

文章编号: 1000-5013(2013)02-0220-05

圆排列包装问题最优解解析

杨金勇, 宋海洲

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究圆排列包装问题, 给出该问题的数学模型及其简化形式. 通过研究圆排列包装问题的最优解的性质, 将该问题的数学模型进一步转化为一个较易求解的数学模型, 并给出一个关于其最优解的定理和证明. 该定理表明: 按半径大小降序排列且两两相切的圆排列为圆排列包装问题的一个最优圆排列.

关键词: 圆排列; 包装问题; 两两相切; 顺序排列; 反向操作

中图分类号: O 157

文献标志码: A

近年来, 组合优化问题引起越来越多的关注, 如文献[1]用混合遗传算法求解 0-1 背包问题, 文献[2]用蚁群算法解决 TSP 问题, 文献[3-6]用回溯法、蚁群算法求解圆排列问题. 目前, 圆排列研究得最多的问题是如何求解最小长度, 然而, 在生产生活中也会遇到下面这种情况, 生产统一大小的盒子, 要求这种盒子能够装下以任何一种排列顺序排进该盒子的 n 个大小不全相等的圆, 且盒子长度尽可能的小. 本文把这种问题称为圆排列包装问题, 并对此进行研究.

1 圆排列包装问题的数学模型

圆排列包装问题描述为找一个矩形框, 将 n 个大小不全相等的圆以任何一种排列顺序排进该矩形框后, 都能保证这 n 个圆与矩形的底边相切, 且要求这种矩形框长度最小.

设任给一个 C_1, C_2, \dots, C_n 的圆排列 $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_n}$ (i_1, i_2, \dots, i_n 是 $1, 2, \dots, n$ 的 n 级排列), 圆 C_{i_k} 对应的圆心坐标为 (x_{i_k}, R_{i_k}) , 其中 $k=1, \dots, n$, 则圆排列包装问题模型的非线性二层规划为

$$\max_{i_1, \dots, i_n} \left\{ \begin{array}{l} \min_k \{ \max(x_{i_k} + R_{i_k}) - \min(x_{i_k} - R_{i_k}) \}, \\ \text{s. t. } \sqrt{(x_{i_p} - x_{i_q})^2 + (R_{i_p} - R_{i_q})^2} \geq R_{i_p} + R_{i_q}, \\ \quad p = 1, \dots, n; \quad q = 1, \dots, n; \quad p \neq q, \\ x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \dots \leq x_{i_n}, \\ \text{s. t. } (i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n) \text{ 为 } 1, \dots, n \text{ 的 } n \text{ 级排列.} \end{array} \right. \quad (1)$$

下面给出一些集合和相关长度的定义.

定义 1 给定 n 个圆 C_1, \dots, C_n , 其圆心的横坐标分别为 x_1, x_2, \dots, x_n , 半径分别为 R_1, R_2, \dots, R_n , $R_1 \leq R_2 \leq \dots \leq R_n$, 且 $R_1 < R_n$. 定义下面 4 个的集合 S, T, Q, P .

1) $S = \{ \omega | (\omega = i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ 为 } 1, \dots, n \text{ 的 } n \text{ 级排列} \}$.

2) $T = \{ (x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) | (i_1, i_2, \dots, i_n) \in S, \text{圆排列 } C_{i_1}, \dots, C_{i_n} \text{ 不在左右两端的圆与相邻的两个圆两两相切 (左端的圆是指取圆心的横坐标为所有圆的横坐标的最小值的圆, 右端的圆是指取圆心的横坐标为所有圆的横坐标最大值的圆), 圆 } C_{i_j} \text{ 的坐标为 } (x_{i_j}, R_{i_j}), \text{ 其中, } j=1, \dots, n, \text{ 且 } \min_{j=1}^n (x_{i_j} - R_{i_j}) = 0 \}$.

3) $Q = \{ (x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) | (i_1, i_2, \dots, i_n) \in S, \text{圆排列 } C_{i_1}, \dots, C_{i_n} \text{ 不在左右两端的圆与相邻的两个圆两两} \}$

收稿日期: 2012-01-16

通信作者: 宋海洲 (1971-), 男, 副教授, 主要从事数学模型的研究. E-mail: hzsong@hqu.edu.cn.

基金项目: 华侨大学科研基金资助项目 (10HZR26)

相切,圆 C_{i_j} 的坐标为 (x_{i_j}, R_{i_j}) , 其中 $j=1, \dots, n$, 且 $\min_{j=1}^n (x_{i_j} - R_{i_j}) = 0$; 圆排列 C_{i_1}, \dots, C_{i_n} 左端的圆的平行于 y 轴的左切线的横坐标等于 $\min_k (x_{i_k} - R_{i_k})$, 其中 $k=1, \dots, n$; 同时, 该圆排列中右端的圆的平行于 y 轴的右切线的横坐标等于 $\max_k (x_{i_k} + R_{i_k})$, 其中 $k=1, \dots, n$ 。

4) $P=T/Q$.

显然, $Q \subseteq T$, $P \subseteq T$, $Q \cup P = T$, $Q \cap P = \emptyset$.

设 $w = (i_1, \dots, i_n) \in S$, 记 $L(w)$ 为模型

$$\left. \begin{array}{l} \min_{x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \dots \leq x_{i_n}} \{ \max_k (x_k + R_k) - \min_k (x_k - R_k) \}, \\ \text{s. t. } \sqrt{(x_{i_p} - x_{i_q})^2 + (R_{i_p} - R_{i_q})^2} \geq R_{i_p} + R_{i_q}, \\ p = 1, \dots, n; \quad q = 1, \dots, n; \quad p \neq q \end{array} \right\}$$

的最优值. 为了表述方便, 记 $D = \{ (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \mid x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \dots \leq x_{i_n}, \sqrt{(x_{i_p} - x_{i_q})^2 + (R_{i_p} - R_{i_q})^2} \geq R_{i_p} + R_{i_q}, p=1, \dots, n; q=1, \dots, n; p \neq q \}$, 将模型(1)简化表示为

$$\left. \begin{array}{l} \max L(w), \quad \text{s. t. } w = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in S, \\ (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \in \arg \min_{(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in D} \{ \max_k (x_k + R_k) - \min_k (x_k - R_k) \}. \end{array} \right\} \quad (2)$$

2 圆排列包装问题的最优解的性质

定理 1 模型(2)中的所有最优解中必存在一个最优解 l , 使得该最优解对应的圆排列的圆心的横坐标构成的向量属于 L .

证明 (反证法) 假设 $w = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in S$, w 对应的圆排列为 $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_n}$, 其对应的圆的圆心的横坐标分别为 $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$, 满足 $x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \dots \leq x_{i_n}$, $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \in \mathbf{R}^n$, w 为模型(2)的任意一个最优解, 但 $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \notin T$. 由于 $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \notin T$, 则必有如下两种情形之一.

情形 1 圆排列 $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_n}$ 中圆 C_{i_k} 与前面的所有圆都不相切, 如图 1(a) 所示.

将圆 C_{i_k} 和其后面的圆向左平移相同的位移, 使得圆 C_{i_k} 与其前面的某个圆 C_{i_j} ($1 \leq j \leq k-1$) 相切, 得到新的圆排列 $C'_{i_1}, C'_{i_2}, \dots, C'_{i_n}$, 其对应的圆的横坐标 $x'_{i_1}, x'_{i_2}, \dots, x'_{i_n}$, 满足 $x'_{i_1} \leq x'_{i_2} \leq \dots \leq x'_{i_n}$, 且新圆排列长度比原来的圆排列 $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_n}$ 长度小, 从而有

$$(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \notin \arg \min_{(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in D} \{ \max_k (x_k + R_k) - \min_k (x_k - R_k) \}.$$

这与假设矛盾.

情形 2 存在圆 $C_{i_{k-1}}, \dots, C_{i_j}$, $j \geq k+1$, 使得圆 $C_{i_{k-1}}$ 与圆 C_{i_j} 相切, 圆 $C_{i_{k-1}}, \dots, C_{i_{j-1}}$ 中不在两端的圆与相邻的两个圆两两相切, 圆 $C_{i_{j-1}}$ 与圆 C_{i_j} 不相切, 如图 1(b) 所示.

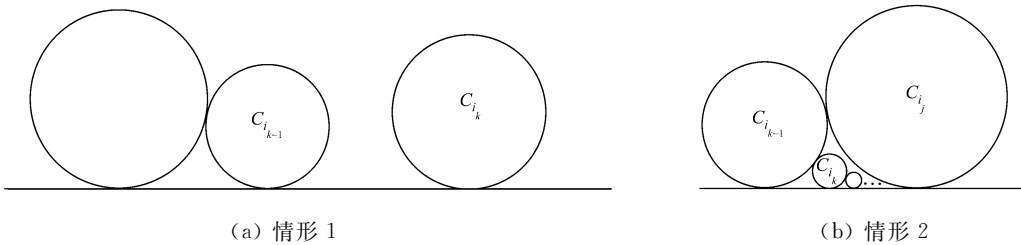


图 1 圆排列

Fig. 1 Circle permutation

寻找 $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_n}$ 中位于两个相切大圆所围成的空隙中的小圆, 取出这些圆中最大的圆, 将其排在所有圆的右端, 使得其与前面的某个圆相切, 再在新的圆排列中重复上面操作, 直到没有一个圆位于两个相切圆的空隙中为止, 得到新圆排列 $C_{k_1}, C_{k_2}, \dots, C_{k_n}$. 显然, 该新圆排列不是两端的圆与相邻的圆两两相切, 且长度 $L(k_1, k_2, \dots, k_n) \geq L(i_1, i_2, \dots, i_n)$ 及 $(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}) \in T$, 故 (k_1, k_2, \dots, k_n) 为模型(2)的一个最优解, 且 $(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}) \in T$, 这与假设矛盾.

综上所述,假设不成立,故定理得证.

3 模型的转化及求解

由定理 1 可知:集合 T 必存在模型(2)的一个最优解 l ,使得对应圆心的横坐标向量 $(x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n}) \in T$. 因此,对模型(2)可进一步转化为

$$\left. \begin{aligned} &\max L(w), \\ &\text{s. t. } w = (i_1, i_2, \cdots, i_n) \in S, \\ &\quad (x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n}) \in T. \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

对于模型(3),得到了如下主要结果.

定理 2 $l=(n, n-1, n-2, \cdots, 3, 2, 1)$ 为模型(3)的一个最优解.

为了证明定理 2,先求解下面的模型,即

$$\left. \begin{aligned} &\max p(w) = a_{w_1}^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} a_{w_i} a_{w_{i+1}} + a_{w_n}^2, \\ &\text{s. t. } w = (w_1, w_2, \cdots, w_n) \text{ 是 } 1, \cdots, n \text{ 的任一 } n \text{ 级排列.} \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

其中: $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, a_1 < a_n$.

对于模型(4),有如下定理.

定理 3 $l=(n, n-1, n-2, \cdots, 3, 2, 1)$ 为模型(4)的一个最优解.

为了证明定理 3,先给出一些引理及定义.

易证如下 3 个引理成立:

引理 1 设 $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$,则有 $a_1 a_2 + a_3 a_4 \geq a_1 a_3 + a_2 a_4 \geq a_1 a_4 + a_2 a_3$.

引理 2 设 $a_1 \leq a_2 \leq a_3$,则有 $a_1^2 + 2a_2 a_3 \geq a_2^2 + 2a_1 a_3, a_3^2 + 2a_1 a_2 \geq a_2^2 + 2a_1 a_3$.

引理 3 设 $a_1 \leq a_2 < a_3$,则有 $a_3^2 + 2a_1 a_2 > a_2^2 + 2a_1 a_3$.

定义 2 在 $1, \cdots, n$ 的排列 $(j_1, \cdots, j_{r-1}, j_r, \cdots, j_{s-1}, j_s, j_{s+1}, \cdots, j_n)$ 中,将其中两个数 j_r 与 j_s 之间的所有的数(包含这两个数)反向排列,这种构造新排列的操作方式,称为反向操作. 设 $(j_1, \cdots, j_{r-1}, j_r, \cdots, j_{s-1}, j_s, j_{s+1}, \cdots, j_n)$ 是 $1, \cdots, n$ 的一个排列,称 $(j_1, \cdots, j_{r-1}, j_s, j_{s-1}, \cdots, j_{r+1}, j_r, j_{s+1}, \cdots, j_n)$ 是 $(j_1, \cdots, j_{r-1}, j_r, \cdots, j_{s-1}, j_s, j_{s+1}, \cdots, j_n)$ 由 j_r 与 j_s 经过反向操作得到的排列. 如,排列 $(j_1, \cdots, j_6) = (3, 2, 5, 1, 6, 4)$,则 (j_1, \cdots, j_6) 是由 j_2 与 j_5 经过反向操作得到的排列是 $(3, 6, 1, 5, 2, 4)$.

下面给出关于模型(4)最优解的性质的若干引理.

引理 4 模型(4)的最优解中一定存在一个 n 级排列 $l=(l_1, l_2, \cdots, l_n)$,使得 $l_1=n$.

证明 (反证法)假设命题不成立,则设 $l=(l_1, l_2, \cdots, l_n)$ 为模型(4)的任一最优解,其中 $l_i=n, i \neq 1$.

当 $i=n$ 时,构造 $l'=(l'_1, l'_2, \cdots, l'_n)$,则 $p(l)=p(l')$,故 l' 也为最优解,且 $l'_i=n$. 这与假设矛盾.

当 $1 < i < n$ 时,不妨设 $l_1 \geq l_n$,否则,令 $l''=(l_n, l_{n-1}, \cdots, l_1)$,显然, l'' 为模型(4)的一最优解. 由假设可知: $a_{l_1} < a_{l_{i+1}}$ 成立;若不然,令 l' 为 l 由 l_1 与 l_i 经反向操作得到的 n 级排列,即

$$l' = (l'_1, \cdots, l'_n) = (l_i, l_{i-1}, \cdots, l_2, l_1, l_{i+1}, \cdots, l_n),$$

则 $l'_1=n, p(l')-p(l)=(a_i^2+2a_{l_1}a_{l_{i+1}})-(a_1^2+2a_{l_i}a_{l_{i+1}})$.

由于 $a_{l_1} \geq a_{i+1}$,由引理 2 可得 $(a_i^2+2a_{l_1}a_{l_{i+1}}) \geq (a_1^2+2a_{l_i}a_{l_{i+1}})$. 即 $p(l') \geq p(l)$,故 l' 为最优解,且 $l'=n$. 这与假设矛盾.

接下来,可得 $a_{l_1} < a_{l_{i+2}}$ 成立;若不然,令 t 为 l 由 l_1 与 l_{i+1} 经反向操作得到的 n 级排列,即

$$\begin{aligned} t &= (t_1, t_2, \cdots, t_n) = (l_{i+1}, l_i, \cdots, l_1, l_{i+2}, \cdots, l_n), \\ p(t) - p(l) &= (a_{i+1}^2 + 2a_{l_i}a_{l_{i+2}}) - (a_1^2 + 2a_{l_{i+1}}a_{l_{i+2}}). \end{aligned}$$

因为 $a_{l_{i+2}} \leq a_{l_1} < a_{l_{i+1}}$,由引理 3 得 $p(t) > p(l)$. 这与 l 为模型(4)的一最优解矛盾.

同理依次可得 $a_{l_1} < a_{i+3}, a_{l_1} < a_{i+4}, \cdots, a_{l_1} < a_{l_{n-2}}, a_{l_1} < a_{l_{n-1}}$,因此, $a_{l_n} \leq a_{l_1} < a_{l_{n-1}}$.

令 t' 为 l 由 l_1 与 l_{n-1} 经反向操作得到的 n 级排列,即

$$t' = (t'_1, \cdots, t'_n) = (l_{n-1}, l_{n-2}, \cdots, l_2, l_1, l_n),$$

$$p(t') - p(l) = (a_{l_{n-1}}^2 + 2a_{l_1}a_{l_n}) - (a_{l_1}^2 + 2a_{l_{n-1}}a_{l_n}).$$

由于 $a_{l_n} \leq a_{l_1} < a_{l_{n-1}}$, 由引理 3 得 $p(t') > p(l)$. 这与 l 为模型(4)的一最优解矛盾.

综上所述,假设不成立,故引理 4 得证.

引理 5 记 $T_{w_1, \dots, w_k} = \{\omega | \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \text{ 为 } 1, \dots, n \text{ 的一个 } n \text{ 级整数排列, 且 } (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k) = (n, n-1, n-k+1)\}$, 则 $\max_{v \in T_{w_1, \dots, w_k}} p(\omega)$ 的最优解中存在一个 n 级排列 $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$, 使得 $(l_1, l_2, \dots, l_k, l_{k+1}) = (n, n-1, \dots, n-k+1, n-k)$.

证明 设 $v = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ 为 $\max_{v \in T_{w_1, \dots, w_k}} p(\omega)$ 的一个最优解. 由已知, 存在 $m > k$, 使得 $\omega_m = n-k$.

当 $m = n$ 时, 令 $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ 为由 ω_{k+1} 与 ω_n 经反向操作得到的 n 级排列, 即 $l = (\omega_1, \dots, \omega_k, \omega_n, \omega_{n-1}, \dots, \omega_{k+1})$, 而 $p(l) - p(v) = (a_{\omega_{k+1}}^2 + 2a_{\omega_n}a_{\omega_k}) - (a_{\omega_n}^2 + 2a_{\omega_k}a_{\omega_{k+1}})$.

又因为 $a_{\omega_k} \geq a_{\omega_n} \geq a_{\omega_{k+1}}$, 由引理 2 可得 $p(l) \geq p(v)$, 故 l 为 $\max_{v \in T_{w_1, \dots, w_k}} p(\omega)$ 的一个最优解且满足 $(l_1, l_2, \dots, l_k, l_{k+1}) = (n, n-1, \dots, n-k+1, n-k)$.

当 $k < m < n$ 时, 令 $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ 为由 ω_k 与 ω_m 经反向操作得到的 n 级排列, 即 $l = (\omega_1, \dots, \omega_k, \omega_m, \dots, \omega_{k+1}, \omega_{m+1}, \omega_n)$, 而 $p(l) - p(v) = 2(a_{\omega_k}a_{\omega_m} + a_{\omega_{k+1}}a_{\omega_{m+1}}) - 2(a_{\omega_k}a_{\omega_{k+1}} + a_{\omega_m}a_{\omega_{m+1}})$.

又因为 $a_{\omega_k} \geq a_{\omega_m} \geq a_{\omega_{k+1}}$ 及 $a_{\omega_k} \geq a_{\omega_m} \geq a_{\omega_{m+1}}$, 由引理 1 可得 $p(l) \geq p(v)$, l 为 $\max_{v \in T_{w_1, \dots, w_k}} p(\omega)$ 的一个最优解且满足 $(l_1, l_2, \dots, l_k, l_{k+1}) = (n, n-1, \dots, n-k+1, n-k)$.

综上, 引理 5 成立. 下面证明定理 3.

证明 首先证明如下的命题 1 成立.

命题 1 模型(4)的最优解中一定存在 $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$, 使得 $(l_1, l_2, \dots, l_j) = (n, n-1, \dots, n-(j-1))$, 其中 $j = 1, 2, \dots, n$.

(数学归纳法) 当 $j = 1$ 时, 由引理 4 直接可得命题 1 成立.

假设当 $j = s (s < n)$ 时, 命题 1 成立, 则模型(4)的最优解中一定存在一个最优解 $l^{(0)} = (l_1^{(0)}, l_2^{(0)}, \dots, l_n^{(0)})$, 使得 $(l_1^{(0)}, l_2^{(0)}, \dots, l_j^{(0)}) = (n, n-1, \dots, n-(j-1))$.

当 $j = s+1$ 时, 由引理 5 知存在 $l^{(1)} = (l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, \dots, l_n^{(1)})$, 使得 $(l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, \dots, l_s^{(1)}, l_{s+1}^{(1)}) = (n, n-1, \dots, n-(j-1), n-j) = (n, n-1, \dots, n-(j-1), n-[(j+1)-1])$.

由数学归纳法可知命题 1 成立. 令 $j = n$, 则知定理 3 成立.

应用模型(4)的结果, 即定理 3 来证明定理 2.

定理 2 的证明 先证命题 2 成立.

命题 2 $l = (n, n-1, n-2, \dots, 3, 2, 1)$ 为 $\max_{v \in Q} L(v)$ 的一个最优解.

对任一 $v = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in Q$, 易得 $L(v) = R_{i_1} + \sum_{k=1}^{n-1} 2\sqrt{R_{i_k}R_{i_{k+1}}} + R_{i_n}$, 又因为 $l \in Q$, 故要证明命题 2 成立, 只需证明 $l = (n, n-1, \dots, 3, 2, 1)$ 为模型

$$\left. \begin{aligned} \max L(v) &= R_{i_1} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{R_{i_k}R_{i_{k+1}}} + R_{i_n}, \\ \text{s. t. } v &= (i_1, i_2, \dots, i_n) \in S \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

的一个最优解.

对模型(5), 令 $a_j = \sqrt{R_j}$, 其中 $j = 1, \dots, n$, 故 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. 又令 $\omega_k = i_k$, 则有

$$R_{i_1} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{R_{i_k}R_{i_{k+1}}} + R_{i_n} = a_{i_1}^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} a_{i_k}a_{i_{k+1}} + a_{i_n}^2 = a_{\omega_1}^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} a_{\omega_k}a_{\omega_{k+1}} + a_{\omega_n}^2.$$

令 $p = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = a_{\omega_1}^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} a_{\omega_k}a_{\omega_{k+1}} + a_{\omega_n}^2$, 模型(5)可再次转化为

$$\left. \begin{aligned} \max p(\omega) &= a_{\omega_1}^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} a_{\omega_k}a_{\omega_{k+1}} + a_{\omega_n}^2, \\ \text{s. t. } \omega &= (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \text{ 是 } 1, \dots, n \text{ 的任一 } n \text{ 级排列.} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

模型(6)即为模型(4),依据定理 3,可得 $l=(n,n-1,n-2,\cdots,3,2,1)$ 为模型(4)的最优解,显然也是模型(5)的最优解,故命题 2 得证.

下面再证命题 3 成立.

命题 3 $l=(n,n-1,n-2,\cdots,3,2,1)$ 为 $\max_{v \in P} L(v)$ 的一个最优解.

设 $\omega=(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 为 $\max_{v \in P} L(v)$ 的一个最优解, (i_1,i_2,\cdots,i_n) 对应的圆排列为 $C_{i_1},C_{i_2},\cdots,C_{i_n}$,假设直线 $l_1: x=\min_k(x_{i_k},R_{i_k})$, 直线 $l_2: x=\min_k(x_{i_k},R_{i_k})$, 与 l_1 相切的圆为 C_{i_p} , 与 l_2 相切的圆为 C_{i_q} .

若 l_1 与 C_{i_p} 形成的空隙容纳了若干小圆,则将该空隙中的所有圆取出;若 l_2 与 C_{i_q} 形成的空隙容纳了若干小圆,则将该空隙中的所有圆取出. 设剩下的圆组成的圆排列为 $C_{j_1},C_{j_2},\cdots,C_{j_{m-1}},C_{j_m}$,显然, $(j_1,j_2,\cdots,j_m) \in Q$, 且 $L(j_1,j_2,\cdots,j_m)=L(i_1,i_2,\cdots,i_n)$.

将 $C_{j_1},C_{j_2},\cdots,C_{j_{m-1}},C_{j_m}$ 按半径非升序排列得到圆排列 $C_{t_m},C_{t_{m-1}},\cdots,C_{t_2},C_{t_1}$, 其中 $t_m \geq t_{m-1} \geq \cdots \geq t_1$. 由命题 1 得 $L(t_m,t_{m-1},\cdots,t_1) \geq (j_1,j_2,\cdots,j_m)$, 又易知 $L(n,n-1,\cdots,2,1) \geq L(t_m,t_{m-1},\cdots,t_1)$. 所以, $L(n,n-1,\cdots,2,1) \geq L(t_m,t_{m-1},\cdots,t_1) \geq L(j_1,j_2,\cdots,j_m)=L(i_1,i_2,\cdots,i_n)$, 故 $l=(n,n-1,\cdots,3,2,1)$ 为 $\max_{v \in P} L(v)$ 的一个最优解. 从而命题 3 成立.

由命题 2 及命题 3 易知定理 2 成立.

4 应用举例

例 1 考虑 C_1,C_2,\cdots,C_{10} 构成的圆排列, 设 C_1,C_2,\cdots,C_{10} 的半径依次为 R_1,\cdots,R_{10} . 其中: $R_1=150,R_2=83,R_3=81,R_4=78,R_5=75,R_6=65,R_7=63,R_8=58,R_9=46,R_{10}=40$, 则最优圆排列为 $C_{10},C_9,\cdots,C_2,C_1$, 最优值为 $L=R_1+2\sum_{i=1}^9\sqrt{R_iR_{i+1}}+R_{10}=1\,466.7$.

参考文献:

[1] 宋海洲,魏旭真. 求解 0-1 背包问题的混合遗传算法[J]. 华侨大学学报:自然科学版,2006,27(1):17-19.
[2] 徐强,宋海洲,田朝薇. 解 TSP 问题的蚁群算法及其收敛性分析[J]. 华侨大学学报:自然科学版,2011,32(5):589-591.
[3] 王晓东. 计算机算法设计与分析[M]. 北京:电子工业出版社,2001:179-181.
[4] 高尚,杨靖宇,吴晓俊,等. 圆排列问题的蚁群模拟退火算法[J]. 系统工程理论与实践,2004(8):102-106.
[5] 章义刚,贾瑞玉,张燕平,等. 快速蚁群算法求解圆排列问题[J]. 计算机技术与发展,2007,17(8):48-50.
[6] 章义刚,王会颖. 改进蚁群算法求解圆排列问题[J]. 机电工程,2008,25(5):92-95.

Solving Circle Permutation Packing Problem

YANG Jin-yong, SONG Hai-zhou

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: A research on circle permutation packing problem is considered, and the model of circle permutation packing problem and its simplified form are given. By researching the propertie of optimization in circle permutation packing problem, the model of the problem is further converted into a relatively easy solving mathematical model, and the theorem about its optimization and its proof are given. The theorem shows that a circle permutation according to the radius size in descending order, in which every double adjacent rounds touch at each other, is an optimal circle permutation of circle permutation packing problem.

Keywords: circle permutation; packing problem; touch at each other; sequence permutation; reverse operation

(责任编辑: 钱筠 英文审校: 黄心中)