第 34 卷 第 1 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 34 No. 1
2013 年 1 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan. 2013

文章编号: 1000-5013(2013)01-0118-03

具有源的牛顿渗流方程解的存在性的一些补充

张培欣

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 讨论一类具有源的 Newton 渗流方程 Cauchy 问题 $u_t=\Delta u^m-\lambda u^p$, $(x,t)\in S_T=R^N\times(0,T)$解的非存在性.采用反证法,证明在一定条件下方程不存在非平凡解.

关键词: 渗流方程; Cauchy 问题; 非存在性; 反证法

中图分类号: O 175.26 **文献标志码:** A

1 预备知识

讨论下列 Cauchy 问题解的存在性问题,即

$$u_t = \Delta u^m - \lambda u^p, \qquad (x,t) \in S_T = R^N \times (0,T), \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in R^N/\{0\}. \tag{2}$$

式(1),(2)中:$N\geqslant 3$,$p>0$,$\lambda>0$.文中所采用类似文献[1]的方法,讨论方程(1)在 $0<m<1-2/N(N\geqslant 3)$解的非存在性.

许多物理现象都可以用非线性扩散方程 $u_t=\Delta u^m-\lambda u^p$ 来描述,该方程称为 Newton 渗流方程或多孔介质方程. 当 $m>1$ 时方程具有退化性,而当 $m<1$ 时具有奇异性;方程中非线性项 λu^p 描述扩散过程中的非线性源,当 $\lambda>0$ 时称"冷源",当 $\lambda<0$ 时称为"热源".对于常规渗流扩散方程($m=1$)、缓慢渗流扩散方程($m>1$)和快速渗流扩散方程($(1-2/N)^+<m<1$)解的存在性问题,已在相应的文献[2-4]中得到了证明,也就是问题(1),(2)在 $1<p<m+2/N$ 时有一个满足初始条件

$$u(x,0) = \delta(x) \tag{3}$$

的解. 这里 $\delta(x)$表示中心在原点的狄拉克函数.另外,在文献[4-5]中也证明了在以上条件满足的情况下,问题(1),(2)有一个非常奇异解,即方程的解 w 还满足以下 3 点性质:

i) $w\in C(\overline{S}_T/\{(0,0)\})$;

ii) $w(x,0)=0, \forall x\in R^N/\{0\}$;

iii) $\lim\limits_{t\to 0^+}\int_{|x|<r} w(x,t)\mathrm{d}x = \infty, \forall r > 0$.

2 主要结果

定理 1 设 $0<m<1-2/N(N\geqslant 3)$, $p>mN/(N-2)$, $\lambda>0$,则 Cauchy 问题(1),(2)无解.

定义 1 Cauchy 问题(1),(2)的解 u 是定义在 S_T 中的一个非负函数,且满足下列条件:

1) 对 $\forall\tau(0,T)$,有 $u\in C(0,T;L^1(R^N))\cap C(S_T)\cap L^\infty(R^N\times(\tau,T))$;

2) 对 $\forall\xi\in C_0^2(S_T)$,有 $\iint_{S_T}(u\xi_t+u\Delta\xi-\lambda u^p\xi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0$;

收稿日期: 2011-12-16

通信作者: 张培欣(1979-),男,讲师,主要从事偏微分方程中椭圆抛物方程的研究. E-mail:zhpx@hqu.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11001090);中央高校基本科研业务费及国务院侨办科研基金资助项目(11QZR16)

3）对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(R^N)$，有 $\lim\limits_{t\to 0}\int_{R^N} u(x,t)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0)$.

首先，证明下面两个引理.

引理 1　假设 $p>mN/(N-2)$，u 是 Cauchy 问题(1)，(2)的一个解，则对 $\forall r>0$ 有

$$\int_0^T\int_{|x|<r} u^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t < \infty, \tag{4}$$

且对 $\forall \xi\in C_0^2(S_T)$，有

$$\iint_{S_T}(u\xi_t + u^m\Delta\xi - \lambda u^p\xi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0. \tag{5}$$

证明　因为 $u\in C(0,T;L^1(R^N))$，且对 $\forall X\in C_0^\infty(R^N)$ 有

$$\lim_{t\to 0}\int_{R^N} u(x,t)X(x)\mathrm{d}x = X(0),$$

则由一致有界原则可知：$u\in L^\infty(0,T;L^1(R^N))$.

由解的定义，对任意的 $X\in C_0^\infty(R^N)$ 和 $\tau\in(0,T)$ 有

$$\begin{aligned}&\int_{R^N} u(x,T)X(x)\mathrm{d}x + \lambda\int_\tau^T\int_{R^N} u^pX(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_\tau^T\int_{R^N} u^m\Delta X\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{R^N} u(x,\tau)X(x)\mathrm{d}x \leqslant \\ &\left(\int_\tau^T\int_{R^N} |\Delta X|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1-m}\left(\int_\tau^T\int_{R^N} u|\Delta X|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^m + \int_{R^N} u(x,\tau)X(x)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{6}$$

当 $|x|<r$ 时，选择 $X(x)=1$；令 $\tau\to 0$，可以得到式(4).

设 $\varphi_k(x,t)=\eta_k(|x|^2)\xi(x,t)$. 其中：$\xi(x,t)\in C_0^\infty(R^N\times(-T,T))$，$\eta(s)\in C^\infty(R)$，且满足下面 3 个性质：

1）$0\leqslant\eta(s)\leqslant 1$；

2）若 $s\leqslant 1$，则 $\eta(s)=0$；

3）当 $s\geqslant 2$ 时 $\eta(s)=1$.

因此，定义 $\eta_k(s)=\eta(ks)$. 由于对 $\forall k>0$，$\varphi_k(x,t)$ 在原点(0，0)的一个邻域内变为 0，由解的定义可知 u 满足

$$\int_0^T\int_{R^N}(u\varphi_{kt} + u^m\Delta\varphi_k - \lambda u^p\varphi_k)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

因此，只需证明当 $k\to+\infty$ 时，有

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^T\int_{R^N} u^m\Delta\varphi_k\xi\mathrm{d}x\mathrm{d}t \to 0,\\ &\int_0^T\int_{R^N} u^m\nabla\eta_k\nabla\xi\mathrm{d}x\mathrm{d}t \to 0.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

记 $D_k=\{x|k^{-1}<|x|^2<2k^{-1}\}$，则有

$$|D_k| = \mathrm{mes}\, D_k \leqslant Ck^{-N/2}.$$

由赫尔德不等式和式(4)可得

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T\int_{R^N} u^m\Delta\eta_k\xi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| &\leqslant Ck\iint_{D_k} u^m\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant Ck\,|D_k|^{1-m/p}\left(\iint_{D_k} u^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{m/p} \leqslant \\ &Ck^{1-N/2(1-m/p)}\left(\iint_{D_k} u^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{m/p},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T\int_{R^N} u^m\nabla\eta_k\nabla\xi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| &\leqslant Ck^{1/2}\iint_{D_k} u^m\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant Ck^{1/2}\,|D_k|^{1-m/p}\left(\iint_{D_k} u^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{m/p} \leqslant \\ &Ck^{1/2-N/2(1-m/p)}\left(\iint_{D_k} u^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{m/p},\end{aligned}$$

显然，当 $p>\dfrac{mN}{N-2}$时，$1-\dfrac{N}{2}(1-\dfrac{m}{p})<0$. 因此当 $k\to+\infty$时，式(7)成立.

引理 2　设 $u\in C(0,T;L^1(R^N))$，$u\geqslant 0$，则对 $\forall\varphi\in C_0^\infty(R^N)$，有

$$\lim_{t\to 0}\int_{R^N} u(x,t)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0).$$

证明 设 $j(s)\in C_0^\infty(R)$, $j(s)\geqslant 0$;当 $|s|>1$ 时,$j(s)=0$, $\int_R j(s)\mathrm{d}s=1$. 对与 $h>0$,定义 $j_h(s)=h^{-1}j(s/h)$ 和 $\eta_h(s)=1-\int_{-\infty}^{t-\tau-2h} j_h(s)\mathrm{d}s$. 其中,$\tau\in(0,T)$是一个固定的数.

显然,$\eta_h(s)\in C_0^\infty(R)$,当 $t<\tau+h$ 时,$\eta_h(t)=1$,$0\leqslant\eta_h\leqslant 1$,而当 $t>\tau$ 时,有 $\lim\limits_{h\to 0}\eta_h(t)=0$. 对于 $\forall\varphi\in C_0^\infty(R^N)$,在式(4)中令 $\xi(x,t)=\varphi(x)\eta_h(t)$,则有

$$-\int_0^T\int_{R^N} j_h(t-\tau-2h)u\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{R^N}(u^m\eta_h\Delta\varphi-\lambda u^p\eta_h\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

令 $h\to 0$,可得到

$$\int_{R^N} u(x,\tau)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^T\int_{R^N}(u^m\Delta\varphi-\lambda u^p\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

于是由式(4)可以推导出

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{R^N} u(x,\tau)\varphi(x)\mathrm{d}x=0.$$

定理 1 的证明 (反证法[1])设 Cauchy 问题(1),(2)有解,由引理 1,2 可知,对于 $\forall\varphi\in C_0^\infty(R^N)$,有

$$\lim_{t\to 0}\int_{R^N} u(x,t)\varphi(x)\mathrm{d}x=0.$$

这与定义 1 矛盾,故定理得证.

参考文献:

[1] 杨金顺,赵俊宁.含吸附项发展的 p-Laplace 方程的注记[J].吉林大学自然科学学报,1995(2):35-38.

[2] BRÉZIS H,FRIEDMAN A. Nonlinear parabolic equations involving measures as initial condition[J]. J Math Pure et Appliquees,1983,62:73-97.

[3] KAMIN S,PELETIER L A. Source-type solutions of degenerate diffusion equations with absorption[J]. Israel J Math,1985,50(3):219-230.

[4] PELETIER L A,ZHAO Jun-ning. Source-type solutions of the porous media equation with absorption: The Fast Diffusion Case[J]. Nonlinear Appl,1990,14(2):107-121.

[5] WANG Shu-yan. On singular solutions of boundary value problems for quasilinear parabolic equations with absorption[J]. Northeast Math J,1997,13(3): 340-348.

Some Supplies to Souce-Type Solutions of the Porous Equations with Absorption

ZHANG Pei-xin

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Discuss the non-existence of solutions of the Cauchy problem for a kind of the Newton diffusion equations with source, $u_t=\Delta u^m-\lambda u^p$, $(x,t)\in S_T=R^N\times(0,T)$. By using reductio ad absurdum, we prove that under certain conditions, the equation does not exist non-trivial solutions.

Keywords: diffusion equations; Cauchy problem; non-existence; reductio ad absurdum

(**责任编辑**:钱筠 **英文审校**:黄心中)