) \rangle + \\ & \langle \alpha f'(\mathbf{x}) - \alpha f'(\mathbf{x}^*), -\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t - \tau) \rangle = \\ & - \| P_{\Omega}(\mathbf{x}(t) - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})) - \mathbf{x}(t) \|^2 + \\ & \langle (\alpha(\frac{\mathbf{Q} + \mathbf{Q}'}{2}) + \mathbf{I})(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*), -\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t - \tau) \rangle. \end{aligned}$$

因此, 可以得到 $V(\mathbf{x}(t))$ 对时间 t 的导数为

$$\begin{aligned} \frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} &= \frac{dV_0(\mathbf{x}(t))}{dt} + \frac{1}{2}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*)^T (\alpha(\frac{\mathbf{Q} + \mathbf{Q}'}{2}) + \mathbf{I})(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*) - \\ & \frac{1}{2}(\mathbf{x}(t - \tau) - \mathbf{x}^*)^T \times (\alpha(\frac{\mathbf{Q} + \mathbf{Q}'}{2}) + \mathbf{I})(\mathbf{x}(t - \tau) - \mathbf{x}^*) = \\ & - \| P_{\Omega}(\mathbf{x}(t) - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})) - \mathbf{x}(t) \|^2 + \\ & \langle (\alpha(\frac{\mathbf{Q} + \mathbf{Q}'}{2}) + \mathbf{I})(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*), -\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t - \tau) \rangle + \\ & \frac{1}{2}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*)^T (\alpha(\frac{\mathbf{Q} + \mathbf{Q}'}{2}) + \mathbf{I})(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*) - \\ & \frac{1}{2}(\mathbf{x}(t - \tau) - \mathbf{x}^*)^T (\alpha(\frac{\mathbf{Q} + \mathbf{Q}'}{2}) + \mathbf{I})(\mathbf{x}(t - \tau) - \mathbf{x}^*) = \\ & - \| P_{\Omega}(\mathbf{x}(t) - \alpha(R(\mathbf{Q})\mathbf{x}(t) + \mathbf{c})) - \mathbf{x}(t) \|^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - \tau))^T \times \\ & (\alpha(\frac{\mathbf{Q} + \mathbf{Q}'}{2}) + \mathbf{I})(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - \tau)) \leq 0. \end{aligned}$$

$\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} = 0$ 当且仅当 $\frac{dV\mathbf{x}(t)}{dt} = 0$. 因此, 系统在李雅普诺夫意义下是全局渐近稳定的, 并且收敛于系统的平衡解, 也就是不定二次规划的最优解.

3 数值举例

例 1 考虑如下二次规划问题

$$\begin{cases} \min f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + (2, 0, -2)\mathbf{x}, \\ \text{s. t. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases}$$

其中: $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)^T, \Omega=\{(h_1, h_2, h_3)^T: -2 \leq h_1, h_2, h_3 \leq 2\}$.

令 $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tau=0.5$, 因 $R(Q) = \frac{1}{2}(Q+Q^T) = \begin{bmatrix} 2 & 1.5 & 0.5 \\ 1.5 & 2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$ 为正定矩阵, 故矩阵 Q 为亚

正定矩阵. 这个问题有唯一的最优解 $\mathbf{x}^* = (-2, 1, 2)^T$. 根据定理 3, 神经网络(10)的平衡点是全局渐近稳定的, 并且收敛于二次规划的最优解 \mathbf{x}^* .

利用 5 个初始值来测验神经网络, 所有的结果显示神经网络收敛到问题的最优解, 仿真结果如图 1 所示. 对时滞神经网络和非时滞的神经网络进行了对比, 结果如图 2 所示.

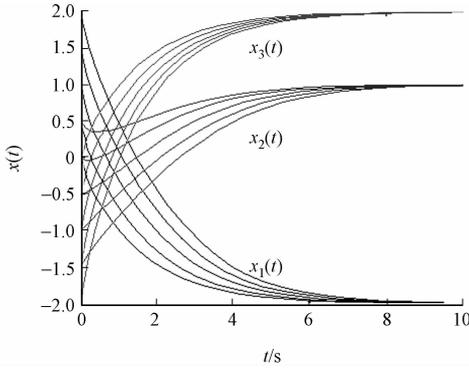


图 1 神经网络仿真结果

Fig. 1 Simulation results of the neural network

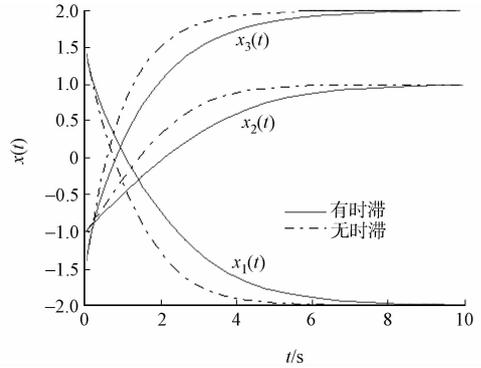


图 2 神经网络的轨迹对比

Fig. 2 Comparison of the trajectory of neural network

例 2 考虑如下二次规划问题:

$$\begin{cases} \min f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + (2, 0, -2) \mathbf{x}, \\ \text{s. t. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases}$$

其中: $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)^T; \Omega=\{(h_1, h_2, h_3)^T: -2 \leq h_1, h_2, h_3 \leq 2\}$.

令 $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, Q$ 为正定矩阵, 是特殊的亚正定矩阵, 问题有唯一的最优解 $\mathbf{x}^* = (-2, 0, 2)^T$.

令时间延迟 $t=0.25$, 根据定理 3, 神经网络(10)的平衡点是全局渐近稳定的, 并且收敛于二次规划的最优解 \mathbf{x}^* . 因此, 利用 7 个初始值来测验神经网络, 所有的结果显示神经网络收敛到问题的最优解, 其仿真结果如图 3 所示. 相应的, 对时滞神经网络和非时滞的神经网络进行对比, 结果如图 4 所示.

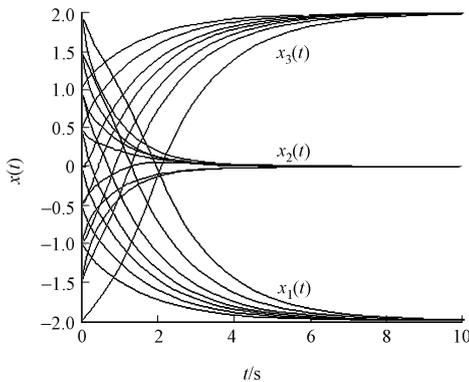


图 3 神经网络仿真结果

Fig. 3 Simulation results of the neural network

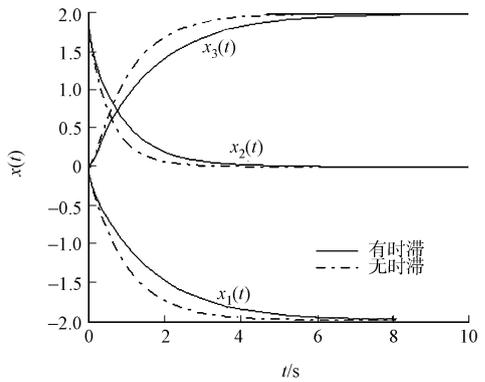


图 4 神经网络的轨迹对比

Fig. 4 Comparison of the trajectory of neural network

4 结论

研究一种新的二次规划最优解的稳定性,是对以前凸规划的进一步深入推广,给出了解决此类问题的投影时滞神经网络模型,以及鞍点定理与最优解的关系.同时,文中给出了判定平衡点全局指数稳定的充分条件,并借助李亚普诺夫函数给出系统全局渐近稳定的新的充分条件.最后,用数值举例说明了所给系统的有效性.

参考文献:

- [1] XIA You-shen, FENG Gang, WANG Jun. A recurrent neural network with exponential convergence for solving convex quadratic program and related linear piecewise equations[J]. *Neural Networks*, 2004, 17(7):1003-1015.
- [2] XUE Xiao-ping, BIAN Wei. A project neural network for solving degenerate convex quadratic program[J]. *Neurocomputing*, 2007, 70(13/15):2449-2459.
- [3] LIU Qing-shan, CAO Jin-de. Global exponential stability of discrete-time recurrent neural network for solving quadratic programming problems subject to linear constraints[J]. *Neurocomputing*, 2011, 74(17):3494-3501.
- [4] TAO Qing, CAO Jin-de, Demin Sun. Neural network for quadratic programming problems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2001, 124(2):251-260.
- [5] HASAN G O, NEZAM M A. An efficient simplified neural network for solving linear and quadratic programming problems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, 175(1):452-464.
- [6] 李洁坤,丁明智,虞继敏.非线性时滞细胞神经网络稳定性分析[J].*郑州大学学报:理学版*, 2010, 42(3):54-58.
- [7] 杨华芬,杨有,尚晋.一种改进的进化神经网络优化设计方法[J].*郑州大学学报:工学版*, 2010, 31(5):116-120.
- [8] YANG Yong-qing, CAO Jin-de. A feedback neural network for solving convex constraint optimization problems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 201(1/2):340-350.
- [9] BERTSEKAS D P. *Parallel and distributed computation: Numerical methods*[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1989.
- [10] HALE J K, VERDUYN-LUNEL S M. *Introduction to functional differential equations*[M]. New York:Springer, 1993.

A Delayed Projection Neural Network for Solving a New Quadratic Programming Problems

LIU De-you, NIU Jiu-xiao

(College of Science, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: In this paper, we studied the stability of the optimal solution of a new quadratic programming problem which is the promotion of the convex quadratic programming. We give the sufficient condition to determine the stability of the equilibrium point and propose a delayed projection neural network to solve this quadratic programming. By constructing a suitable Lyapunov function, the proposed neural network is proved to be globally stable. Simulation results with some applications show the efficient of the proposed neural network.

Keywords: subdefinite matrices; globally stable; delayed projection; lyapunov function; optimal solution

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 黄心中)