第 33 卷　第 6 期　　华侨大学学报（自然科学版）　　Vol. 33　No. 6
2012 年 11 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Nov. 2012

文章编号：　1000-5013(2012)06-0705-04

一类无 AR 条件的超线性 p-双调和方程的解的存在性

高真圣

（华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021）

摘要：　应用 Morse 理论，研究 Navier 边值的 p-双调和问题的非平凡解的存在性. 研究表明：问题的非线性项是超线性的，但不满足通常的 Ambrosetti-Rabinowitz(AR)条件. 在新条件下，计算出了无穷远处的临界群.

关键词：　p-双调和方程；临界群；(C)条件；Morse 理论

中图分类号：　O 175.23　　　**文献标志码：**　A

1　预备知识

考虑下面带有 Navier 边界条件的 p-双调和问题

$$\left.\begin{aligned}&\Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)=f(x,u), && x\in\Omega,\\ &u=\Delta u=0, && x\in\partial\Omega.\end{aligned}\right\}\tag{P}$$

其中：Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中光滑有界区域，且 $f:\Omega\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是 Carathéodory 函数. 记 $X:=W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)$，那么对于 $u\in X$，可以赋予 u 的范数为 $\|u\|=\int_\Omega|\Delta u|^p\mathrm{d}x$. 先给出问题(P)的弱解的定义.

定义 1　称 u 为问题(P)的一个弱解，是指 $u\in X$ 满足下面的等式

$$\int_\Omega|\Delta u|^{p-2}\Delta u\Delta v\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,u)v\mathrm{d}x=0,\qquad\forall v\in C_0^\infty(\Omega).$$

设 $F(x,t)=\int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s$，那么与问题(P)相对应的一个泛函为

$$I(u)=\frac{1}{p}\int_\Omega|\Delta u|^p\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x.$$

对于 f，设 $\widetilde{F}(x,t)=f(x,t)t-pF(x,t)$，给出下面的条件：

f_*) $f(x,0)=0$，且存在一个常数 $C>0$，使得

$$|f(x,t)|\leqslant C(1+|t|^{q-1}),\qquad(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R},\quad 1<q<p^*,\tag{1}$$

式(1)中：$p^*=\dfrac{Np}{N-2p}(2p<N)$，$p^*=\infty(2p\geqslant N)$；

f_1) 对一致的 $x\in\bar{\Omega}$，有 $\lim\limits_{|t|\to\infty}\dfrac{F(x,t)}{|t|^p}=0$，且存在 $\Lambda>0$，使得 $F(x,t)\geqslant-\Lambda|t|^p$，$(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}$；

f_2) 存在 $\theta\geqslant1$，使得 $\theta\widetilde{F}(x,t)\geqslant\widetilde{F}(x,st)$，$(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}$，这里 $\theta\in[0,1]$；

f_3) 存在 $\delta>0$，使得 $F(x,t)\leqslant\lambda_1|t|^p$，这里 $x\in\Omega$，$|t|<\delta$，λ_1 表示 p-双调和算子 $\Delta(|\Delta|^{p-2}\Delta)$的第一特征值.

注意到条件 f_1)和 f_2)不同于通常的 AR 条件. 得到如下定理.

收稿日期：　2012-04-06

通信作者：　高真圣(1976-)，男，讲师，主要从事偏微分方程的研究. E-mail：gaozhensheng@hqu.edu.cn.

基金项目：　中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(11QZR18)

2 主要结果及证明

定理 1 假设问题(P)满足条件 f_*),f_1),f_2),f_3),那么它至少有一个满足条件非平凡的弱解.

Morse 理论[1-2]是研究非线性微分方程多重解的一个很有用的工具,该理论的主要概念是建立在一个孤立临界点 u 处的 C^1-泛函 $I:X\to\mathbf{R}$ 组成的临界群 $C_q(I,u)$上, X 是一个 Banach 空间.

令 $I(u)$是一个定义在 Banach 空间 X 上的 C^1-泛函,那么 I 在 $I(u)=c$ 的孤立临界点 u 处的第 q 个临界群可定义为

$$C_q(I,u):=H_q(I^C\cap U,(I^C\cap U)/\{u\}),\qquad q\in\mathbf{N},$$

其中:U 是 u 的任一邻域;H_q 是系数在 Abel 群 G 中的一个广义相对同调群;$I^C=I^{-1}((-\infty,c])$.

若对任意的序列$\{u_n\}\in X$,$\{I(u_n)\}$有界,并且$(1+\|u_n\|)\|I'(u_n)\|\to0(n\to\infty)$有一个收敛子序列,即(C)条件,称 I 满足(C)条件,也称这个序列为(C)序列.若 I 满足(C)条件,并且 I 的临界值有下界 $\alpha>-\infty$,Bartsch[3]中记相关的临界群为

$$C_q(I,\infty):=H(X,I^\alpha).\tag{2}$$

值得提出的是,应用形变引理,式(2)的右边与 α 的选择无关.

定理的证明还将用到下面的命题 1.

命题 1[3] 设 $I\in C^1(X,\mathbf{R})$满足(C)条件,且 I 仅有有限个临界点,那么

1) 若存在某个 $q\in\mathbf{N}$,使得 $C_q(I,\infty)\neq0$,则 I 有一个临界点 u,且满足 $C_q(I,u)\neq0$;

2) 令 0 是 $I(u)$一个孤立的临界点,若存在某个 $q\in\mathbf{N}$,使得 $C_q(I,0)\neq C_q(I,\infty)$,则 $I(u)$有一个非零临界点.

下面先证明相证明相应的泛函 I 满足(C)条件.

令$\{u_n\}$是泛函 I 的(C)序列,仅仅只需要证明$\{u_n\}$是有界的即可,如果$\{u_n\}$是无界的,可以通过选择一子序列(仍记为$\{u_n\}$),使得存在某个 $c\in\mathbf{R}$ 有

$$I(u_n)\to c,\qquad\|u_n\|\to\infty,\qquad\|I'(u_n)\|\cdot\|u_n\|\to0,\qquad n\to\infty,\tag{3}$$

因此得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left(\frac{1}{p}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left\{I(u_n)-\frac{1}{p}\langle I'(u_n),u_n\rangle\right\}=c.\tag{4}$$

令 $w_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|}$,选择一个适当的子序列使得在 X,在$^p(\Omega)$和 Ω 中分别有

$$w_n\rightharpoonup w,\qquad w_n\to w,\qquad w_n\to w\quad\text{a. e.}\qquad n\to\infty.\tag{5}$$

当 $w=0$,类似于文献[4,5]中的 p-Laplacian 情形,可以找出一个序列$\{t_n\}\subset\mathbf{R}$,使得

$$I(t_nu_n)=\max_{t\in[0,1]}I(tu_n).\tag{6}$$

对任意的 $m>1/2$,令 $v_n=(2mp)^{1/p}w_n$.由于在 $L^q(\Omega)$中 $v_n\to0$,以及

$$F(x,t)\leqslant C(1+t^q),\tag{7}$$

再结合算子 $F(x,\cdot)$的连续性,从而在 $L^1(\Omega)$中有 $F(\cdot,v_n)\to0$.因此有

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega F(x,v_n)\mathrm{d}x=0.\tag{8}$$

当 n 充分大,且$\dfrac{(2mp)^{1/p}}{\|u_n\|}\in(0,1)$时,有

$$\begin{aligned}I(t_nu_n)\geqslant I(v_n)=&\frac{1}{p}\int_\Omega|\Delta v_n|^p\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,v_n)\mathrm{d}x=\\&\frac{1}{p}\int_\Omega|(2mp)^{1/p}\Delta w_n|^p\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,v_n)\mathrm{d}x=\\&2m-\int_\Omega F(x,v_n)\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{9}$$

从而有 $I(t_nu_n)\to\infty$.

由于 $I(0)=0$,$I(u_n)\to c$,故有 $t_n\in(0,1)$,以及有

$$\int_{\Omega}|\Delta t_n v_n|^p\mathrm{d}x-\int_{\Omega}F(x,t_nu_n)t_nu_n\mathrm{d}x=\langle I'(t_nu_n),t_nu_n\rangle=t_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=t_n}I(tu_n)=0. \tag{10}$$

再由条件 f_2)得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}(\frac{1}{p}f(x,u_n)t_nu_n-F(x,u_n))\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{\theta}\int_{\Omega}(\frac{1}{p}f(x,t_nu_n)t_nu_n-F(x,{}_nu_n))\mathrm{d}x=\\ \frac{1}{\theta}(\frac{1}{p}\int_{\Omega}|\Delta t_nu_n|^p\mathrm{d}x-\int_{\Omega}F(x,\mathrm{tu}_n)\mathrm{d}x)=\\ \frac{1}{\theta}I(t_nu_n)\to\infty.\end{aligned} \tag{11}$$

这与式(4)矛盾.

对式(3)的第一个极限，当 $\|u_n\|\geqslant1$ 时，有

$$\frac{1}{p}\|u_n\|^p-(c+o(1))\geqslant\int_{\Omega}F(x,u_n)\mathrm{d}x, \tag{12}$$

再利用式(12)和条件 f_1)得

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}-\frac{(c+o(1))}{\|u_n\|^p}\geqslant\int_{\Omega}\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^p}\mathrm{d}x=\\ (\int_{w=0}+\int_{w\neq0})\frac{F(x,u_n)}{|u_n|^p}|w_n|^p\mathrm{d}x\geqslant\\ \int_{w\neq0}\frac{F(x,u_n)}{|u_n|^p}|w_n|^p\mathrm{d}x-\Lambda\int_{w=0}|w_n|^p\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{13}$$

当 $x\in\Theta:=\{x\in\Omega:w(x)\neq0\}$时，有$|u_n(x)|\to+\infty$. 再结合条件 f_1)得到

$$\frac{f(x,u_n)u_n}{|u_n|^{p^+}}|w_n|^p\mathrm{d}x\to+\infty. \tag{14}$$

考虑到 Θ 的 Lebesgue 测度是正的，再利用 Fatou 引理得到

$$\int_{w\neq0}\frac{f(x,u_n)u_n}{|u_n|^p}|w_n|^p\mathrm{d}x\to+\infty. \tag{15}$$

这与式(13)矛盾. 因此，序列$\{u_n\}$在 X 中有界.

已经证明了泛函满足(C)条件，下面计算 $C_q(I,\infty)$.

令 $S=\{u\in X:\|u\|=1\}$，结合条件 f_1)，容易得到，对任意的 $u\in S$，有

$$\begin{aligned}I(tu)=\frac{1}{p}\int_{\Omega}|\Delta tu|^p\mathrm{d}x-\int_{\Omega}F(x,tu)\mathrm{d}x\leqslant\\ t^p-Ct^p\int_{\Omega}|u|^p\mathrm{d}x+C_1\to\infty,\qquad t\to\infty.\end{aligned} \tag{16}$$

选择 $a<\min\{\inf\limits_{\|u\|\leqslant1}I(u),0\}$，对任意的 $u\in S$，存在 $t_0>1$ 使得 $I(t_0u)\leqslant a$. 利用条件 f_2)，有

$$F(x,z)\geqslant0,\qquad(x,z)\in\Omega\times\mathbf{R}, \tag{17}$$

从而，当

$$I(tu)=\int_{\Omega}\frac{1}{p}|\Delta tu|^p\mathrm{d}x-\int_{\Omega}F(x,tu)\mathrm{d}x\leqslant a$$

时，结合式(17)得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(tu)=t^{p-1}-\int_{\Omega}uf(x,tu)\mathrm{d}x=\\ \frac{1}{t}\{pa+\int_{\Omega}pF(x,tu)\mathrm{d}x-\int_{\Omega}tuf(x,tu)\mathrm{d}x\}=\\ \frac{1}{t}\{pa+\int_{\Omega}F(x,tu)\mathrm{d}x\}\leqslant\frac{1}{t}pa<0.\end{aligned}$$

因此，由隐函数存在定理得到，存在唯一一个 $T\in C(S,\mathbf{R})$，使得 $I(T(u)u)=a$.

对于函数 T，模仿文献[6]的讨论，可以构造一个从 到 I^a 的强形变收缩映射，从而得到

$$C_q(I,\infty)=H(X,I^a)\cong H(X,X-\{0\})\cong0.$$

利用条件 f_4)可得,0是 I 的一个局部极小值.因此,$C_q(I,0)=\delta_{q,0}\mathbf{Z}$.最后,利用命题1得到问题(P)在 X 中至少有一个非平凡解.

3 结束语

实际上，定理1在通常的AR条件下的类似结果，是由文献[7]得到的．可以验证下面的函数满足条件 f_2),f_3)，而且不满足通常的AR条件，即

$$f(x,t)\leqslant|t|^{p-2}t\log(1+|t|).$$

因此,从某种程度上说,结果是文献[7]的结果的一个改进.如果在零点附近假设一个对偶的AR条件,在无穷处假设一个使得泛函强制的条件,可以计算在零点的临界群,那么再利用命题1,仍然可以证明一个非平凡解的存在性.文献[8]就是利用这种方法研究 p-Laplacian 方程的.

参考文献:

[1] CHANG K C. Infinite-dimensional morse theory and multiple solution problems(6): Progress in nonlinear differential equations and their applications[M]. Boston:Birkhäuser,1993:997-1049.

[2] MAWHIN J,WILLEM M. Critical point theory and hamiltonian systems applied mathematical sciences[M]. New York:Springer-Verlag,1989.

[3] BARTSCH T,LI S. Critical point theory for asymptotically quadratic functionals and applications to problems with resonance[J]. Nonlinear Anal, 1997,28(3):419-441.

[4] JEANJEAN L. On the existence of bounded Palais-Smale sequences and application to a Landesman-Lazer-type problem set on $\mathbf{R}^N$[C]//Proc Roy Soc Edinburgh Sect. Proc Roy Soc Edinburgh:Sect A,1999,129(4):787-809.

[5] ZOU Wen-ming. Variant fountain theorems and their applications[J]. Manuscripta Math,2001,104(3):343-358.

[6] WANG Zhi-qiang. On a superlinear elliptic equation[J]. Ann Inst H Poincare,1991,8(1):43-57.

[7] LIU Shi-bo,MEDEIROS E,PERERA K. Multiplicity results for p-biharmonic problems via Morse theory[J]. Commun Appl Anal,2009,13(3):447-455.

[8] FANG Fei,LIU Shi-bo. Nontrivial solutions of superlinear p-Laplacian equations[J]. J Math Anal Appl,2009,351(1):138-146.

Existence for the Solutions of a Class of Superlinear p-Biharmonic Equations without AR Condition

GAO Zhen-sheng

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this work, we discuss the existence for the solutions of a class of p-biharmonic equations with Navier boundary value via Morse theory. The nonlinearity of our problem is superliner, but it does not satisfy the Ambrosetti-Rabinowitz (AR) condition. Under the new condition, the critical groups at infinity are computed.

Keywords: p-biharmonic equations; critical groups; (C) condition; Morse theory

（**责任编辑:** 陈志贤　　**英文审校:** 黄心中）