

文章编号: 1000-5013(2012)06-0694-05

# 具有时滞的神经网络模型的分支分析

徐昌进, 姚凌云

(1. 贵州财经大学 贵州省经济系统仿真重点实验室, 贵州 贵阳 550004;  
2. 贵州财经大学 图书馆, 贵州 贵阳 550004)

**摘要:** 研究一类具有时滞的神经网络模型. 通过分析系统的特征方程及考虑不同的时滞对系统动力学行为的影响, 得到系统的平衡点稳定及 Hopf 分支产生的条件. 数值模拟验证了所得理论分析的结果的正确性, 补充了前人的研究成果.

**关键词:** 神经网络; 稳定性; Hopf 分支; 时滞

**中图分类号:** O 175.12

**文献标志码:** A

自 1984 年 Hopfield<sup>[1]</sup>首次用常微分方程描述神经网络的动力学行为以后, 很多学者考虑到信号的传输具有时间的延迟, 提出并研究了大量的时滞神经网络模型的动力学行为并取得了许多优秀成果<sup>[2-10]</sup>. 1997 年, Olien 和 Belair<sup>[11]</sup>研究时滞神经网络模型

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_1(t) &= -u_1(t) + a_{1,1}f(u_1(t-\tau_1)) + a_{1,2}f(u_2(t-\tau_2)), \\ \dot{u}_2(t) &= -u_2(t) + a_{2,1}f(u_1(t-\tau_1)) + a_{2,2}f(u_2(t-\tau_2)) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

的稳定性及分支等动力学行为. 式(1)中:  $a_{i,j}$  ( $i, j=1, 2$ ) 是实常数;  $u_i$  ( $i=1, 2$ ) 的具体含义可参考文献<sup>[11]</sup>. 这里值得指出的是, 虽然 Olien 和 Belair<sup>[11]</sup>研究了系统(1)的稳定性及分支行为, 但是在假设  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$  前提下. 然而在多数情况下,  $\tau_1 \neq \tau_2$ , 那么不同的时滞对系统的动力学行为的影响并不清楚. 本文在假设  $\tau_1 \neq \tau_2$  的情况下, 继续研究系统(1)的稳定性及分支问题.

## 1 平衡点的稳定性与 Hopf 分支的存在性

H1) 假设  $f \in C^1(R)$  且  $f(0) = 0$ .

若条件 H1) 成立, 则系统(1)有唯一的平衡点  $E_0(0, 0)$ , 其在平衡点  $E_0(0, 0)$  处的线性化方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_1(t) &= -u_1(t) + a_{1,1}(u_1(t-\tau_1)) + a_{1,2}u_2(t-\tau_2), \\ \dot{u}_2(t) &= -u_2(t) + a_{2,1}(u_1(t-\tau_1)) + a_{2,2}u_2(t-\tau_2). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(2)的特征方程为

$$\begin{aligned} &(\lambda + 1)^2 - (\lambda + 1)(a_{1,1}\exp(-\lambda\tau_1) + a_{2,2}\exp(-\lambda\tau_2)) + \\ &(a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})\exp(-\lambda(\tau_1 + \tau_2)) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

下面的引理对研究方程(3)的特征根的分布起着重要的作用.

**引理 1**<sup>[12]</sup> 对超越方程

$$P(\lambda, \exp(-\lambda\tau_1), \dots, \exp(-\lambda\tau_m)) = \lambda^n + p_1^{(0)}\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}^{(0)}\lambda + p_n^{(0)} +$$

$$[p_1^{(1)}\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}^{(1)}\lambda + p_n^{(0)}]\exp(-\lambda\tau_1) + \dots + [p_1^{(m)}\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}^{(m)}\lambda + p_n^{(m)}]\exp(-\lambda\tau_m) = 0,$$

当  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_m)$  变化时,  $P(\lambda, \exp(-\lambda\tau_1), \dots, \exp(-\lambda\tau_m))$  在右半开平面零点的个数和发生改变当且仅当零点出现在或者穿过虚轴.

收稿日期: 2012-03-01

通信作者: 徐昌进(1970-), 男, 副教授, 主要从事泛函微分方程理论及其应用的研究. E-mail: mail: xcj403@126.com.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60902044); 贵州省软科学基金资助项目(黔科合 R 字[2011]LKC2030); 贵州省科学技术基金资助项目(黔科合 J 字[2012]2011); 贵州财经大学博士科研启动项目(2010 年度)

接下来考虑 3 种情形.

**情形 1** 当  $\tau_1 = \tau_2 = 0$  时, 式(3)变成

$$\lambda^2 + (2 - a_{1,1} - a_{1,2})\lambda + a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} - a_{1,1}a_{2,2} = 0. \tag{4}$$

显然如果条件

$$H2) a_{1,1} + a_{2,2} < 2, a_{1,1}a_{2,2} > a_{1,2}a_{2,1} + a_{1,1} + a_{1,2}$$

满足, 则方程(4)的根都具有负实部, 于是, 平衡点  $E_0(0, 0)$  是渐近稳定的.

**情形 2** 当  $\tau_1 = 0, \tau_2 > 0$  时, 式(3)变成

$$\lambda^2 + p\lambda + r + (s\lambda + q)\exp(-\lambda\tau_2) = 0. \tag{5}$$

其中:  $p = 2 - a_{1,1}; r = 1 - a_{1,1}; s = -a_{2,2}; q = -a_{2,2} + a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$ .

设  $i\omega (\omega > 0)$  是方程(5)的根, 则有

$$\left. \begin{aligned} q\cos \omega\tau_2 + \omega\sin \omega\tau_2 &= \omega^2 - r, \\ s\omega\cos \omega\tau_2 - q\sin \omega\tau_2 &= -p\omega. \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

从而有

$$\omega^4 + (p^2 - s^2 - 2r)(\omega^2 + r^2 - q^2) = 0. \tag{7}$$

容易知道若条件

$$H3) p^2 - s^2 - 2r > 0, r^2 - q^2 > 0$$

成立, 则方程(7)没有正根. 于是, 当条件 H2) 和 H3) 满足时, 对  $\tau_2 \in [0, +\infty)$ , 方程(5)的所有根都具有负实部. 若条件 H2) 和条件

$$H4) r^2 - q^2 < 0$$

成立, 则方程(7)有唯一的正根  $\omega_0^2$ . 把  $\omega_0^2$  代入式(6), 可得

$$\tau_{2_n} = \frac{1}{\omega_0} \left\{ \arccos \frac{q(\omega_0^2 - r) - ps\omega_0^2}{s^2\omega_0^2 + q^2} + 2n\pi \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{8}$$

若条件 H2) 和条件

$$H5) p^2 - s^2 - 2r < 0, r^2 - q^2 > 0, (p^2 - s^2 - 2r)^2 > 4(r^2 - q^2)$$

成立, 那么方程(5)有两个正根为  $\omega_+^2$  和  $\omega_-^2$ . 把  $\omega_{\pm}^2$  代入式(6), 可得

$$\tau_{2_n}^{\pm} = \frac{1}{\omega_0} \left\{ \arccos \frac{q(\omega_{\pm}^2 - r) - ps\omega_{\pm}^2}{s^2\omega_{\pm}^2 + q^2} + 2k\pi \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{9}$$

设  $\lambda(\tau) = \alpha(\tau_2) + i\omega(\tau_2)$  为方程(5)在  $\tau_2 = \tau_{2_n}$  处的根且  $\alpha(\tau_{2_n}) = 0, \omega(\tau_{2_n}) = \omega_0$ . 根据泛函微分方程理论, 对于任意的  $\tau_{2_n}, n = 0, 1, 2, \dots$ , 存在  $\epsilon > 0$ , 使得对任意的  $|\tau_2 - \tau_{2_n}| < \epsilon, \lambda(\tau_2)$  关于  $\tau_2$  是连续可微的. 把  $\lambda(\tau_2)$  代入方程(5)的左边并关于  $\tau_2$  求导, 可得

$$\left[ \frac{d\lambda}{d\tau} \right]^{-1} = \frac{(2\lambda + p)\exp(\lambda\tau_2)}{\lambda(s\lambda + q)} + \frac{s}{\lambda(s\lambda + q)} - \frac{\tau}{\lambda}. \tag{10}$$

于是有

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d(\operatorname{Re} \lambda(\tau))}{d\tau_2} \right]^{-1}_{\tau_2 = \tau_{2_n}} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{(2\lambda + p)\exp(\lambda\tau_2)}{\lambda(s\lambda + q)} \right\}_{\tau_2 = \tau_{2_n}} + \operatorname{Re} \left\{ \frac{s}{\lambda(s\lambda + q)} \right\}_{\tau_2 = \tau_{2_n}} = \\ \operatorname{Re} \left\{ \frac{p\cos \omega\tau_{2_n} - 2\omega_0 \sin \omega_0 \tau_{2_n} + i(2\omega_0 \cos \omega_0 \tau_{2_n} + p \sin \omega_0 \tau_{2_n})}{-s\omega_0^2 + iq\omega_0} \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{s}{-s\omega_0^2 + iq\omega_0} \right\} = \\ \frac{1}{\Theta} [-s\omega_0^2(p\cos \omega_0 \tau_{2_n} - 2\omega_0 \sin \omega_0 \tau_{2_n}) + q\omega_0(2\omega_0 \cos \omega_0 \tau_{2_n} + p \sin \omega_0 \tau_{2_n}) - s^2\omega_0^2] &= \\ \frac{1}{\Theta} [p\omega_0(q\sin \omega_0 \tau_{2_n} - s\omega_0 \cos \omega_0 \tau_{2_n}) + 2\omega_0^2(q\cos \omega_0 \tau_{2_n} + s\omega_0 \sin \omega_0 \tau_{2_n}) - s^2\omega_0^2] &= \\ \frac{1}{\Theta} (p^2\omega_0^2 + 2\omega_0^4 - 2r\omega_0^2 - s^2\omega_0^2) &= \frac{\omega_0^2}{\Theta} (2\omega_0^2 + p^2 - s^2 - 2r) \\ \frac{1}{\Theta} (-p^2 + s^2 + 2r + \sqrt{\Delta^*} + p^2 - s^2 - 2r) &= \frac{\omega_0^2}{\Theta} \sqrt{\Delta^*} > 0. \end{aligned}$$

上式中:  $\Theta = s^2\omega_0^4 + q^2\omega_0^2 > 0; \sqrt{\Delta^*} = (s^2 - p^2 + 2r)^2 - 4(r^2 - q^2)$ . 注意到

$$\text{sign} \left\{ \frac{d(\text{Re } \lambda)}{d\tau_2} \right\}_{\tau_2 = \tau_{2_n}} = \text{sign} \left\{ \text{Re} \left[ \frac{d\lambda}{d\tau_2} \right] \right\}_{\tau_2 = \tau_{2_n}} = 1,$$

于是有

$$\left. \frac{d(\text{Re } \lambda)}{d\tau_2} \right|_{\tau_2 = \tau_{2_n}} > 0.$$

类似地,可以得到

$$\left. \frac{d(\text{Re } \lambda)}{d\tau_2} \right|_{\tau_2 = \tau_{2_k}^+} > 0, \quad \left. \frac{d(\text{Re } \lambda)}{d\tau_2} \right|_{\tau_2 = \tau_{2_k}^-} < 0.$$

由上述分析和文献[12]的结果,可以得到如下结果.

**引理 2** 设  $\tau_1 = 0$ , 假设条件 H1) 和 H2) 满足, 则下列结论成立.

i) 若条件 H3) 成立, 则对  $\tau_2 \geq 0$ , 系统(1)的平衡点  $E_0(0, 0)$  是渐近稳定的.

ii) 若条件 H4) 成立, 则对  $\tau_2 < \tau_{2_0}$ , 系统(1)的平衡点  $E_0(0, 0)$  是渐近稳定的; 而对  $\tau_2 > \tau_{2_0}$ , 系统(1)的平衡点  $E_0(0, 0)$  是不稳定的. 此外, 系统(1)在  $\tau_2 = \tau_{2_0}$  出现 Hopf 分支.

iii) 若条件 H5) 成立, 则存在正整数  $m$ , 使得  $\tau_2 \in [0, \tau_{2_0}^+) \cup (\tau_{2_0}^-, \tau_{2_1}^+) \cup \dots \cup (\tau_{2_{m-1}}^-, \tau_{2_m}^+)$  时, 平衡点  $E_0(0, 0)$  是稳定的; 而当  $\tau_2 \in [\tau_{2_0}^+, \tau_{2_0}^-) \cup (\tau_{2_1}^+, \tau_{2_1}^-) \cup \dots \cup (\tau_{2_m}^+, \tau_{2_m}^-) \cup (\tau_{2_m}^+, +\infty)$  时, 平衡点  $E_0(0, 0)$  是不稳定的. 此外, 当  $\tau_2 = \tau_{2_k}^{\pm}, k = 0, 1, 2, \dots$  时, 系统(1)在平衡点  $E_0(0, 0)$  处出现 Hopf 分支.

**情形 3** 当  $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$  时, 假设  $\tau_2$  在其稳定区间考虑系统(3). 选择  $\tau_1$  为分支参数, 不失一般性, 在条件 H2) 和 H4) 满足的情况下考虑系统(1). 设  $i\omega (\omega > 0)$  为方程(3)的根, 则有

$$\omega^4 + \alpha_3 \omega^3 + \alpha_2 \omega^2 + \alpha_1 \omega + \alpha_0 = 0. \tag{11}$$

其中:  $\alpha_0 = (a_{2,2} \cos \omega \tau_2 - 1)^2 + a_{2,2}^2 \sin^2 \omega \tau_2 - (a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}) \sin^2 \omega \tau_2 - [(a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}) \cos \omega \tau_2 - a_{1,1}]^2$ ;  $\alpha_1 = 2a_{2,2} \sin \omega \tau_2 (a_{2,2} \cos \omega \tau_2 - 1) + 2a_{2,2} (2 - a_{2,2} \cos \omega \tau_2) \sin \omega \tau_2 - 2a_{1,1} (a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}) \sin \omega \tau_2$ ;  $\alpha_2 = a_{2,2}^2 \sin^2 \omega \tau_2 + 2(a_{2,2} \cos \omega \tau_2 - 1) + (2 + a_{2,2} \cos \omega \tau_2)^2 - a_{1,1}^2$ ;  $\alpha_3 = 2a_{2,2} \sin \omega \tau_2$ .

记  $H(\omega) = \omega^4 + \alpha_3 \omega^3 + \alpha_2 \omega^2 + \alpha_1 \omega + \alpha_0$ .

假设条件

$$\text{H6)} \quad 2|a_{2,2} - a_{1,1}(a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1})| < (a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1})^2 + a_{1,1}^2 - a_{2,2}^2 - 1$$

成立, 则  $H(0) < 0$ , 且有  $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} H(\omega) = +\infty$ . 方程(11)有有限个正根  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , 对每一固定的  $\omega_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 存在序列  $\{\tau_{1_j}^i | j = 1, 2, 3, \dots\}$ , 使得方程(11)成立.

记

$$\tau_{1_0} = \min\{\tau_{1_j}^i | j = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots\}. \tag{12}$$

当  $\tau_1 = \tau_{1_0}, \tau_2 \in [0, \tau_{2_0})$ , 方程(3)有一对纯虚根.

下面假设

$$\text{H7)} \quad \left. \frac{d(\text{Re } \lambda)}{d\tau_1} \right|_{\lambda = i\omega} \neq 0.$$

于是, 由 Hale<sup>[13]</sup> 的 Hopf 分支定理, 可以得到关于系统(1)稳定性及 Hopf 分支的主要结果.

**定理 1** 对系统(1), 假设条件 H1), H2), H4), H6) 和 H7) 成立且  $\tau_2 \in [0, \tau_{2_0})$ , 那么当  $\tau_1 \in [0, \tau_{1_0})$  时, 平衡点  $E_0(0, 0)$  是渐近稳定的. 当  $\tau_1 = \tau_{1_0}$  时, 系统(1)在平衡点  $E_0(0, 0)$  附近出现 Hopf 分支.

**注 1** 虽然文献[9-10]也研究了该模型或者类似该模型的稳定性及 Hopf 分支特性, 但他们是选择不同时滞的值的平均值作为分支参数, 对于不同的时滞对系统的稳定性和 Hopf 分支的影响并没有给出. 因此, 文中的研究是对文献[9-10]的补充.

## 2 数值模拟

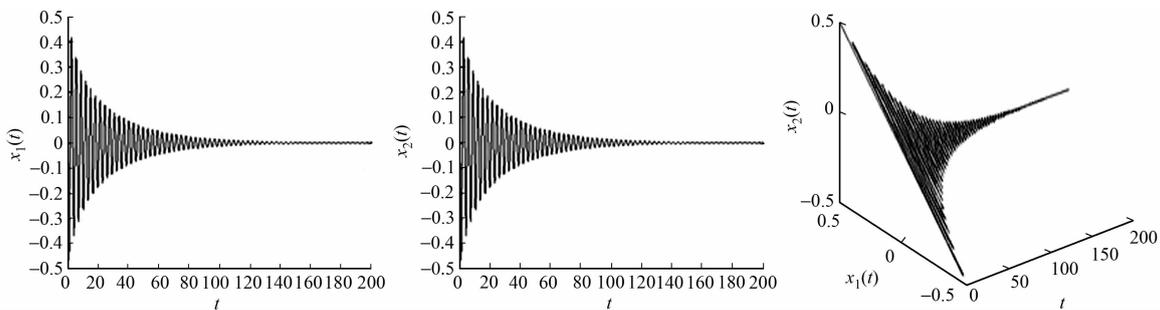
考虑系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_1(t) &= -u_1(t) + 0.5 \tanh(u_1(t - \tau_1)) - 2 \tanh(u_2(t - \tau_2)), \\ \dot{u}_2(t) &= -u_2(t) + 0.5 \tanh(u_1(t - \tau_1)) - 2 \tanh(u_2(t - \tau_2)). \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

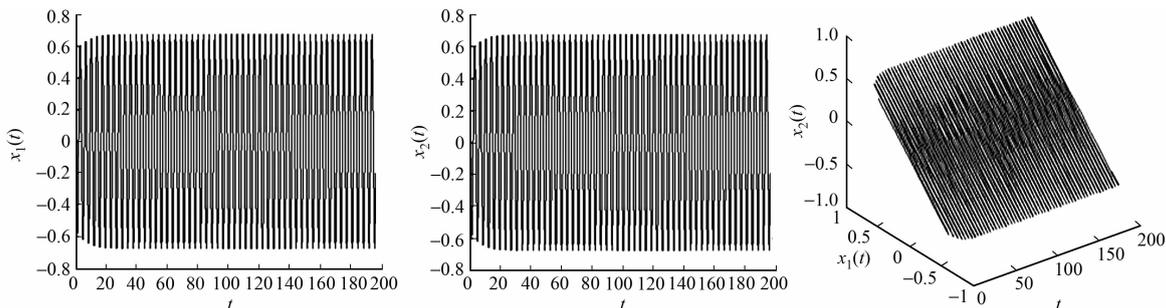
显然, 系统有唯一的平衡点  $E_0(0, 0)$ . 当  $\tau_1 = 0$ , 很容易验证条件 H2) 和 H4) 满足.

利用 Matlab 7.0 计算, 可以得到  $\omega_0 \approx 0.2437, \tau_{1_0} \approx 1.1$ . 此外, 由引理 2 可知横截条件成立. 于是, 当  $\tau_2 < \tau_{2_0} \approx 1.1$  时, 平衡点  $E_0(0, 0)$  是渐近稳定的; 当  $\tau_2 > \tau_{2_0} \approx 1.1$  时, 平衡点  $E_0(0, 0)$  是不稳定的(图 1(a)); 而当  $\tau_2 = \tau_{2_0} \approx 1.1$  时, 方程(13)在平衡点  $E_0(0, 0)$  处出现 Hopf 分支, 即一小振幅的周期解在平衡点  $E_0(0, 0)$  处出现(图 1(b)).

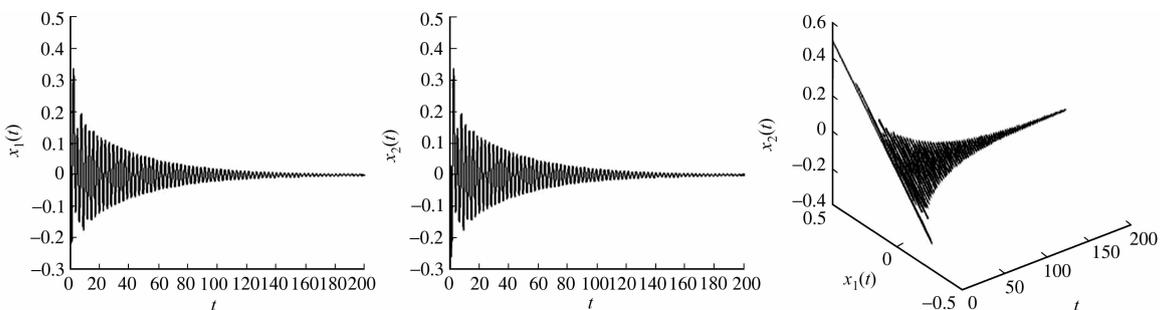
设  $\tau_2 = 0.9 \in [0, 1.1)$  并选择  $\tau_1$  为参数, 有  $\tau_{1_0} \approx 4.8$ . 当  $\tau_1 \in [0, \tau_{1_0})$  时, 平衡点是渐近稳定的, 系统(14)的 Hopf 分支值是  $\tau_{1_0} \approx 4.8$ . 当  $\tau_1 < \tau_{1_0}$  时, 平衡点  $E_0(0, 0)$  是稳定的(图 1(c)); 而当  $\tau_1$  通过  $\tau_{1_0}$ , 平衡点  $E_0(0, 0)$  失去稳定性且 Hopf 分支产生, 也就是一簇周期解从平衡点  $E_0(0, 0)$  附近出现(图 1(d)).



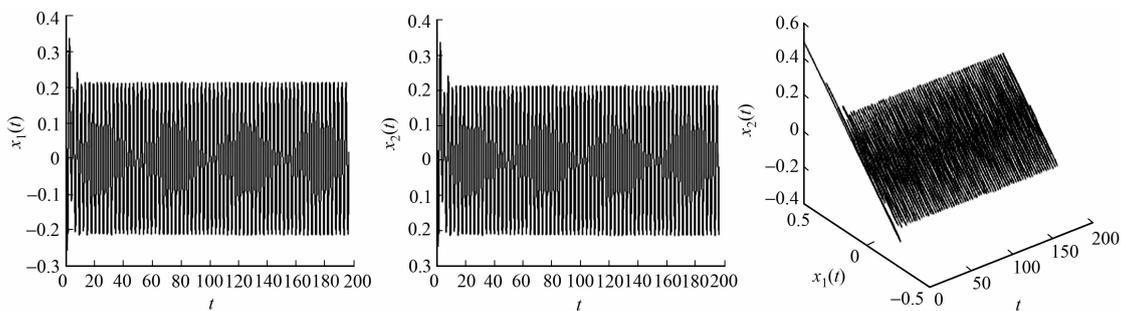
(a)  $\tau_1 = 0, \tau_2 = 0.9 < \tau_{2_0} \approx 0.95$



(b)  $\tau_1 = 0, \tau_2 = 1.1 > \tau_{2_0} \approx 0.95$



(c)  $\tau_2 = 0.9, \tau_1 = 4.7 < \tau_{1_0} \approx 4.8$



(d)  $\tau_2 = 0.9, \tau_1 = 5 > \tau_{1_0} \approx 4.8$

图 1 系统(14)的动力学行为

Fig. 1 Dynamic behavior of the system (14)

## 参考文献:

- [1] HOPFIELD J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences USA, 1984, 81(10): 3088-3092.
- [2] XU Chang-jin, TANG Xianhua, LIAO Mao-xin. Frequency domain analysis for bifurcation in a simplified tri-neuron BAM network model with two delays [J]. Neural Networks, 2010, 23(7): 872-880.
- [3] XU Chang-jin, HE Xiao-fei, LI Pei-luan. Global existence of periodic solutions in a six-neuron BAM neural network model with discrete delays [J]. Neurocomputing, 2011, 74(17): 3257-3267.
- [4] XU Chang-jin, TANG Xianhua, LIAO Mao-xin. Stability and bifurcation analysis of a six-neuron BAM neural network model with discrete delays [J]. Neurocomputing, 2011, 74(5): 689-707.
- [5] ZHANG Zheng-qiu, YANG Yan, HUANG Ye-sheng. Global exponential stability of interval general BAM neural networks with reaction-diffusion terms and multiple time-varying delays [J]. Neural Networks, 2011, 24(5): 457-465.
- [6] GUO Shang-jiang, YUAN Yuan. Delay-induced primary rhythmic behavior in a two-layer neural network [J]. Neural Networks, 2011, 24(1): 65-74.
- [7] GUO Shang-jiang. Equivariant Hopf bifurcation for functional differential equations of mixed type [J]. Applied Mathematics Letters, 2011, 24(5): 724-730.
- [8] 刘云辉, 李钟慎. 改进型模糊神经网络模型的构造 [J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2010, 31(3): 256-259.
- [9] HUANG Chuang-xia, HE Yi-gang, HUANG Li-hong, et al. Hopf bifurcation analysis of two neurons with three delays [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2007, 8(3): 903-921.
- [10] YUAN Shao-liang, LI Xue-mei. Stability and bifurcation analysis of an annular delayed neural network with self-connection [J]. Neurocomputing, 2010, 73(16/17/18): 2905-2912.
- [11] OLIEN L, BELAIR J. Bifurcations, stability, and monotonicity properties of a delayed neural networks model [J]. Physica D, 1997, 102(3/4): 349-363.
- [12] RUAN Shi-gui, WEI Jun-jie. On the zero of some transcendental functions with applications to stability of delay differential equations with two delays [J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis, 2003, 10(1): 863-874.
- [13] HALE J K, VERDUYN-LUNEL S M. Introduction to functional differential equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1993.

## Bifurcation Analysis of a Delayed Neural Networks

XU Chang-jin, YAO Ling-yun

(1. Guizhou Key Laboratory of Economics System Simulation,

Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550004, China;

2. Library, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550004, China)

**Abstract:** In this paper, a delayed neural networks model is investigated. By analyzing the associated characteristic equation and studying how the different delays affect the dynamical behavior of system, the condition of stability of equilibrium and the existence of Hopf bifurcation are obtained. Numerical simulations are carried out to justify the theoretical findings. Our result is a good complement to the earlier publications.

**Keywords:** neural networks; stability; Hopf bifurcation; delay

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 黄心中)