

文章编号: 1000-5013(2013)02-0130-04

基于离散元的多分辨率信号去噪新方法

张江源, 林福泳

(华侨大学 机电及自动化学院, 福建 厦门 361021)

摘要: 通过构造离散基,应用多分辨率分析的方法,对噪声信号进行去噪处理. 所提出方法的离散基能够显式表示,且具有对称性等特点,通过循环矩阵求逆矩阵的方法,可以使计算量大大降低. 对比不同的去噪方法,并分别从信噪比(SNR)和均方误差(MSE)两个方面对信号去噪效果进行评估. 实验结果表明:相对小波分析方法而言,该方法在信号去噪方面表现出较好的特性,去噪效果明显,离散基系数在 0.75 附近达到较好的信噪比及均方误差.

关键词: 离散元; 多分辨率分析; 小波分析; 信号滤波

中图分类号: TN 911.4

文献标志码: A

实际工况中得到的信号大都是含噪信号,受噪声影响,直接对采集信号进行分析处理是不精确的,为了对信号进行较准确分析,需要将有效信号从含噪信号中提取出来,从而达到信号去噪的目的^[1]. 多分辨率分析是小波分析的重要内容,是目前小波分析的重要应用之一. 它之所以重要在于它可以多层次地分解描述信号,并能由细到粗地分析信号,便于提取信号的细微特征,从而检测出突变信号^[2-3]. 多分辨率分析能够有效地提取信号的稳态及瞬态信息和波形特征,有效地区分信号中的突变部分和噪声部分,因此适用于信号处理^[4]. 小波信号去噪方法大体上可分为 3 种:1) Mallat 等^[5]提出的基于小波变换的模极大值去噪方法;2) Donoho^[6]提出的基于小波阈值滤波的去噪方法;3) 对含噪信号进行小波变换后,计算相邻尺度间小波系数的相关性,并根据相关性分析不同的小波系数,从而进行取舍,然后直接重构信号^[7-8]. 本文提出一种基于离散基的多分辨率信号去噪新方法,对噪声信号进行去噪处理.

1 离散基的定义

设函数 $\varphi(x-i)$ 为离散基条件为

$$\begin{aligned}\varphi(x-i) = & a\delta(x-i) + \frac{1}{2}(\delta(x-i+1) + \delta(x-i-1)) + \\ & \frac{(1-a)}{2}(\delta(x-i+2) + \delta(x-i-2)).\end{aligned}\quad (1)$$

式(1)中: $\delta(x) = \begin{cases} 1, & x=0, \\ 0, & \text{其余;} \end{cases}$ a 为离散基系数.

另设与离散基 $\varphi(x-i)$ 相对应的误差基函数 $\Psi(x-i)$ 为

$$\begin{aligned}\Psi(x-i) = & a\delta(x-i-1) + \frac{1}{2}(\delta(x-i) + \delta(x-i-2)) + \\ & \frac{(1-a)}{2}(\delta(x-i+1) + \delta(x-i-3)).\end{aligned}\quad (2)$$

于是有

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Psi(k-2i)\varphi(k-2j) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

收稿日期: 2012-4-20

通信作者: 林福泳(1959-),男,教授,主要从事图像处理、工程计算和功率电子的研究. E-mail: fylin@hqu.edu.cn.

2 基于多分辨率分析的信号去噪

2.1 多分辨率分析

设信号数据为 a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , 将信号扩为 $2n-2$ 的周期信号, 即有

$$a_{i+n} = a_{n-i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2, \quad (4)$$

$$f(x) = a_0 \delta(x) + a_1 \delta(x-1) + \dots + a_{2n-2} \delta(x-2n+2) + a_{2n-3} \delta(x-2n+3). \quad (5)$$

应用离散基将 $f(x)$ 分解为基本信号 $f_1(x)$ 和误差信号 $e_1(x)$, 得

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \varphi(x-2i) + \sum_{i=0}^{n-1} d_i \Psi(x-2i) = f_1(x) + e_1(x). \quad (6)$$

将式(6)的两边乘以 $\Psi(x-2i)$ 并对各点求和, 结合式(3), 可得

$$\sum_{k=0}^{2n-3} \Psi(k-2j) f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} d_i \sum_{k=0}^{2n-3} \Psi(k-2i) \Psi(k-2j), \quad (7)$$

代入式(2), 可得

$$e_j = \sum_{i=0}^{n-1} d_i w_{i-j}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (8)$$

用循环矩阵求逆矩阵的方法^[9], 可以得到递推公式, 进而求得 d_i , 最后得到误差为

$$\left. \begin{aligned} e_{2i+1} &= ad_i + \frac{1-a}{2}(d_{i+1} + d_{i-1}), \\ e_{2i} &= -\frac{1}{2}(d_i + d_{i-1}). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

将信号 $f(x)$ 减去误差信号, 即得到基本信号: $a'_0, a'_1, \dots, a'_{2n-2}$.

选择 $a'_0, a'_1, \dots, a'_{2n-2}$ 的偶数数据 $a'_0, a'_2, \dots, a'_{2n-2}$ 为下一组信号 $a_0^1, a_1^1, \dots, a_{n-1}^1$, 即

$$a_i^1 = a'_{2i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

重复上述过程, 即得到数据分解过程为

$$f(x) \Rightarrow \begin{cases} e_1(x), \\ f_1(x) \Rightarrow \begin{cases} e_2(x), \\ f_2(x) \Rightarrow \dots \end{cases} \end{cases} \quad (10)$$

多分辨率重构算法是其分解算法的逆过程, 其数据重构过程为

$$\left. \begin{aligned} f_n(x) \\ e_n(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} f_{n-1}(x) \\ e_{n-1}(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dots \Rightarrow \left. \begin{aligned} f_1(x) \\ e_1(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x). \quad (11)$$

2.2 阈值法去噪

若要从含噪信号中去除噪声信号, 可分为 3 个步骤.

1) 信号分解. 设噪声信号为 $f(t)$, $s(t)$ 是纯净信号, $n(t)$ 为高斯白噪声, 则有

$$f(t) = s(t) + n(t).$$

将噪声信号 $f(t)$ 进行多分辨率分解至确定层数, 得到相应的误差系数 $e_{j,k}$.

2) 误差系数处理. 对分解的误差系数进行阈值处理, 得到误差系数的估计值 $\hat{e}_{j,k}$. 设定阈值 $r_{th} =$

$\sqrt{2 \cdot \log n \cdot \sigma}$, 采取阈值去噪的方法, 通过大量实验统计, 得到一个较合理的固定阈值, 即

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1.4r_{th}, & \lambda_2 = 1.1r_{th}, & \lambda_3 = 0.3r_{th}, \\ \lambda_4 = 0.2r_{th}, & \lambda_5 = 0.1r_{th}. \end{cases}$$

a) 软阈值函数

$$\hat{e}_{j,k} = \begin{cases} \text{sign}(e_{j,k}) \cdot |e_{j,k} - \lambda_i|, & |e_{j,k}| \geq \lambda_i, \\ 0, & |e_{j,k}| < \lambda_i. \end{cases} \quad (12)$$

b) 硬阈值函数

$$\hat{e}_{j,k} = \begin{cases} e_{j,k}, & |e_{j,k}| \geq \lambda_i, \\ 0, & |e_{j,k}| < \lambda_i. \end{cases} \quad (13)$$

3) 信号重构. 将经过阈值处理过的误差系数进行信号重构, 得到恢复的原始信号的估计值, 即去噪后的信号^[10].

3 实验与分析

3.1 不同滤波方法的比较

应用多分辨率信号去噪方法, 取适当的离散基数, 对加噪信号进行 5 层分解, 并与 Matlab 小波工具箱采用最佳系数及分解层数组合的小波基^[11]进行比较. 其中, SNR 为信噪比; MSE 为均方误差. haar 做 3 层分解; db 做 3 层分解, 消失矩取 1; sym 做 3 层分解, 消失矩取 2. 分别对 Bumps 和 Doppler 加噪信号 (SNR=15 dB) 进行去噪处理, 并用软阈值法去噪, 实验结果如表 1 所示.

从表 1 可以看出: 用本文方法可以更好地去除噪声, 细节损失较少, 波形光顺性较好, 更逼近原始信号. 从表 1 还可知: 本文方法在去噪处理中, 可以获得更高的信噪比和更小的均方误差, 信噪比和均方误差等性能指标较传统滤波方法均有明显提高.

表 1 对 Bumps 和 Doppler 加噪信号滤波后的数据
Tab. 1 Filtered data of the Bumps and Doppler noise signal

去噪方法	Bumps		去噪方法	Doppler	
	SNR/dB	MSE		SNR/dB	MSE
加噪信号	15.000	0.799 20	加噪信号	15.000	0.700 02
haar	21.004	0.401 05	haar	18.790	0.450 78
db	21.458	0.380 40	db	18.445	0.469 05
sym	21.539	0.376 83	sym	19.796	0.401 30
离散元多分辨率 去噪($\alpha=0.93$)	21.587	0.372 33	离散元多分辨率 去噪($\alpha=0.75$)	21.873	0.314 58

3.2 不同离散基系数的比较

应用离散元多分辨率信号去噪方法, 取离散基数(α)为 0.55, 0.65, 0.75, 0.85, 0.95, 1.05, 1.15, 分别对 Bumps, Doppler 加噪信号 (SNR=15 dB) 进行 5 层小波分解, 并分别用软阈值法、硬阈值法去噪, 实验结果如表 2 所示.

表 2 取各离散基数对 Bumps 和 Doppler 加噪信号滤波后的数据
Tab. 2 Filtered data of the Bumps and Doppler noise signal by each discrete base coefficient

α	Bumps				Doppler			
	SNR/dB		MSE		SNR/dB		MSE	
	软阈值法	硬阈值法	软阈值法	硬阈值法	软阈值法	硬阈值法	软阈值法	硬阈值法
0.55	17.925	18.093	0.573 90	0.563 20	19.152	19.535	0.432 80	0.413 28
0.65	19.886	19.832	0.456 08	0.459 02	21.661	20.998	0.323 06	0.347 18
0.75	20.807	19.538	0.410 35	0.475 99	21.873	20.864	0.314 58	0.354 43
0.85	21.143	19.337	0.393 84	0.487 68	21.495	20.132	0.328 93	0.384 78
0.95	21.318	19.096	0.385 47	0.501 65	21.061	19.951	0.346 14	0.391 25
1.05	21.298	18.782	0.386 43	0.519 37	20.734	19.607	0.359 21	0.407 47
1.15	21.200	18.757	0.391 12	0.520 96	20.620	19.415	0.363 95	0.416 59

从表 2 中的数据发现: 采用硬阈值法去噪后, 信噪比及均方误差较平均, 但最佳值不如软阈值法; 采用软阈值法去噪后, 信噪比及均方误差波动较大, 但最佳值优于硬阈值法. 比较各离散基系数的去噪结果可知, 文中方法的离散基数在 0.75 附近达到较好的信噪比及均方误差等性能指标.

4 结论

本文提出一种信号去噪方法, 其基本原理基于最小二乘法. 所提出的离散基具有显式表示, 可以按照实际需要, 改变离散基, 因此方便于应用. 通过对加噪信号进行去噪处理, 实验表明: 该方法可以有效地保留信号中更多的有效成分, 信噪比和均方误差等性能指标较传统滤波方法均有明显提高, 是一种有

效的信号去噪新方法.

参考文献：

[1] 张明,李开成,胡益胜. 基于小波邻域阈值分类的电能质量信号去噪算法[J]. 电力系统自动化,2010,34(10):84-89.
[2] 林福泳,王太勇. 一种信号多辨分析的新方法[J]. 西南交通大学学报,2003,38(5):574-577.
[3] 林福泳. 正交样条的多分辨分析方法[J]. 华侨大学学报:自然科学版,2005,26(2):180-183.
[4] 王睿,山拜·达拉拜. 一种新阈值函数的小波信号去噪研究[J]. 通信技术,2011,44(1):50-52.
[5] MALLAT S,HWANG W L. Singularity detection and processing with wavelets[J]. IEEE Transactions on Information Theory,1992,38(2):617-643.
[6] DONOHO D L. De-noising by soft thresholding[J]. IEEE Transactions on Information Theory,1995,41(3):613-627.
[7] DAUBECHIES I. The wavelet transform, time frequency localization and signal analysis[J]. IEEE Transactions on Information Theory,1990,36(5):961-1005.
[8] DONOHO D L,JOHNSTONE I M. Ideal spatial adtation via wavelet shrinkage[J]. Biometrika,1994,81(1):425-455.
[9] LIN Fu-yong. The inverse of circulant matrix[J]. Applied Mathematics and Computation,2011,217(21):8495-8503.
[10] BRUCE A G,GAO Hong-ye. Understanding wave shrink: Variance and bias estimation[J]. Biaretrika,1996,83(4):727-745.
[11] 张恒,李安宗,屈景辉. 无线随钻测量系统信号处理的小波基选取[J]. 测井技术,2007,31(3):285-288.

A New Method of Signal De-Noiseing by Multi-Resolution
Analysis Based on Discrete Element

ZHANG Jiang-yuan, LIN Fu-yong

(College of Mechanical Engineering and Automation, Huaqiao University, Xiamen 361021, China)

Abstract: By constructing a discrete base, multi-resolution analysis methods are applied to denoise the noise signal. The proposed method of discrete base can be explicitly represented, and has symmetric characteristics. The calculation is greatly reduced through the cycle matrix inverse matrix method. Comparing different denoising methods, the signal de-noising effect is assessed from two aspects of signal-to-noise ratio (SNR) and mean square error (MSE). Experimental results indicate that this method shows good characteristics in signal denoising aspect relative to wavelet analysis method. Denoising effect is obvious, and can achieve good signal-to-noise ratio and mean square error when discrete base coefficient is near 0.75.

Keywords: discrete element; multi-resolution analysis; wavelet analysis; signal filtering

(责任编辑：黄晓楠 英文审校：杨建红)