第33卷　第6期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 33　No. 6
2012年11月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Nov. 2012

文章编号：　1000-5013(2012)06-0709-06

一类四阶微积分方程的差分迭代解法

庄清渠，任全伟

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要：　针对研究吊桥模型而建立的四阶微积分方程，提出利用有限差分法进行求解. 采用 Newton 型迭代法处理非线性项，大大提高了收敛效率，并给出差分逼近的误差分析. 数值算例说明了算法的可行性和有效性.

关键词：　四阶微积分方程；差分方法；迭代算法；误差分析

中图分类号：　O 241.8　　　　**文献标志码：**　A

在科学技术的很多领域中，涌现出大量的微积分方程模型. 然而只有少数比较简单的微积分方程能够用初等解法进行求解，而对大部分微积分方程，找出解的解析表达式是比较困难的，甚至是不可能的. 因此，对各种类型的微积分方程进行数值求解是有意义的. 随着电子计算机的出现，高阶微积分方程的数值解法也得到了迅速发展[1-3]. 快速有效地寻求自然科学和工程技术领域的问题解法，已成为计算数学工作者的主要工作.

在研究长度为 L 的吊桥模型中，当负载量为 $p(x)$ 时，竖直位移量 $y(x)$ 满足如下方程，即

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_1 y^{(4)} - y'' + \lambda_2 \int_0^L y(x)\mathrm{d}x = p(x), \qquad 0 < x < L,\\ &y(0) = y(L) = y''(0) = y''(L) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式(1)中：λ_1 和 λ_2 都是正常数；$p(x)$ 是区间 $[0,L]$ 上的连续函数，且是非正或非负的，文中假设 $p(x)\leqslant 0, \forall x\in[0,L]$(对于 $p(x)\geqslant 0$，将得到类似的结论).

近年来，已有不少学者对该方程进行了研究. 文献[4]给出了该方程的推导过程. 文献[5-6]引入了迭代算法来处理非线性项，并给出了有限元逼近的数值结果. 文献[7]则对该类型方程进行了混合有限元方法的误差估计. 对该方程进行数值求解的困难，在于方程所包含的非线性项. 本文引入 Newton 型迭代法[2,8]处理非线性项，结合有限差分法对该微积分方程进行求解.

1　方程解的存在性

令 $\phi(x) = -y''(x)$，则式(1)为

$$\left.\begin{aligned}&-\lambda_1 \phi'' + \phi + \lambda_2 \int_0^L y(x)\mathrm{d}x = p(x), \qquad 0 < x < L,\\ &\phi(0) = \phi(L) = 0,\\ &-y'' - \phi = 0, \qquad 0 < x < L,\\ &y(0) = y(L) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其次，令

$$\xi = \lambda_2 \int_0^L y(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

收稿日期：　2012-06-07

通信作者：　庄清渠(1980-)，男，讲师，主要从事微分方程数值解法的研究. E-mail：qqzhuang@hqu.edu.cn.

基金项目：　国家自然科学基金资助项目(11126330)；福建省自然科学基金资助项目(2011J05005)；中央高校基本科研业务费专项基金资助项目，国务院侨办科研基金资助项目(10QZR21)

将 ξ 看作一个未知数,则式(2)为

$$\left.\begin{aligned} &-\lambda_1\phi''+\phi+\xi=p(x), && 0<x<L,\\ &-y''-\phi=0, && 0<x<L,\\ &\phi(0)=\phi(L)=0, && y(0)=y(L)=0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

将 ξ 看作 ϕ,y 的参数,则可记 $\phi=\phi(x,\xi)$,$y=y(x,\xi)$,$\phi(x)=\phi(x,0)$,$y(x)=y(x,0)$.

另外,记

$$g(\xi)=\lambda_2\int_0^L y(x,\xi)\mathrm{d}x.$$

则式(2)可以写成一个非线性方程,即

$$\xi=g(\xi). \tag{5}$$

这样原问题的求解可归结为求解方程(5),因此,需要进一步探讨 $g(\xi)$的性质.

引理 1 函数 $g(\xi)$是非正的,并且在区间$(-\infty,0]$上是非增的.

证明 假设 $p(x)$的取值使得 $p(x)-\xi\leqslant 0$ 成立,由式(4)和离散极大值原理[9]可得 $\phi=\phi(x,\xi)<0$,$y=y(x,\xi)\leqslant 0$,从而 $g(\xi)=\lambda_2\int_0^L y(x,\xi)\mathrm{d}x\leqslant 0$,即 $g(\xi)$是非正的.

为证明 $g(\xi)$的单调性,取 $\xi_1<\xi_2\leqslant 0$,令

$$\psi=\phi(x,\xi_2)-\phi(x,\xi_1),\qquad \eta=y(x,\xi_2)-y(x,\xi_1).$$

则由式(4)可知,ψ,η 满足如下方程,即

$$\left.\begin{aligned} &-\lambda_1\psi''+\psi=(\xi_1-\xi_2), && 0<x<L,\\ &-\eta''=\psi, && 0<x<L,\\ &\psi(0)=\psi(L)=0, && \eta(0)=\eta(L)=0. \end{aligned}\right\}$$

由极大值原理[9]可知:$\psi\leqslant 0$,$\eta\leqslant 0$,$\forall x\in[0,L]$,即 $\phi(x,\xi_2)\leqslant\phi(x,\xi_1)$,$y(x,\xi_2)\leqslant y(x,\xi_1)$,从而 $g(x,\xi_2)\leqslant g(x,\xi_1)$.所以 $g(\xi)$是非增的,证明完毕.

根据前面的假设,可通过如下步骤计算式(4)的解析解.由微分方程理论可知式(4)的通解为

$$\phi=\phi(x,\xi)=(c_1(x)+\bar{c}_1)\exp[-x\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}]+(c_2(x)+\bar{c}_2)\exp[x\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}]. \tag{6}$$

式(6)中:

$$c_1(x)=\frac{\sqrt{\lambda_1}}{2}\int_0^x\exp[t\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}](p(t)-\xi)\mathrm{d}t; \tag{7}$$

$$c_2(x)=\frac{\sqrt{\lambda_1}}{2}\int_0^x\exp[-t\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}](p(t)-\xi)\mathrm{d}t; \tag{8}$$

$\bar{c}_1$,$\bar{c}_2$ 都是常数.由边界条件 $\phi(0)=\phi(L)=0$,可求得

$$\bar{c}_1=-\frac{c_1(L)+c_2(L)\exp[2L\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}]}{1-\exp[2L\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}]},\qquad \bar{c}_2=-\bar{c}_1. \tag{9}$$

由 $y''=-\phi$ 积分,可得

$$y'=y'(x,\xi)=\frac{2\bar{c}_1\cosh(x\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}})}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}}}-A(x)+\bar{c}_3, \tag{10}$$

$$y=y(x,\xi)=2\lambda_1\bar{c}_1\sinh(x\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}})-B(x)+\bar{c}_3x. \tag{11}$$

式(10)中:$A(x)=\int_0^x[c_1(t)\exp(-t\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}})+c_2(t)\exp(t\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}})]\mathrm{d}t$.式(11)中:$B(x)=\int_0^x A(t)\mathrm{d}t$;$\bar{c}_3=\frac{1}{L}[B(L)+2\lambda_1\bar{c}_1\sinh(L\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}})]$.从而可知

$$g(\xi)=\lambda_2\int_0^L(2\lambda_1\bar{c}_1\sinh(x\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}})-B(x)+\bar{c}_3x)\mathrm{d}x. \tag{12}$$

因此，在式(5)的根存在的情况下，可以求得式(1)的解析解.

由式(12)及 $A(x)$，$\bar{c}_1$，$\bar{c}_3$ 的表达式，可得引理 2.

引理 2　函数 $g(\xi)$在区间$(-\infty,0]$上是无穷次可微的.

记 $H_0^1(I)$为通常的 Hilbert 空间，其中 $I=[0,L]$，则式(2)的弱形式可以写成：找$(\phi,y)\in H_0^1(I)\times H_0^1(I)$，使得

$$\lambda_1(\phi',\varphi')+(\phi,\varphi)+\lambda_2\int_0^L y(x)\mathrm{d}x\int_0^L\varphi(x)\mathrm{d}x=(p,\varphi),\qquad\forall\varphi\in H_0^1(I), \tag{13}$$

$$(y',\eta')-(\phi,\eta)=0,\qquad\forall\eta\in H_0^1(I). \tag{14}$$

式(13)，(14)中：$(\cdot,\cdot)$表示的内积为 $(f,g)=\int_0^L f(x)g(x)\mathrm{d}x$；范数定义为 $\|f\|_{L^2}^2=\int_0^L f^2(x)\mathrm{d}x$，在不引起混淆时下标常略去不写.

引理 3　(ϕ,y)若分别是式(13)，(14)的解，则

$$\|y'\|\leqslant\frac{L}{2}\|\phi\|,\qquad\|\phi\|\leqslant\frac{1}{1+(2/L)^2\lambda_1}\|p\|. \tag{15}$$

证明　首先，在式(14)中令 $\eta=y$，并由 Poincare 不等式，可得 $\|y'\|^2\leqslant\|\phi\|\cdot\|y\|\leqslant\frac{L}{2}\|\phi\|\cdot\|y'\|$，从而可得 $\|y'\|\leqslant\frac{L}{2}\|\phi\|$.

其次，在式(13)中令 $\phi=\varphi$，则由 $y(x)\leqslant0$，$\phi(x)\leqslant0$，可得

$$\lambda_1(\frac{2}{L})^2\|\phi\|^2+\|\phi\|\leqslant\lambda_1\|\phi'\|^2+\|\phi'\|^2+\lambda_2\int_0^L y(x)\mathrm{d}x\int_0^L\phi(x)\mathrm{d}x=$$
$$(p,\varphi)\leqslant\|p\|\cdot\|\phi\|,$$

即 $\|\phi\|\leqslant\frac{1}{1+\lambda_1(2/L)^2}\|p\|$. 证明完毕.

由引理 1，2，3，以及 Poincare 不等式可得引理 4.

引理 4　在区间$[-\frac{\lambda_2L^{5/2}\|p\|}{4(1+\lambda_1(2/L)^2},0]$内，方程(5)存在唯一解.

由引理 4 可得定理 1.

定理 1　当 $\lambda_1,\lambda_2>0$，且在$[0,L]$上，$p(x)\leqslant0$ 时，式(1)存在唯一的古典解.

在求解 $g(\xi)$的过程中，可能会出现如下两种情况.

ⅰ）若 $g(\xi)$的显式表达式是可以求得的，则可求出式(5)的精确解，或者由简单的迭代算法求出 ξ 的数值解，然后通过求解问题(4)来找到式(1)的解.

ⅱ）若在计算过程中，由积分项(6)～(11)很难求出 $g(\xi)$的表达式，则采用下文给出的迭代解法先求解式(5)，再求解式(4).

2　方程的求解

在很多情况下，方程(5)的古典解是难以求得的，因此研究其数值解法就显得尤其重要. 采用牛顿迭代法来处理非线性项，也就是用迭代算法来求解 $f(\xi)=g(\xi)-\xi=0$，即

$$\xi_{k+1}=\xi_k-\frac{f(\xi_k)}{f'(\xi_k)},\qquad k=0,1,\cdots;\qquad\xi_0\leqslant0. \tag{16}$$

设 ξ^* 是方程 $f(\xi)=0$ 的根，由引理 2，4 可知，$f(\xi)$在 ξ^* 的邻域内具有连续的二阶导数，且在 ξ^* 的邻域内 $f'(\xi)\neq0$. 由 Newton 迭代法局部收敛性定理可知，式(16)产生的序列收敛于根 ξ^*. 方程(4)的具体迭代求解过程有如下 4 个步骤.

ⅰ）给定初始值 ξ_0，如 $\xi_0=0$.

ⅱ）已知 $\xi_k(k=0,1,2,\cdots)$，依次求解下列方程组，即

$$\left.\begin{aligned}&-\lambda_1\phi''_k+\phi_k=p(x)-\xi_k, && 0<x<L,\\&\phi_k(0)=\phi_k(L)=0,\\&-y''_k=\phi_k, && 0<x<L,\\&y_k(0)=y_k(L)=0.\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

ⅲ) 根据式(16)计算 ξ_{k+1}，其中：$f(\xi_k)=g(\xi_k)-\xi_k=\lambda_2\int_0^L y_k\mathrm{d}x-\xi_k$.

ⅳ) 若$|\xi_k-\xi_{k+1}|<$TOL(TOL 为迭代控制精度)，迭代终止；否则令 $\xi_k=\xi_{k+1}$，转ⅰ).

文献[10]所用的迭代算法为 $\xi_{k+1}=\xi_k+\omega(\lambda_2\int_0^L y_{k+1}(x)\mathrm{d}x-\xi_k)$，可以看作是 $\xi=\xi+\omega f(\xi)$. 这是一般的迭代法，使用 Newton 型迭代法可加速迭代收敛速度.

式(4)的差分法求解过程为如下. 首先，将区间$[0,L]$进行均匀分割，记 $\kappa=\{x_i=ih,i=0,1,2,\cdots,N;h=L/n\}$，则原方程可等价为

$$\left.\begin{aligned}&-\Lambda\Phi_k^h+\Phi_k^h=p(x_i)-\xi_k, && i=1,2,\cdots,N-1,\\&\Phi_k^h(0)=\Phi_k^h(L)=0,\\&-\Lambda y_k^h=\Phi_k^h(x_i), && i=1,2,\cdots,N-1,\\&y_k^h(0)=y_k^h(L)=0.\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

式(18)中：Φ_k^h，y_k^h 是定义在 κ 上的节点函数，$\phi_i=\phi(x_i)$；Λ 是二阶差分算子，即$(\Lambda\phi)_i=\dfrac{\phi_{i+1}-2\phi_i+\phi_{i-1}}{h^2}$. 容易验证该差分算子是平方阶收敛的，即

$$(\Lambda\phi)_i=\frac{\phi_{i+1}-2\phi_i+\phi_{i-1}}{h^2}=\phi''_i+o(h^2).\tag{19}$$

在计算过程中要更新 ξ_{k+1}的值，由式(16)知，需要计算 $f(\xi_k)$，$f'(\xi_k)$的值. 由于很难求得它们的具体表达式，因此，采用数值积分来计算 $f(\xi_k)$，即

$$f(\xi_k)\approx\lambda_2 h\sum_{i=1}^{N-1}y_k^h(x_i)-\xi_k.\tag{20}$$

对于 $f'(\xi_k)$采用差商的形式进行替代，即

$$f'(\xi_k)\approx\frac{f(\xi_k+h)-f(\xi_k)}{h},\tag{21}$$

$$f'(\xi_k)\approx\frac{f(\xi_k)-f(\xi_k-h)}{h}.\tag{22}$$

式(21)，(22)分别称之为 Newton 法 1，Newton 法 2.

3 误差分析

为了估计精确解 y 和数值解之间的误差，记 $C=C(I)$是连续函数空间. 在 I 上的函数 f 范数定义为 $\|f\|_C=\max\limits_{x\in I}|f(x)|$，$f\in C(I)$. 在节点 κ 上的函数 f 的范数定义为 $\|f\|_{C(\kappa)}=\max\limits_{x_i\in\kappa}|f(x_i)|$. $H^2(I)$是通常的 Sobolev 空间，M 在不同的式子中可能代表不同的常数.

定理 2 若 y 和 y_k 分别是式(4)和式(17)的解，则有

$$\|y-y_k\|_{H^2}\leqslant M|\xi_k-\xi|,\tag{23}$$

$$\|y-y_k\|_C\leqslant M|\xi_k-\xi|,\tag{24}$$

$$\|y_{k+1}-y_k\|_{H^2}\leqslant M|\xi_k-\xi_{k+1}|,\tag{25}$$

$$\|y_{k+1}-y_k\|_C\leqslant M|\xi_k-\xi_{k+1}|.\tag{26}$$

证明 假设 Φ 是式(4)的解，令 $\eta_k=y_k-y$，$\Psi_k=\Phi_k-\Phi$，则 η_k，Ψ_k 满足

$$\left.\begin{aligned}&-\lambda_1\Psi''_k+\Psi_k=-(\xi_k-\xi), && 0<x<L,\\&\Psi_k(0)=\Psi_k(0)=0,\\&-\eta''_k=\Psi_k, && 0<x<L,\\&\eta_k(0)=\eta_k(L)=0.\end{aligned}\right\}$$

由椭圆型方程理论[11]可知 $\|\Psi_k\|_{H^2}\leqslant M|\xi_k-\xi|$，$\|\eta_k\|_{H^2}\leqslant M|\Psi_k|$. 因为 $\|\Psi_k\|\leqslant\|\Psi_k\|_{H^2}$，所以 $\|\eta_k\|_{H^2}\leqslant M|\Psi_k|_{H^2}$，$\|\eta_k\|_{H^2}\leqslant M|\xi_k-\xi|$. 又因为 $H^2(I)$ 连续嵌入 $C(I)$，由式(23)可知式(24)成立. 类似地，可证明式(25)，(26). 证明完毕.

定理 3　若 y 是式(1)的精确解，y_k^h 是差分方程式(18)的解，则

$$\|y-y_k^h\|_{C_k}\leqslant M_1h^2+M_2\,|\,\xi_k-\xi\,|,\tag{27}$$

$$\|y_{k+1}^h-y_k^h\|_{C_k}\leqslant\frac{|\,\xi_{k+1}-\xi_k\,|\,L^2}{4\sqrt{2}}.\tag{28}$$

证明　由三角不等式可得 $\|y-y_k^h\|_{C_k}\leqslant\|y-y_k\|_{C_k}+\|y_k-y_k^h\|_{C_k}$. 由于差分算法(19)具有二阶收敛性，从而 $\|y_k-y_k^h\|_{C_k}\leqslant M_1h^2$. 结合定理 1，可得式(27).

令 $\eta_k=y_{k+1}^h-y_k^h$，$\Psi_k=\Phi_{k+1}^h-\Phi_k^h$，则 η_k，Ψ_k 满足

$$\left.\begin{aligned}&-\lambda_1\Lambda\Psi_k+\Psi_k=-(\xi_{k+1}-\xi_k), && x\in\kappa,\\&\Psi_k(0)=\Psi_k(L)=0,\\&-\Lambda\eta_k=\Psi_k, && x\in\kappa,\\&\eta_k(0)=\eta_k(L).\end{aligned}\right\}$$

由最大值原则[12]可得 $\|\Psi_k\|_{C_k}\leqslant|\xi_{k+1}-\xi_k|$，$\|\eta_k\|_{C_k}\leqslant\frac{L^{3/2}}{4\sqrt{2}}\|\Psi_k\|_{l^2(\kappa)}$. 由于 $\|\Psi_k\|_{l^2(\kappa)}=(\sum_{i=1}^{N-1}h\|\Psi_k\|_{C_k}^2)^{1/2}\leqslant\sqrt{L}\|\Psi_k\|_{C_k}$，从而可得 $\|y_{k+1}^h-y_k^h\|_{C_k}\leqslant\frac{L^2}{4\sqrt{2}}\|\Psi_k\|_{C_k}$. 证明完毕.

4　数值结果

为便于表达和计算，在式(1)中选取参数 $\lambda_1=\lambda_2=L=1$，$p(x)$ 为定义在均匀网格上的函数. 在迭代求解的过程中，当 $|\xi_{k+1}-\xi_k|\leqslant\mathrm{TOL}$ 时，迭代终止. 将数值结果和文献[6]($\omega=0.4$)的简单迭代法的数值结果作比较.

例 1　$p(x)=-\pi^4\sin(\pi x)-\pi^2\sin(\pi x)-2/\pi$.

方程的精确解为 $y(x)=-\sin(\pi x)$. 首先验证算法的收敛性，当 $\mathrm{TOL}=10^{-14}$ 时，误差随 h 的变化关系，如表 1 所示. 由表 1 可知：数值解关于 h 平方收敛.

表 1　由 Newton 法 1 所得的数值结果

Tab. 1　Numerical results using Newton method 1

N	k	ξ_k	$\|y-y_{k-1}\|_\infty$
10	3	−0.641 332 1	1.577×10^{-2}
20	3	−0.637 799 0	3.917×10^{-3}
40	3	−0.636 914 6	9.778×10^{-4}
80	4	−0.636 693 4	2.443×10^{-4}
160	4	−0.636 638 2	6.108×10^{-5}
320	4	−0.636 624 3	1.527×10^{-5}

其次取 $h=0.01$ 与 $\mathrm{TOL}=10^{-8}$，$\mathrm{TOL}=10^{-14}$ 分别进行计算，相应的数值结果如表 2，3 中所示. 由表 2，3 可知：在节点个数和迭代精度相同的情况下，Newton 型迭代法的收敛速度比 Semper 迭代法快得多. 需要指出的是 Newton 型迭代法需要两次求解方程(18)(ξ_k 和 ξ_k+h 或 ξ_k-h)，而 Semper 迭代法只需求解一次.

表 2　$\mathrm{TOL}=10^{-8}$，$h=0.01$ 的数值结果

Tab. 2　Numerical results with $\mathrm{TOL}=10^{-8}$ and $h=0.01$

方法	k	$\|y_k-y_{k-1}\|_\infty$	$\|y-y_{k-1}\|_\infty$	ξ_k
Newton 法 1	3	$6.661\,338\,147\,750\,939\times10^{-16}$	$1.563\,823\,433\,698\,985\times10^{-4}$	−0.636 666 957 478 300
Newton 法 2	3	$5.551\,115\,123\,125\,783\times10^{-16}$	$1.563\,823\,433\,710\,088\times10^{-4}$	−0.636 666 957 478 216
Semper	35	$1.225\,630\,708\,034\,942\times10^{-10}$	$1.563\,825\,249\,129\,014\times10^{-4}$	−0.636 666 942 118 980

表3 TOL=10^{-14}, h=0.01的数值结果

Tab. 3 Numerical results with TOL=10^{-14} and h=0.01

方法	k	$\| y_k - y_{k-1} \|_\infty$	$\| y - y_{k-1} \|_\infty$	ξ_k
Newton 法 1	4	0.00	$1.563\,823\,433\,705\,647\times10^{-4}$	$-0.636\,666\,957\,478\,260$
Newton 法 2	4	0.000	$1.563\,823\,433\,705\,647\times10^{-4}$	$-0.636\,666\,957\,478\,260$
Semper	61	$9.992\,007\,221\,626\,409\times10^{-16}$	$1.563\,823\,433\,705\,647\times10^{-4}$	$-0.636\,666\,957\,478\,237$

5 结论

将有限差分和牛顿迭代法相结合,对四阶微积分吊桥模型进行求解.给出了详细的计算过程和误差证明.通过数值算例来说明算法的可行性和有效性.由数值结果可知:1)采用Newton型迭代法所得的数值结果和理论分析是一致的;2)Newton型迭代法比B. Semper迭代法收敛速度快的多;3)差分/Newton型迭代法可以用于求解现实生活中的一些具体问题.

参考文献:

[1] DANG Q A, LE T S. Iterative method for solving a problem with mixed boundary conditions for biharmonic equation[J]. Adv Appl Math Mech, 2009, 1(5): 683-698.

[2] DANG Q A, LUAN V T. Iterative method for solving a nonlinear fourth order boundary value problem[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2010, 60(1): 112-121.

[3] ZHUANG Qing-qu. A Legendre spectral-element method for the one-dimensional fourth-order equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 218(7): 3587-3595.

[4] KARMAN T, BIOT M A. Mathematical methods in engineering[M]. New York: McGraw-Hill, 1940.

[5] SEMPER B. Finite element methods for suspension bridge models[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1993, 26(5): 77-91.

[6] SEMPER B. Finite element approximation of a fourth order integro-differential equation[J]. Applied Mathematics Letters, 1994, 7(1): 59-62.

[7] BREZZI F, FORTIN M. Mixed and hybrid finite element methods[M]. New York: Springer-Verlag, 1991.

[8] SHERMAN A H. On newton-iterative methods for the solution of systems of nonlinear equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1978, 15(4): 755-771.

[9] KUSRAEV A G. Discrete maximum principle[J]. Mathematical Notes, 1983, 34(2): 617-620.

[10] FEIREISl E. Exponential attractors for non-autonomous systems: Long-time behaviour of vibrating beams[J]. Mathematical methods in the applied sciences, 1992, 15(4): 287-297.

[11] LIONS J L, MAGENES E. Problemes aux limites non homogenes et applications[M]. Paris: Dunod, 1968.

[12] SAMARSKII A A. The theory of difference schemes[M]. New York: Marcel Dekker, 2001.

Finite Difference Approximation of a Class of Fourth-Order Integro-Differential Equations

ZHUANG Qing-qu, REN Quan-wei

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Finite difference method is proposed to approximate a fourth-order integro-differential equation modeling the suspension bridge. Newton type iteration methods are used to deal with the nonlinear term, which greatly improve the computational efficiency. Moreover, error estimate of the finite difference approximation is obtained. Numerical experiments are given to confirm the feasibility and efficiency of the algorithm.

Keywords: fourth-order integro-differential equation; finite-difference method; iterative algorithm; error estimate

(责任编辑:陈志贤 英文审校:黄心中)