

文章编号: 1000-5013(2013)01-0112-06

一类退化抛物型方程解的存在唯一性

潘 坚<sup>1,2</sup>, 王志焕<sup>1</sup>

(1. 华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021;  
2. 赣南师范学院 数学与计算机科学学院, 江西 赣州 341000)

摘要: 利用 Fichera 理论、极值原理和 Schauder 理论,通过构造恰当的辅助函数,证明 CIR(Cox,Ingersoll 和 Ross)模型下,利率衍生产品价格所满足的定解问题解的存在唯一性.

关键词: CIR 模型; Fichera 理论; 退化抛物型方程; 极值原理; Schauder 内估计; 存在性; 唯一性

中图分类号: O 212; F 224.7 文献标志码: A

利率期限结构模型是用来描述不同期限利率衍生产品的到期收益率和到期期限之间关系的数学模型,是对利率衍生产品定价和利率风险管理的一个不可缺少的工具. 为此,许多学者提出了不少利率模型来刻画利率的随机行为<sup>[1]</sup>. 1973 年, Merton 提出一个与股票价格的随机行为相类似的模型,即假定短期利率过程  $r_t$  服从几何 Brown 运动. 但是,利率与股价的行为模式之间存在着一定的差异,主要表现在利率具有均值回复的特性,即随着时间的推移,利率会呈现出向某个长期平均值收敛的趋势. 针对这一特性, Vasicek 在 1977 年提出了另一个利率模型,认为利率  $r_t$  以速率  $a$  被拉向  $b$  水平. 虽然 Vasicek 模型具有在定价和风险管理方面的简便性,但它有可能为负,与实际不相符. 为了克服 Vasicek 模型的缺陷, Cox, Ingersoll 和 Ross 在 1985 年提出一个具有均值回复特性的利率模型——CIR 模型<sup>[1]</sup>, 即

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t, \quad a > 0. \tag{1}$$

CIR 模型跟 Vasicek 模型一样,在通常情况下也有仿射结构解<sup>[1]</sup>, 即有精确的分析表达式,为利率衍生产品的定价和利率风险的管理提供了方便. 但目前国内外对该模型的理论研究还比较少,主要集中在实际应用中. Cox, Ingersoll 和 Ross 在 1985 年利用多元统计和随机分析的方法,只是得到了在到期日支付 1 单位的零息票债券价格的解析表达式<sup>[1]</sup>. 本文利用偏微分方程方法证明了市场利率基于 CIR 模型时,其衍生产品的价格所满足的定解问题解的存在唯一性.

1 利率衍生产品的定价模型

设利率  $r_t$  满足方程(1),利用  $\Delta$  对冲技巧和无套利原理可得到 CIR 模型下利率衍生产品的价格所满足的方程是退化抛物型方程<sup>[2]</sup>. 设  $\bar{V} = \bar{V}(r, t)$  为衍生产品的价格,则有

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} r \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial r^2} + a(b - r) \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} - r \bar{V} = 0. \tag{2}$$

为了求解方程(2),需要给出终值条件,而衍生产品的价格在到期日  $T$  的价值等于它的收益,即有  $\bar{V}(r, T) = \varphi(r)$ . 因此,要确定在有效期  $[0, T]$  内衍生产品的价格  $\bar{V}(r, t)$ , 就要在区域  $\Sigma: \{0 \leq r < +\infty, 0 \leq t \leq T\}$ , 上求解终值问题,有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} r \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial r^2} + a(b - r) \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} - r \bar{V} &= 0, \quad 0 < r < +\infty, \quad 0 \leq t < T, \\ \bar{V}(r, T) &= \varphi(r), \quad 0 \leq r < +\infty. \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

收稿日期: 2012-03-01  
通信作者: 潘坚(1979-),男,讲师,主要从事偏微分方程与金融数学的研究. E-mail: pan79610@163. com.  
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(NSF11061001); 江西省自然科学基金资助项目(2008GZS0025)

方程(2)在  $r=0$  时不是二阶方程, 即退化. 对于退化偏微分方程, 重要的问题在它的退化边界上的给值部分. 当利率  $r=0$  时, 其衍生产品的价格  $\bar{V}(0, t)$  可由偏微分方程的 Fichera 理论来考虑<sup>[3]</sup>. 为此, 引进 Fichera 函数, 用判别函数  $B(r, t)$  来判定边界给值的部分, 即

$$B(r, t) = [a(b-r) - \frac{\partial(\frac{\sigma^2 r}{2})}{\partial r}] \cos(\mathbf{n}, r) + [1-0] \cos(\mathbf{n}, t) = a(b-r) - \frac{\sigma^2}{2}. \quad (4)$$

式(4)中:  $\mathbf{n}$  是退化边界的内法向量. 当  $B(0, t) = ab - \frac{1}{2}\sigma^2 < 0$  时, 在  $r=0$  处给值; 而当  $B(0, t) = ab - \frac{1}{2}\sigma^2 \geq 0$  时, 在  $r=0$  处不要给值.

因此, 为了保证定解问题(3)解的唯一性, 当  $ab \geq \frac{1}{2}\sigma^2$  时,  $\bar{V}(0, t)$  不要给值. 不妨设  $\bar{V}(0, t)$  有界, 则  $\bar{V}(r, t)$  满足如下定解问题, 即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} r \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial r^2} + a(b-r) \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} - r \bar{V} &= 0, & 0 < r < +\infty, & 0 < t < T, \\ \bar{V}(r, T) &= \varphi(r), & 0 < r < +\infty, \\ \bar{V}(0, t) &= \text{有界}, & 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

定解问题(5)解的存在唯一性是研究的主要目的. 为此, 作自变量代换和函数代换  $\tau_0 = T-t, V(r, \tau_0) = \bar{V}(r, T-\tau_0)$ , 从而将定解问题(5)转化为退化抛物型方程的半 Cauchy 问题(为方便起见, 以下仍记  $\tau_0$  为  $t$ ), 则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} r \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + a(r-b) \frac{\partial V}{\partial r} + rV &= 0, & 0 < r < +\infty, & 0 < t \leq T, \\ V(r, 0) &= \varphi(r), & 0 < r < +\infty, \\ V(0, t) &= \text{有界}, & 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

## 2 解的存在性的证明

为了证明定解问题(6)解的存在性, 首先给出如下两个引理.

**引理 1**<sup>[4]</sup> (极值原理) 设函数  $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$  且  $|u(x, t)| \leq M \exp(\alpha_0 |x|^{2-\beta})$ ,  $(\alpha_0, \beta > 0)$  在  $Q_T = \Omega \times (0, T)$  内满足线性抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t) u = f(x, t).$$

其中:  $\Omega$  是有界区域,  $a(x, t) \geq a_0 > 0, c(x, t) \geq 0$ . 则当  $f(x, t) \leq 0$  时,  $u(x, t)$  的非负最大值只能在抛物边界  $\partial_p Q_T$  上达到.

**引理 2**<sup>[5]</sup> 假设有界区域  $\Omega$  具有外球性质且存在边界为  $C^\infty$  的子区域序列  $\{\Omega_k\}$ , 使得  $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$  且  $\Omega_k$  一致地逼近  $\partial\Omega$ . 又设  $0 < \alpha < 1, a_{i,j}, b_i, c, f \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{Q}_T), \varphi \in C(\bar{Q}_T), a_{i,j} = a_{j,i}$ , 且存在常数  $0 < \lambda \leq \Lambda$ , 使得  $\lambda |\zeta|^2 \leq a_{i,j}(x, t) \zeta_i \zeta_j \leq \Lambda |\zeta|^2$  对任意的  $\zeta \in \mathbf{R}^n, (x, t) \in Q_T$  成立. 则问题

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a_{i,j}(x, t) D_{i,j} u + b_i(x, t) D_i u + c(x, t) u &= f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u(x, t) &= \varphi(x, t), & (x, t) \in \partial_p Q_T \end{aligned} \right.$$

存在古典解, 即  $u \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ .

为了证明定解问题(6)解的存在性, 作函数变换  $V(r, t) = \exp(\beta t + kr) P(r, t)$ , 其中  $k, \beta$  是待定的正常数. 通过简单的计算,  $P(r, t)$  满足如下定解问题

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} r \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + [a(r-b) - k\sigma^2 r] \frac{\partial P}{\partial r} + \\ [r + \beta + a(r-b)k - \frac{\sigma^2 k^2}{2} r] P &= 0, & 0 < r < +\infty, & 0 < t \leq T, \\ P(r, 0) &= \varphi(r) \exp(-kr), & 0 \leq r < +\infty, \\ P(0, t) &= \text{有界}, & 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

因此,由偏微分方程的适定性理论<sup>[3]</sup>可知:证明定解问题(6)解的存在性,可转化为在区域  $\widetilde{H}_T = (0, +\infty) \times (0, T]$  上证明定解问题(7)的存在解.

**引理 3** 若  $\varphi(r)$  连续且存在常数  $M_1 > 0$  和  $0 < h \leq 1$ , 使得  $|\varphi(r)| \leq M_1 \exp(hr)$ ,  $0 < r < +\infty$ , 则在区域  $\widetilde{H}_T$  上, 问题(7)存在古典解, 即  $P(r, t) \in C^{2,1}(\widetilde{H}_T) \cap C(\widetilde{H}_T)$ .

**证明** 记  $B_N = \{r | 0 < r < N\}$ ,  $Q_T^N = B_N \times (0, T]$ ,  $S_T^N = \partial B_N \times (0, T]$ . 考虑第一边值问题

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} r \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + [a(r-b) - k\sigma^2 r] \frac{\partial P}{\partial r} + \\ [r + \beta + a(r-b)k - \frac{\sigma^2 k^2}{2} r] P = 0, \quad 0 < r < +N, \quad 0 < t \leq T, \\ P(N, t) = \varphi(N) \exp(-kN), \quad 0 \leq t < T, \\ P(r, 0) = \varphi(r) \exp(-kr), \quad 0 \leq r < +N, \\ P(0, t) = \text{有界}, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由引理 2 可知: 边值问题(8)在区域  $Q_T^N$  中存在解

$$P_N(r, t) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(Q_T^N) \cap C(\overline{Q}_T^N), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (9)$$

记  $c(r, t) = r + \beta + a(r-b)k - \frac{\sigma^2 k^2}{2} r$ . 为保证  $c(r, t) \geq 0$ , 可取  $\beta \geq abk$  和  $0 < k \leq \frac{a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2}$ . 这样由引理 1, 可断定  $P_N(r, t)$  在区域  $Q_T^N$  中不能取到正的最大值. 在区域  $Q_T^N$  的抛物边界上, 当  $k > h$  时,  $P_N(r, t)$  有以下估计, 即

$$\begin{aligned} |P_N(r, 0)| &= |\varphi(r) \exp(-kr)| \leq M_1 \exp(hr - kr) \leq M_1, \\ |P_N(N, t)| &= |\varphi(N) \exp(-kN)| \leq M_1 \exp(hN - kN) \leq M_1. \end{aligned} \quad (10)$$

注意到  $P(0, t)$  有界, 因此必存在常数  $M_2 > 0$ , 使得  $|P(0, t)| \leq M_2$ , 从而在区域  $Q_T^N$  中,  $|P_N(r, t)| \leq M_3$ . 其中,  $M_3 = \max\{M_1, M_2\}$ .

证明了  $P_N(r, t)$  在区域  $Q_T^N$  中一致有界以后, 则可运用 Schauder 理论<sup>[5]</sup>, 即对任意的  $Q_T^m \subset Q_T^N \subset H_T$  ( $\forall m < N$ ), 当  $N$  充分大时, 由 Schauder 内估计, 有

$$|P_N(r, t)|_{2+\alpha, Q_T^m} \leq c(m)M_3, \quad \forall m < N. \quad (11)$$

式(11)中:  $c(m)$  与  $N$  无关. 由 Ascoli-Arzelà 定理可知:  $\{P_N(r, t)\}$  在  $Q_T^m$  中存在收敛的子序列, 应用通常的对角线方法, 可取  $\{P_N(r, t)\}$  的子序列  $\{P_N^i(r, t)\}$  与函数  $P(r, t) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(H_T) \cap C(\overline{H}_T)$ , 使得对任意的  $Q_T^m \subset Q_T^N \subset H_T$  ( $\forall m < N$ ) 时, 当  $i \rightarrow +\infty$  时,  $P_N^i(r, t), \frac{\partial P_N^i(r, t)}{\partial t}, \frac{\partial P_N^i(r, t)}{\partial r}, \frac{\partial^2 P_N^i(r, t)}{\partial r^2}$  在  $Q_T^m$  中分别收敛于  $P(r, t), \frac{\partial P(r, t)}{\partial t}, \frac{\partial P(r, t)}{\partial r}, \frac{\partial^2 P(r, t)}{\partial r^2}$ . 按上述子序列取极限, 显然  $P(r, t)$  满足问题(7).

又由式(11)可知: 在任意有界区域  $Q_T$  中,  $P(r, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ , 且对于  $\forall (r, t) \in Q_T$ ,  $|P(r, t)| \leq M_4$ . 其中,  $M_4$  为仅依赖于  $M_3$  的常数. 定理证毕.

由引理 3 和函数变换  $V(r, t) = \exp(\beta t + kr)P(r, t)$ ,  $k, \beta$  为引理 3 中所确定的正常数, 可以得到定解问题(6)解的存在性. 即

**定理 1** 若  $\varphi(r)$  连续且存在常数  $M_1 > 0$  和  $0 < h \leq 1$ , 使得  $|\varphi(r)| \leq M_1 \exp(hr)$ ,  $0 < r < +\infty$ , 则定解问题(6)在区域  $\widetilde{H}_T$  中存在解  $V(r, t) \in C^{2,1}(\widetilde{H}_T) \cap C(\widetilde{H}_T)$ .

### 3 解的唯一性的证明

为证明定解问题(6)的解唯一, 首先给出磨光函数的定义及一些基本性质.

设  $\rho \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ , 其支集  $\text{spt } \rho \subset \text{球 } B_1(0)$  并且  $\int_{\mathbf{R}^n} \rho(x) dx = 1$ , 称  $\rho(x)$  为磨光核, 例如可取

$$\rho(x) = \begin{cases} \lambda \exp(1/|x|^2 - 1), & |x| < 1, \quad \lambda > 0, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

其中, 常数  $\lambda$  使得  $\int_{\mathbf{R}^n} \rho(x) dx = 1$  成立.

**定义 1**<sup>[6]</sup> 设  $u \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\rho(x)$  是磨光核,  $\tilde{u}(x, \tau) = \tau^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \rho(\frac{x-y}{\tau}) u(y) dy$  称为  $u(x)$  的磨光函数.

**引理 4**<sup>[6]</sup> 设  $u \in C(\mathbb{R}^n)$ , 当  $\tau \rightarrow 0^+$  时  $\tilde{u}(x, \tau)$  在  $\mathbb{R}^n$  上局部一致地收敛于  $u(x)$  且  $\sup |\tilde{u}| \leq \sup |u|$ ,  $|D^k \tilde{u}(x, \tau)| \leq C \tau^{-k} \sup_{B_\tau(x)} |u|$ , ( $k=0, 1, 2, \dots$ ). 其中:  $D$  是关于  $x$  与  $\tau$  的梯度;  $C$  只依赖于  $n, k$  及磨光核  $\rho$ .

为证明定解问题(6)的解唯一, 给出如下引理.

**引理 5** 设函数  $f(x) = -\ln x$  和  $h(x) = \exp(-x)$ , 则  $0 < x \leq 1$  中有且只有一个交点.

**证明** 利用函数的单调性和介值定理证明即可.

**定理 2** 设定解问题(7)的解  $V(r, t)$  在区域  $\tilde{H}_T = (0, +\infty) \times (0, T]$  中属于  $C^{2,1}(\tilde{H}_T) \cap C(\tilde{H}_T)$ , 且满足增长条件  $|V(r, t)| \leq M \exp(h_0 r)$ . 其中,  $M, h_0$  为非负的常数, 则这类解必唯一.

**证明** 设  $V_1(r, t), V_2(r, t)$  是定解问题(6)的两个解, 并令  $V(r, t) = V_1(r, t) - V_2(r, t)$ , 则  $V(r, t)$  满足如下定解问题

$$\left. \begin{aligned} LV &= \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} r \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + a(r-b) \frac{\partial V}{\partial r} + rV = 0, & 0 < r < +\infty, & 0 < t \leq T, \\ V(r, 0) &= 0, & 0 < r < +\infty, \\ V(0, t) &= \text{有界}, & 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

并存在某一个常数  $N_0 > 0$ , 使得  $|V(r, t)| \leq N_0 \exp(h_0 r)$ .

下面分两种情形证明  $V(r, t) \equiv 0$ .

**情形 1** 当  $ab > \frac{1}{2} \sigma^2$  时, 可引进辅助函数

$$H(r, t) = \frac{1}{r^\epsilon} \exp\left[\frac{kr}{1-\mu t} + \beta\right], \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2\mu}. \quad (13)$$

式(13)中:  $\epsilon, k, \beta$  为待定的正常数. 对  $H(r, t)$  作简单的偏导数计算, 则有

$$\frac{LH}{H} = r + \beta + \frac{k\mu r}{(1-\mu t)^2} - a\epsilon + \frac{ab\epsilon}{r} + \frac{akr - abk + \epsilon k \sigma^2}{1-\mu t} - \frac{k^2 \sigma^2 r}{2(1-\mu t)^2} - \frac{\epsilon(\epsilon+1)\sigma^2}{2r}.$$

为保证  $\frac{LH}{H}$ , 取  $\mu = \frac{\sigma^2 k}{2}, \beta \geq a\epsilon + 2abk$ , 则有  $\frac{LH}{H} \geq r + \frac{ab\epsilon}{r} + \frac{akr + \epsilon k \sigma^2}{1-\mu t} - \frac{\epsilon(\epsilon+1)\sigma^2}{2r}$ . 注意到  $r + \frac{akr + \epsilon k \sigma^2}{1-\mu t} > 0$ , 因此要使  $\frac{LH}{H} \geq 0$ , 可在适当小的  $\epsilon$  下, 取  $\frac{ab\epsilon}{r} - \frac{\epsilon(\epsilon+1)\sigma^2}{2r} > 0$ , 即  $ab > \frac{\epsilon(\epsilon+1)}{2} \sigma^2$ .

下面考虑函数  $P(r, t): V(r, t) = H(r, t)P(r, t)$ , 其中  $H(r, t)$  由式(13)定义. 经过简单计算,  $P(r, t)$  满足方程

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} r \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + [a(r-b) - \frac{\sigma^2 r}{H} \frac{\partial H}{\partial r}] \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{LH}{H} P = 0. \quad (14)$$

在有界区域  $\Sigma_1 = (0, +R) \times (0, \frac{1}{2\mu}]$  中利用极值原理, 于是由变换  $V(r, t) = H(r, t)P(r, t)$  和增长条件可知, 区域  $\Sigma_1$  的抛物边界  $r=R$  上,  $P(r, t)$  有估计

$$|P(r, t)| = |V(r, t)H^{-1}(r, t)| \leq N_0 \exp(h_0 r) r^\epsilon \exp\left\{-\frac{kr}{1-\mu t} - \beta\right\} \leq N_0 r^\epsilon \exp((h_0 - k)r). \quad (15)$$

注意到  $V(0, t)$  有界, 因此必存在常数  $M_0 > 0$ , 使得  $|V(0, t)| \leq M_0$ . 又由式(15)可知: 在区域  $\Sigma_1$  的抛物边界  $r=0$  的附近, 当  $r \rightarrow 0^+$  时,  $\lim_{r \rightarrow 0^+} P(r, t) = M_0 \lim_{r \rightarrow 0^+} r^\epsilon \exp(-kr) = 0$ , 在区域  $\Sigma_1$  的底面  $t=0$  上, 有

$V(r, 0) = 0$ , 故  $P(r, 0) = 0$ . 由引理 1, 断定在区域  $\Sigma_2 = (0, +R) \times [0, \frac{1}{2\mu}]$  中  $|P(r, t)| \leq N_0 r^\epsilon \exp((h_0 - k)r)$ , 当  $r=R \rightarrow +\infty$ , 并取  $k > h_0$  和  $r \rightarrow 0^+$  时, 可得到在区域  $H_{T_1} = (0, +\infty) \times [0, \frac{1}{2\mu}]$  中  $P(r, t) \equiv 0$ .

用同样的方法, 可以继续证明在  $\frac{1}{2\mu} \leq t \leq \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu} \leq t \leq \frac{3}{2\mu}$  等带形区域中  $P(r, t) \equiv 0$ , 对  $V(r, t)$  有同样的结论.

故当方程中的系数满足  $ab > (\epsilon + 1)/2\sigma^2$  时, 定解问题(12)的解  $V(r, t) \equiv 0$ , 而  $\epsilon > 0$  充分小, 由此及充分小  $\epsilon > 0$  的任意性可知: 在  $ab > \frac{1}{2}\sigma^2$  的情形下也成立, 即定解问题(6)有唯一解.

**情形 2** 当  $ab = \frac{1}{2}\sigma^2$  时, 由引理 5 可知: 可构造

$$f_0(r) = \begin{cases} -\ln r, & 0 < r < r_0 < 1; \\ \exp(-r), & r \geq r_0 \end{cases}$$

的光滑逼近函数  $f(r) \in C^\infty(0, +\infty)$ , 满足  $f(r) > 0, f'(r) < 0, f''(r) > 0$ , 即  $\exists \tau > 0$ , 使得

$$f(r) = \begin{cases} -\ln r, & r \in (0, r_0 - \tau], \\ g(r), & r \in [r_0 - \tau, r_0 + \tau], \\ \exp(-r), & r \in [r_0 + \tau, +\infty). \end{cases}$$

其中:  $\exp(-(r_0 + \tau)) \leq g(r) \leq -\ln(r_0 - \tau)$ , 且  $g(r) = \rho_\tau(r) \cdot f_0(r) = \int_{r_0 - \tau}^{r_0 + \tau} \rho_\tau(y) f_0(r - y) dy$ ,  $\rho_\tau(r) \in C_0^\infty(R)$ ,  $\text{supp } \rho_\tau(r) \subset B_\tau(r_0)$  和  $\int_{r_0 - \tau}^{r_0 + \tau} \rho_\tau(y) dy = 1$ .

从而由引理 4 可知: 当  $\tau \rightarrow 0^+$  时,  $f(r)$  在  $[r_0 - \tau, r_0 + \tau]$  上是一致收敛于  $f_0(r)$  的. 因此, 为证明定解问题(6)在方程系数满足  $ab = \frac{1}{2}\sigma^2$  时有唯一解, 可引进辅助函数

$$\bar{H}(r, t) = f(r) \exp\left[\frac{kr}{1 - \mu t} + \beta t\right], \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2\mu}.$$

其中:  $\mu, k, \beta$  为待定的正常数.

下面作简单的计算, 并分 3 种情况进行讨论.

1) 当  $0 < r \leq r_0 - \tau$  时, 取  $\mu = \frac{k\sigma^2}{2}, k > \frac{a}{\sigma^2}$  和充分大的  $\beta \geq \frac{abk}{1 - \mu t}$ , 使得  $\frac{L\bar{H}}{\exp(kr/(1 - \mu t) + \beta t)} = -(r + \beta + \frac{akr - abk}{1 - \mu t} - \frac{k^2\sigma^2 r}{2(1 - \mu t)^2} + \frac{k\mu r}{(1 - \mu t)^2}) \ln r + \frac{ab}{r} - a - \frac{\sigma^2}{2r} + \frac{k\sigma^2}{1 - \mu t} > 0$ .

2) 当  $r \geq r_0 + \tau$  时, 取  $\mu = \frac{k\sigma^2}{2}, k > \frac{b+1}{2b}$  和充分大的  $\beta \geq \frac{abk}{1 - \mu t}$ , 使得  $\frac{L\bar{H}}{\exp(kr/(1 - \mu t) + \beta t)} = \exp(-r) \times (r + \beta + \frac{akr - abk}{1 - \mu t} - \frac{k^2\sigma^2 r}{2(1 - \mu t)^2} + \frac{k\mu r}{(1 - \mu t)^2} + ab - ar - \frac{\sigma^2 r}{2} + \frac{k\sigma^2 r}{1 - \mu t}) > 0$ .

3) 当  $r_0 - \tau \leq r \leq r_0 + \tau$  时, 通过简单的计算, 有

$$\begin{aligned} \frac{L\bar{H}}{\exp(kr/(1 - \mu t) + \beta t)} &= (r + \beta + \frac{akr - abk}{1 - \mu t} + \frac{k\mu r}{(1 - \mu t)^2} - \\ &\quad \frac{k^2\sigma^2 r}{2(1 - \mu t)^2}) g(r) + (ar - ab - \frac{k\sigma^2 r}{1 - \mu t}) g'(r) - \frac{\sigma^2 r}{2} g''(r). \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)中:  $g(r) = \int_{r_0 - 2\tau}^{r_0 + 2\tau} \rho_\tau(r - y) f_0(y) dy, g'(r) = \int_{r_0 - 2\tau}^{r_0 + 2\tau} D\rho_\tau(r - y) f_0(y) dy, g''(r) = \int_{r_0 - 2\tau}^{r_0 + 2\tau} D^2\rho_\tau(r - y) f_0(y) dy$ . 从而由引理 4, 有

$$|g'(r)| \leq C_1 \sup_{r_0 - 2\tau \leq y \leq r_0 + 2\tau} |f_0(y)|, \quad |g''(r)| \leq C_2 \sup_{r_0 - 2\tau \leq y \leq r_0 + 2\tau} |f_0(y)|.$$

这里,  $C_k = \int_{r_0 - 2\tau}^{r_0 + 2\tau} P_k((r - y)/\tau) dy \in C_0^\infty(R^n)$ ,  $\text{spt } P_k \subset B_\tau(r_0)$ ,  $P_k$  是磨光核  $\rho$  关于  $r$  的  $k$  阶导数, 只与  $k, \rho$  有关.

为保证  $\frac{L\bar{H}}{\exp(kr/(1 - \mu t) + \beta t)} > 0$ , 在式(16)中, 取  $\mu = \frac{k\sigma^2}{2}$  和充分大的  $\beta \geq \frac{abk}{1 - \mu t}$ , 使得  $\frac{L\bar{H}}{\exp(kr/(1 - \mu t) + \beta t)} \geq \frac{akr}{1 - \mu t} g(r) + ar g'(r) - \frac{\sigma^2 r}{2} g''(r) = ar [\frac{k}{1 - \mu t} g(r) + g'(r) - bg''(r)]$ , 当  $bg''(r) - g'(r) \leq k \exp(-(r_0 + \tau))$ , 即  $k \geq C_3 \exp(r_0 + \tau) [-\ln(r_0 - 2\tau)]$  时, 有  $\frac{L\bar{H}}{\exp(kr/(1 - \mu t) + \beta t)} > 0$ .

这样对于上述 3 种情况, 当取  $k \geq \max\{\frac{a}{\sigma^2}, \frac{b+1}{2b}, C_3 \exp(r_0 + \tau) [-\ln(r_0 - 2\tau)]\}$  时,

$$\frac{L\overline{H}}{\exp(kr/(1-\mu t)+\beta t)}>0.$$

借助情形 1 的证明方法,考虑函数  $P(r,t):V(r,t)=\overline{H}(r,t)P(r,t)$  和引理 1,可以证明在  $0\leq t\leq \frac{1}{2\mu}, \frac{1}{2\mu}\leq t\leq \frac{1}{\mu}$  等带形区域中  $P(r,t)\equiv 0$ ,对  $V(r,t)$  有同样的结论.

故当方程中的系数满足条件  $ab=\frac{1}{2}\sigma^2$  时,定解问题(12)的解  $V(r,t)\equiv 0$ .

综合情形 1 和情形 2,可知方程系数在满足  $ab\geq \frac{1}{2}\sigma^2$  时,问题(12)的解  $V(r,t)\equiv 0$ ,即在边界点  $r=0$  和  $r=+\infty$  不要给值,问题(6)就有唯一解,定理证毕.

## 4 结论

利用偏微分方程理论证明了方程(2)的系数满足  $ab\geq \frac{1}{2}\sigma^2$  时,在退化边界  $r=0$  上不需要给边界条件,定解问题(3)仍存在唯一解.该结果表明:由随机微分方程(1)确定的利率  $r_t$  恒正,基于 CIR 模型下的任何利率衍生产品在市场风险中性过程中只存在一个公平价格,即仿射结构解<sup>[1,7-8]</sup>.

### 参考文献:

[1] HULL J C. Option, future, and other derivatives[M]. 5th ed. New Jersey:Prentice-Hall, Pearson Education International,2003:377-397.

[2] WILLMOTT P. Derivatives: The theory and practice of financial engineering[M]. New York:John Wiley & Sons Ltd,1999:430-432.

[3] 姜礼尚,陈亚浙,刘西垣,等. 数学物理方程讲义[M]. 北京:高等教育出版社,2007:24-238.

[4] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 北京:高等教育出版社,2003:140-141.

[5] 陈亚浙. 二阶抛物型偏微分方程方程[M]. 北京:北京大学出版社,2003:92-100.

[6] 陈亚浙,吴兰成. 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组[M]. 北京:科学出版社,2003:12-32.

[7] 潘坚. 一类 Cauchy 问题解的存在唯一性及其应用[J]. 华侨大学学报:自然科学版,2005,26(4):349-352.

[8] 王志焕. 一类自由边界解的渐进性[J]. 华侨大学学报:自然科学版,2006,27(2):133-136.

# Existence and Uniqueness Solution for a Class of Degenerate Parabolic Equation

PAN Jian<sup>1,2</sup>, WANG Zhi-huan<sup>1</sup>

(1. School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China;  
2. School of Mathematics and Computer Science, Gannan Normal College, Ganzhou 341000, China)

**Abstract:** By using the Ficher theory, the maximum principle and the Schauder theory, the existence and uniqueness solution to a definite problem that the price of its derivatives is based on CIR (Cox, Ingersoll and Ross) model is proved by constructing some appropriate auxiliary functions.

**Keywords:** CIR model; Ficher theory; degenerate parabolic equations; maximum principle; Schauder interior estimates; existence; uniqueness

(责任编辑:黄晓楠      英文审校:黄心中)