文章编号： 1000-5013(2013)02-0225-05

某些调和函数的系数估计与像区域的近于凸性质

王其文，黄心中

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 研究定义在单位圆盘 $D=\{z||z|<1\}$ 上的调和函数类 $C_H^2(\lambda)$，得到 $C_H^2(\lambda)$ 类中的函数为调和拟共形映照的一个充分条件，并给出调和函数的解析部分、共轭解析部分的系数估计. 在调和映照系数模满足一定的条件下，给出该类函数的近于凸单叶半径与星像单叶半径估计，主要结果改进和推广了 Kalaj 等的相应结论.

关键词： 调和函数；拟共形映照；系数不等式；近于凸

中图分类号： O 174.5　　**文献标志码：** A

1 预备知识

假定 $f(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$，$z=x+\mathrm{i}y$ 是平面区域 $\Omega\subset C$ 上具有二阶连续偏导数的函数，如果 $\Delta f=4f_{z\bar{z}}=0$，则 $f(z)$ 为 Ω 上的调和函数. 当 $\Omega=D=\{z||z|<1\}$ 为单位圆盘时，若 $f(z)$ 为定义在 D 上的局部单叶保向调和函数，则存在 D 上的解析函数 $h(z)$ 和 $g(z)$，使得 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$；若 $f(z)$ 为单叶保向调和函数，由 Lewy 定理[1] 可知，$f(z)$ 的 Jacobian 恒正，即 $J_f=|h'|^2-|g'|^2>0$. 若存在常数 $0\leqslant k<1$，使得 $|g'/h'|\leqslant k$，则称 $f(z)$ 为 D 上的调和拟共形映照.

设 H 表示单位圆盘 $D=\{z||z|<1\}$ 上复值调和函数类 $f(z)$，且满足 $f(0)=f_z(0)-1=0$. $f(z)$ 表示为 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$，其中：$h(z)$ 和 $g(z)$ 在 D 内解析，且

$$h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n,\qquad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n. \tag{1}$$

令 S_H 表示 H 内单叶保向函数类 $f=h+\bar{g}$，当 $f_{\bar{z}}(0)=0$ 时，其子类为 $S_H^0=\{f\in S_H: f_{\bar{z}}(0)=0\}$. C_H 表示由单位圆盘 D 映照到近于凸区域的保向调和函数 $f=h+\bar{g}\in H$ 组成. 令 $0<\lambda\leqslant 1$，记

$$C_H^2=\{f\in S_H\,||\,h'(z)-1\,|<1-|\,g'(z)\,|,z\in D\},$$

$$C_H^2(\lambda)=\{f\in S_H\,||\,h'(z)-1\,|<\lambda-|\,g'(z)\,|,z\in D\}.$$

给出满足系数条件的两类调和函数，对这两类调和函数的研究有不少相应的成果[2]. Kalaj 证明了以下两个定理.

定理 1　设 $h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$，$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$ 定义在单位圆盘 D 上，$|\,b_1\,|<1$，$f=h+\bar{g}$，且系数满足条件 $\sum_{n=2}^{\infty}n\,|\,a_n\,|+\sum_{n=1}^{\infty}n\,|\,b_n\,|\leqslant 1$，那么 $f\in C_H^2$.

定理 2　设 $h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$，$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$ 定义在单位圆盘 D 上，$b_1<0$，$f=h+\bar{g}$，且系数满足条件 $\sum_{n=2}^{\infty}n\,|\,a_n\,|+\sum_{n=1}^{\infty}n\,|\,b_n\,|\leqslant 1$，那么 $f\in C_H^2\cap S_H^{0*}$，其中：S_H^{0*} 表示 S_H^0 中的星像函数类.

收稿日期： 2012-05-29

通信作者： 黄心中(1957-)，男，教授，主要从事函数论的研究. E-mail：huangxz@hqu.edu.cn.

基金项目： 福建省自然科学基金资助项目(2011J0101)

Clunie 等[3]定义了在 S_H^0 内的 Koebe 函数,并且给出两个系数猜想. S_H^0 内的 Koebe 函数为

$$k(z)=H(z)+\overline{G(z)}=z+\sum_{n=2}^{\infty}A_n z^n+\overline{\sum_{n=2}^{\infty}B_n z^n}.$$

其中:$A_n=\frac{1}{6}(2n+1)(n+1)$, $B_n=\frac{1}{6}(2n-1)(n-1)$, $n\geqslant 1$.

猜想 1 若 $f=h+\bar{g}\in S_H^0$,那么系数满足不等式 $|a_n|\leqslant A_n$, $|b_n|\leqslant B_n$, $n\geqslant 1$.

令 K_H 表示由单位圆盘 D 映照到凸区域的保向调和函数 $f=h+\bar{g}\in H$ 组成,当 $f_{\bar{z}}(0)=0$ 时,其子类 $K_H^0=\{f\in K_H: f_{\bar{z}}(0)=0\}$.

猜想 2 若 $f=h+\bar{g}\in K_H^0$,那么系数满足不等式 $|a_n|\leqslant\frac{n+1}{2}$, $|b_n|\leqslant\frac{n-1}{2}$, $n\geqslant 1$.

Kalaj 等[2]在上述定理 1,2 的基础上,研究了满足上述系数猜想的调和函数的近于凸与星像单叶半径问题,并且证明了定理 3,4,5.

定理 3 设 $h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$, $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n$ 定义在单位圆盘 D 上,并且系数的条件满足 $|a_n|\leqslant A_n$, $|b_n|\leqslant B_n$. 则 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 在圆盘 $|z|<r_s$ 内是近于凸的(单叶)且星形的,其中:r_s 是二次方程 $\sqrt{2}r^2-(1+2\sqrt{2})r+\sqrt{2}-1=0$ 在区间(0,1)内的根.

定理 4 设 $h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$, $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n$ 定义在单位圆盘 D 上,且系数的条件满足 $|a_n|\leqslant\frac{n+1}{2}$, $|b_n|\leqslant\frac{n-1}{2}$. 则 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 在圆盘 $|z|<r_s$ 内是近于凸的(单叶)且星形的,其中:r_s 是 3 次方程 $2r^3-6r^2+7r-1=0$ 在区间(0,1)内的根.

定理 5 设 $h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$, $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n$ 定义在单位圆盘 D 上, $|b_1|<1$ 且系数的条件满足 $|a_n|+|b_n|\leqslant C$,则 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 在圆盘 $|z|<r_s$ 内近于凸的(单叶)且星形的,其中:$r_s=1-\sqrt{\frac{C}{C+1-|b_1|}}$. 结果是精确的.

近年来,对单叶调和函数成为调和拟共形映照问题的研究引起了不少学者的关注[4-10],也得到了不少有趣的结果.

2 主要结果及证明

定理 6 设 $f=h+\bar{g}$ 定义在单位圆盘 D 上,h 和 g 在 D 内解析,$h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$, $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n$. 若 $f\in C_H^2(\lambda)$, $0<\lambda<1$ 时,则 $f(z)$ 为调和 K-拟共形映照,其中:$K=\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$.

证明 当 $f\in C_H^2(\lambda)$ 时,有

$$|f_z(z)-1|<\lambda-|f_{\bar{z}}(z)|,\qquad 0\leqslant|f_z(z)-1|<\lambda \tag{2}$$

成立. 即 $1-\lambda<|h'(z)|<1+\lambda$.

将式(2)两边同时除以 $|h'(z)|$,有

$$\frac{|g'(z)|}{|h'(z)|}<\frac{\lambda}{|h'(z)|}-\frac{|h'(z)-1|}{|h'(z)|}. \tag{3}$$

令 $\omega=\frac{1}{h'(z)}$,则 $\frac{1}{1+\lambda}<|\omega|<\frac{1}{1-\lambda}$,式(3)变为

$$\frac{|g'(z)|}{|h'(z)|}<\lambda|\omega|-|1-|\omega||. \tag{4}$$

当 $1<|\omega|<\frac{1}{1-\lambda}$ 时, $\frac{|g'(z)|}{|h'(z)|}<1-(1-\lambda)|\omega|$,有

$$k=\sup_{z\in D}\frac{|g'(z)|}{|h'(z)|}\leqslant\lambda<1,$$

则 $f(z)$是 K_1-qc 调和映照，其中：$K_1=\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$.

当$\frac{1}{1+\lambda}<|\omega|\leqslant 1$ 时，$\frac{|g'(z)|}{|h'(z)|}<(1+\lambda)|\omega|-1$ ，有

$$k=\sup_{z\in D}\frac{|g'(z)|}{|h'(z)|}\leqslant\lambda<1,$$

则 $f(z)$是 K_2-qc 调和映照，其中：$K_2=\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$.

综上所述，有 $f(z)$为调和拟共形映照.

注 1　当 $\lambda=1$ 时，$f(z)=z+\frac{1}{2}\bar{z}^2$，此时 $f(z)\in C_H^2$，但是 $f(z)$不是调和拟共形映照；而当 $\lambda=\frac{1}{2}$时，$f(z)=z+\frac{1}{4}\bar{z}^2$，此时 $f(z)\in C_H^2(\frac{1}{2})$，$f(z)$是调和拟共形映照.

定理 7　设 $f=h+\bar{g}$ 定义在单位圆盘D 上，其中 h 和 g 在 D 内解析，$h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$，$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$. 若 $f\in C_H^2(\lambda)$，有

$$|a_n|\leqslant\frac{\sqrt{\lambda^2-|b_1|^2}}{n},\ |b_n|\leqslant\frac{\sqrt{\lambda^2-|b_1|^2}}{n},\qquad n\geqslant 2,$$

$$|a_n|+|b_n|\leqslant\frac{\sqrt{2(\lambda^2-|b_1|^2)}}{n},\qquad n\geqslant 2.$$

证明　由于 $f\in C_H^2(\lambda)$，则不等式$|h'(z)-1|<\lambda-|g'(z)|$成立，且$|b_1|<\lambda$. 令

$$F(z)=h'(z)-1+\overline{g'(z)}=\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1}+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}nb_nz^{n-1}},$$

则$|F(z)|=|h'(z)-1|+\overline{g'(z)}|\leqslant|h'(z)-1|+|g'(z)|<\lambda$.

当 $z=re^{i\theta}$时，其中：$0<r<1$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 由 Parseval 等式得

$$|b_1|^2+\sum_{n=2}^{\infty}n^2(|a_n|^2+|b_n|^2)r^{2(n-1)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|F(re^{i\theta})|^2d_\theta\leqslant\lambda^2.$$

对任意 $n\geqslant 2$ 时，由于$|b_1|<\lambda$，可以得到

$$n^2(|a_n|^2+|b_n|^2)r^{2(n-1)}\leqslant\lambda^2-|b_1|^2.$$

令 $r\to 1^-$，得到不等式 $n^2(|a_n|^2+|b_n|^2)\leqslant\lambda^2-|b_1|^2$，那么有

$$|a_n|\leqslant\frac{\sqrt{\lambda^2-|b_1|^2}}{n},\ |b_n|\leqslant\frac{\sqrt{\lambda^2-|b_1|^2}}{n},\qquad n\geqslant 2,$$

$$|a_n|+|b_n|\leqslant\frac{\sqrt{2(\lambda^2-|b_1|^2)}}{n},\qquad n\geqslant 2$$

成立.

定理 8　设$h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$，$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$定义在单位圆盘$D$ 上，$|b_1|<1$，且系数的条件满足$|a_n|+|b_n|\leqslant\alpha n^2+\beta n+\gamma$，其中：$\alpha,\beta,\gamma$ 是非负常数，$n\geqslant 2$. 那么，$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$在 D 上为调和函数，且在圆盘$|z|<r_s$ 内是近于凸的(单叶)，其中：r_s 是方程

$$\frac{\alpha(-r^4+4r^3-5r^2+8r)}{(1-r)^4}+\frac{\beta(r^3-3r^2+4r)}{(1-r)^3}+\frac{\gamma(2r-r^2)}{(1-r)^2}-(1-|b_1|)=0$$

在区间(0,1)内的最小正根，且该半径的估计是精确的.

证明　由$|a_n|+|b_n|\leqslant\alpha n^2+\beta n+\gamma$，知 h,g 在 D 内收敛，则 h,g 在 D 内解析. 所以 $f=h+\bar{g}$ 在 D 内是调和的. 令 $0<r<1$，设

$$f_r(z)=\frac{1}{r}f(rz)=\frac{1}{r}h(rz)+\frac{1}{r}\overline{g(rz)}=$$

$$z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nr^{n-1}z^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_nr^{n-1}z^n}.$$

由定理1知，若

$$S=\sum_{n=2}^{\infty}n\mid a_n\mid r^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}n\mid b_n\mid r^{n-1}\leqslant$$

$$\mid b_1\mid+\sum_{n=2}^{\infty}n(\alpha n^2+\beta n+\gamma)r^{n-1}\leqslant 1,$$

则有 $f_r\in C_H^2$ 成立.

根据条件,证明下列不等式成立.

$$\alpha\sum_{n=2}^{\infty}n^3r^{n-1}+\beta\sum_{n=2}^{\infty}n^2r^{n-1}+\gamma\sum_{n=2}^{\infty}nr^{n-1}\leqslant 1-\mid b_1\mid. \tag{5}$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}nr^{n-1}=\frac{1}{(1-r)^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}n^2r^{n-1}=\frac{1+r}{(1-r)^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty}n^3r^{n-1}=\frac{r^2+4r+1}{(1-r)^4}$，将其代入式(5)有

$$\frac{\alpha(-r^4+4r^3-5r^2+8r)}{(1-r)^4}+\frac{\beta(r^3-3r^2+4r)}{(1-r)^3}+\frac{\gamma(2r-r^2)}{(1-r)^2}\leqslant 1-\mid b_1\mid$$

成立. r_s 是方程

$$\frac{\alpha(-r^4+4r^3-5r^2+8r)}{(1-r)^4}+\frac{\beta(r^3-3r^2+4r)}{(1-r)^3}+\frac{\gamma(2r-r^2)}{(1-r)^2}-(1-\mid b_1\mid)=0$$

的最小正根,便可得到 $f_{r_s}(z)$是$|z|<1$上近于凸调和函数,从而 $f(z)$在$|z|<r_s$ 近于凸.

关于 r_s 的精确性问题,取

$$F(z)=H_0(z)+\overline{G_0(z)}=z-\sum_{n=2}^{\infty}\alpha n^2z^n-\overline{\mid b_1\mid z+\sum_{n=2}^{\infty}(n\beta+\gamma)z^n},$$

从而有

$$\begin{aligned}J_F(r)=&\mid H'_0(r)\mid^2-\mid G'_0(r)\mid^2=\\&(\mid H'_0(r)\mid+\mid G'_0(r)\mid)(\mid H'_0(r)\mid-\mid G'_0(r)\mid)=\\&(1-\mid b_1\mid-\sum_{n=2}^{\infty}n(\alpha n^2+\beta n+\gamma)r^{n-1})(1+\mid b_1\mid-\sum_{n=2}^{\infty}n(\alpha n^2-\beta n-\gamma)r^{n-1}).\end{aligned}$$

令 $J_F(r)=0$,那么有 $\sum_{n=2}^{\infty}n(\alpha n^2+\beta n+\gamma)r^{n-1}=1-\mid b_1\mid$,则 $r=r_s$;或者$\sum_{n=2}^{\infty}n(\alpha n^2-\beta n-\gamma)r^{n-1}=1+\mid b_1\mid$,则 $r=r'_s>r_s$. 故当 $r_s<r<r'_s$ 时,$J_F(r)<0$. 所以,若 $r>r_s$,函数 $F(z)$在$|z|<r$ 内不是单叶的,这就证明了 r_s 不能取得更大的数.

当 α,β,γ 分别取不同的特殊值时,得到下面几个重要的结果,改进了由 Kalaj 等得到的相应结论.

1) 当 $\alpha=2/3,\beta=0,\gamma=1/3$ 时,可以得到

推论1 设 $h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$, $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$定义在单位圆盘 D 上,$|b_1|<1$,且系数的条件满足 $|a_n|+|b_n|\leqslant\frac{2n^2+1}{3}$,则 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$在圆盘$|z|<r_s$ 内是近于凸的(单叶). 其中:r_s 是方程

$$\frac{-3r^4+12r^3-15r^2+10r}{3(1-r)^4}-(1-\mid b_1\mid)=0$$

在区间(0,1)内的最小正根.

注2 令 $b_1=0$,应用定理2后,得到的结果改进了定理3.

2) 当 $\alpha=0,\beta=1,\gamma=0$ 时,可以得到

推论2 设 $h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$, $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$定义在单位圆盘 D 上,$|b_1|<1$ 且系数的条件满足 $|a_n|+|b_n|\leqslant n$. 则 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$在圆盘$|z|<r_s$ 内是近于凸的(单叶). 其中:r_s 是方程

$$\frac{r^3-3r^2+4r}{(1-r)^3}-(1-|b_1|)=0$$

在区间(0,1)内的最小正根.

注 3　令 $b_1=0$,应用定理 2 后得到的结果改进了定理 4.

3）当 $\alpha=0,\beta=0,\gamma=C$ 时,同理可得到定理 5 的结果.

参考文献:

[1] LEWY H. On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings[J]. Uspekhi Mat Nauk,1948,3(2):216-219.

[2] BSHOUTY D,LYZZAIK A. Problems and conjectures in planar harmonic mappings[J]. J Analysis,2010,18:69-81.

[3] CLINIE J,SHEIL-SMALL T. Harmonic univalent functions[J]. Ann Acad Sci Fenn Math,1984,9:3-25.

[4] PAVLOVIC M. Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomorphisms of the unit disk[J]. Ann Acad Sci Fenn Math,2002,27:365-372.

[5] KALAJ D,PAVLOVIC M. Boundary correspondence under harmonic quasiconformal diffeomorphisms of a half plane[J]. Ann Acad Sci Fenn Math,2005,30:159-165.

[6] 黄心中.单位圆盘上的调和拟共形同胚[J].数学年刊,2008,29A(4):519-524.

[7] 朱剑峰,黄心中.两类调和函数的拟共形性质[J].华侨大学学报:自然科学版,2011,32(6):705-709.

[8] CHEN S,PONNUSAMY S,WANG X. Coefficient estimates and Landou-Bloch's constant for planar harmonic mappings[J]. Bull Malaysian Math Science Soc,2011,34(2):255-265.

[9] DORFF M,NOWAK M. Landau's theorem for planar harmonic mappings[J]. Comput Methods Funct Theory,2004,4(1):151-158.

[10] LIU Ming-sheng. Landau's theorem for planar harmonic mappings[J]. Computers and Mathe-Matics with Applications,2009,57:1142-1146.

Coefficient Estimate and Close-to-Convex Image Domain Property for Some Harmonic Functions

WANG Qi-wen，HUANG Xin-zhong

(School of Mathematical Sciences，Huaqiao University，Quanzhou 362021，China)

Abstract:　Let $C_H^2(\lambda)$ be the harmonic mappings on the unit disk $D=\{z\,|\,|z|<1\}$. In this paper, we first find one sufficient condition for them to be harmonic quasiconformal mappings and give their analytical part and conjugate part's coefficient estimate. Next, under one coefficient bound condition for harmonic functions, we find the lower bound estimates for their close-to-convex and star-like radius in their image domains. Our results improve and generalize the one made by Kalaj recently.

Keywords:　harmonic mapping；quasiconformal mapping；coefficient inequality；close-to-convex

（**责任编辑**：陈志贤　　**英文审校**：黄心中）