第 33 卷 第 5 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 33 No. 5
2012 年 9 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Sep. 2012

文章编号： 1000-5013(2012)05-0595-06

Bernstein 算子矩阵法求高阶弱奇异积分微分方程数值解

单锐，魏金侠，张雁

(燕山大学 理学院，河北 秦皇岛 066004)

摘要： 为了求高阶变系数且带有弱奇异积分核 Volterra-Fredholm 积分微分方程的数值解，提出了 Bernstein 算子矩阵法. 利用 Bernstein 多项式的定义及其性质给出任意阶弱奇异积分的近似求积公式，同时也给出 Bernstein 多项式的微分算子矩阵. 通过化简所求方程及离散化简后的方程，可将原问题转换为求代数方程组的解. 最后，通过收敛性分析说明该方法是收敛的，并用数值算例验证了方法的有效性.

关键词： 高阶变系数；弱奇异；积分微分方程；Bernstein 多项式；算子矩阵；数值解

中图分类号： O 241.8 **文献标志码：** A

Bernstein 多项式在数学的各个领域有着重要的应用，这些多项式经常被用来求解积分方程、微分方程的数值解以及近似理论分析[1]. 近些年来，越来越多的积分、微分方程的数值解通过各种多项式的算子矩阵求得. 文献[2]利用 Bernstein 多项式的算子矩阵求解微分方程；Maleknejad 等[3]利用 Bernstein 多项式的算子矩阵求解非线性 Volterra- Fredholm-Hammerstein 积分方程. 积分微分方程数值解问题一直是研究的重要课题. 许多科学与工程领域的问题都可以转化为积分微分方程[4-5]. 其中，Volterra-Fredholm 积分微分方程是一类人们特别感兴趣的方程，已经给出了很多种数值算法. 文献[6]使用 Legendre 小波求解 Fredholm 积分方程；文献[7]利用 Cattani′s 方法求一类线性 Fredholm 积分微分方程；文献[8]采用 Bernstein 算子矩阵法求解高阶线性 Volterra-Fredholm 积分微分方程组. 然而，对于高阶变系数并含任意阶弱奇异积分核的 Volterra-Fredholm 积分微分方程的数值解的研究较少. 本文通过 Bernstein 多项式及其算子矩阵对这类方程进行讨论，将求原方程的数值解问题转化为求解代数方程组，使得计算大大简化.

1 Bernstein 多项式及其性质

1.1 Bernstein 多项式[8]

结合 Bernstein 多项式及其算子矩阵，考虑如下形式积分微分方程，有

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)y^{(i)}(t)+\lambda_1\int_0^t (t-s)^{-\alpha}y(s)\mathrm{d}s+\lambda_2\int_0^1 K(t,s)y(s)\mathrm{d}s=f(t), \tag{1}$$

满足的初始条件为 $y^{(n-1)}(0)=y_{n-1}, y^{(n-2)}(0)=y_{n-2},\cdots,y(0)=y_0$. 式中：$K(t,s)$，$f(t)$，$a_i(t)$ 为已知的连续函数；$y(t)$ 为未知函数且 $y(t)\in L^2([0,1])$；$y^{(i)}(t)$ 为 $y(t)$ 的 i 阶导数；$\lambda_1,\lambda_2,\alpha$ 为常数，且 $0<\alpha<1$.

定义 1 n 次 Bernstein 多项式定义为

$$B_{i,n}(x)=\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}. \tag{2}$$

收稿日期： 2012-03-01

通信作者： 单锐(1961-)，女，教授，主要从事偏微分方程、积分微分方程数值解和最优化理论的研究. E-mail：weijinxiaymx201366@163.com.

基金项目： 河北省教育厅科学研究计划项目(2009159)

由$(1-x)^{n-i}$的二项式展开可得

$$\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i} = \sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k\binom{n}{i}\binom{n-i}{k}x^{i+k}. \tag{3}$$

令 $\boldsymbol{\Phi}(x)=[B_{0,n}(x),B_{1,n}(x),\cdots,B_{n,n}(x)]^{\mathrm{T}}$,则

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}_n(x). \tag{4}$$

式(4)中:$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} (-1)^0\binom{n}{0} & (-1)^1\binom{n}{0}\binom{n-0}{1} & \cdots & (-1)^{n-0}\binom{n}{0}\binom{n-0}{n-0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (-1)^0\binom{n}{i} & \cdots & (-1)^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{n-i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & (-1)^0\binom{n}{n} \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\Delta}_n(x)=[1,x,\cdots,x^n]^{\mathrm{T}}$.

1.2 函数的近似

若 $f(x)\in L^2([0,1])$,则 $f(x)$可以利用 Bernstein 多项式基展开为

$$f(x) \cong \sum_{i=0}^{n}c_iB_{i,n}(x) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(x). \tag{5}$$

其中:$\boldsymbol{c}=[c_0,c_1,\cdots,c_n]^{\mathrm{T}}$. 令

$$\boldsymbol{Q} = \int_0^1\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(x)\mathrm{d}x, \tag{6}$$

则由式(4)可得

$$\boldsymbol{Q} =\int_0^1\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}_n(x))(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}_n(x))^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x =$$

$$\boldsymbol{A}[\int_0^1\boldsymbol{\Delta}_n(x)\boldsymbol{\Delta}_n^{\mathrm{T}}(x)\mathrm{d}x]\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, \tag{7}$$

式(7)中:$\boldsymbol{H}$ 为 Hilbert 矩阵,有

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}.$$

2 任意阶弱奇异积分的近似求积公式

设 $y(s)\in L^2([0,1])$,考虑如下弱奇异积分

$$I(t) = \int_0^t\frac{y(s)}{(t-s)^\alpha}\mathrm{d}s, \qquad 0\leqslant t\leqslant 1, \quad 0<\alpha<1, \tag{8}$$

令

$$f(s) \cong \sum_{i=0}^{n}c_iB_{i,n}(s) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(x) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}_n(s), \tag{9}$$

则有

$$I(t) =\int_0^t\frac{y(s)}{(t-s)^\alpha}\mathrm{d}s \cong \int_0^t\frac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(s)}{(t-s)^\alpha}\mathrm{d}s =$$

$$\int_0^t\frac{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}_n(s)}{(t-s)^\alpha}\mathrm{d}s = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\int_0^t\frac{\boldsymbol{\Delta}_n(s)}{(t-s)^\alpha}\mathrm{d}s. \tag{10}$$

由于 $\boldsymbol{\Delta}_n(s)=[1,s,\cdots,s^n]^{\mathrm{T}}$,故要计算式(10),只需计算

$$I_m(t) = \int_0^t\frac{s^m}{(t-s)^\alpha}\mathrm{d}s, \tag{11}$$

通过计算容易得到

$$\begin{aligned}I_m(t)=&\int_0^t\frac{s^m}{(t-s)^\alpha}\mathrm{d}s=-\frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\cdot s^m\Big|_0^t+\frac{m}{1-\alpha}\int_0^t(t-s)^{1-\alpha}\cdot s^{m-1}\mathrm{d}s=\\&\frac{m}{1-\alpha}\int_0^t(t-s)\cdot\frac{s^{m-1}}{(t-s)^\alpha}\mathrm{d}s=\\&\frac{m}{1-\alpha}\int_0^t t\cdot\frac{s^{m-1}}{(t-s)^\alpha}\mathrm{d}s-\frac{m}{1-\alpha}\int_0^t\frac{s^m}{(t-s)^\alpha}\mathrm{d}s=\\&\frac{m}{1-\alpha}t\cdot I_{m-1}(t)-\frac{m}{1-\alpha}I_m(t).\end{aligned}\tag{12}$$

所以有

$$I_m(t)=\frac{mt}{1-\alpha+m}I_{m-1},\tag{13}$$

进而有

$$I_m(t)=\frac{m!t^m}{(1-\alpha+m)(1-\alpha+m-1)\cdots(1-\alpha+1)}I_0(t).\tag{14}$$

式(14)中：

$$I_0(t)=\int_0^t\frac{1}{(t-s)^\alpha}\mathrm{d}s=\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

将其代入式(14)可得

$$I_m(t)=\frac{m!t^{m+1-\alpha}}{(m+1-\alpha)(m-\alpha)(m-\alpha-1)\cdots(2-\alpha)(1-\alpha)}.\tag{15}$$

结合式(10),(11),(15),可得

$$I(t)=t^{1-\alpha}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AD\Delta}_n(t).\tag{16}$$

式(16)中：

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1/(1-\alpha)&0&0&\cdots&0\\0&1!/(2-\alpha)(1-\alpha)&0&\cdots&0\\0&0&2!/(3-\alpha)(2-\alpha)(1-\alpha)&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&\begin{matrix}n!/(n+1-\alpha)\times\\(n-\alpha)\cdots(1-\alpha)\end{matrix}\end{bmatrix}.$$

式(16)即为弱奇异积分的近似求积公式.

3　Bernstein 多项式的微分算子矩阵[8]

设 $\boldsymbol{\Phi}'(x)=\boldsymbol{F\Phi}(x)$,其中 $\boldsymbol{F}$ 是 $(n+1)\times(n+1)$ 阶矩阵,称为 Bernstein 多项式微分算子矩阵. 由式(4)可知

$$\boldsymbol{\Phi}'(x)=\boldsymbol{A}[0,1,2x,\cdots,nx^{n-1}]^{\mathrm{T}},\tag{17}$$

$$\boldsymbol{\Phi}'(x)=\boldsymbol{AV\Delta}_n^*,\tag{18}$$

式(18)中：

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0\\1&0&&0\\0&2&&0\\\vdots&&&\vdots\\0&0&\cdots&n\end{bmatrix},\qquad\boldsymbol{\Delta}_n^*=[1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}]^{\mathrm{T}}.$$

因为 $x^k=\boldsymbol{A}^{-1}_{[k+1]}\boldsymbol{\Phi}(x)$,其中 $\boldsymbol{A}^{-1}_{[k+1]}$ 表示 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 $k+1$ 行,$k=0,1,\cdots,n$. 所以有

$$\boldsymbol{\Delta}_n^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{\Phi}(x),\tag{19}$$

式(19)中：$\boldsymbol{B}^*=[\boldsymbol{A}^{-1}_{[1]},\boldsymbol{A}^{-1}_{[2]},\cdots,\boldsymbol{A}^{-1}_{[n]}]^{\mathrm{T}}$,进而有

$$\boldsymbol{\Phi}'(x)=\boldsymbol{AVB\Phi}(x).\tag{20}$$

此时,可以得到 Bernstein 多项式微分算子矩阵为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{AVB}^{*}. \tag{21}$$

如果 $y(x)\cong\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(x)$,则对于 $i\geqslant2$,有

$$y^{(i)}(x)\cong\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{(i)}(x)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{i}\boldsymbol{\Phi}(x). \tag{22}$$

4 Bernstein 算子矩阵法求解高阶积分微分方程

考虑如下高阶变系数且带有弱奇异积分核的 Volterra-Fredholm 积分微分方程:

$$\sum_{i=0}^{n}a_i(t)y^{(i)}(x)+\lambda_1\int_0^t(t-s)^{-\alpha}y(s)\mathrm{d}s+\lambda_2\int_0^1K(t,s)y(s)\mathrm{d}s=f(t), \tag{23}$$

由式(6)可令

$$y(t)\cong\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\Delta}_n(t), \tag{24}$$

由根据式(22),有

$$y^{(i)}(t)\cong\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{(i)}(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{i}\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{i}\boldsymbol{A\Delta}_n(t), \tag{25}$$

同样利用 Bernstein 多项式基展开 $K(t,s)$得

$$K(t,s)\cong\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K\Phi}(s), \tag{26}$$

由于 $K(t,s)$为已知函数,故离散式(26),可求出矩阵 $\boldsymbol{K}$. 利用式(5),可得

$$\int_0^1K(t,s)y(s)\mathrm{d}s\cong\int_0^1\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K\Phi}(s)\cdot\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{c}\mathrm{d}s=$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{K}\int_0^1\boldsymbol{\Phi}(s)\cdot\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\boldsymbol{c}=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{KQc}, \tag{27}$$

将式(4)代入式(27),可得

$$\int_0^1K(t,s)y(s)\mathrm{d}s\cong\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\Delta}_n(t). \tag{28}$$

此时,将式(25),(16),(28)代入式(23),可得

$$\sum_{i=0}^{n}a_i(t)\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{i}\boldsymbol{A\Delta}_n(t)+\lambda_1t^{1-\alpha}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AD\Delta}_n(t)+\lambda_2\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\Delta}_n(t)=f(t). \tag{29}$$

以等距步长离散式(29),可得

$$\sum_{i=0}^{n}a_i(t_j)\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{i}\boldsymbol{A\Delta}_n(t_j)+\lambda_1t_j^{1-\alpha}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AD\Delta}_n(t_j)+\lambda_2\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\Delta}_n(t_j)=f(t_j). \tag{30}$$

显然,当 $j=0,1,\cdots,n$ 时,式(30)可转化为线性代数方程组.

5 收敛性分析

引理 1[9] 设 $y_m^{(i)}(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{i}\boldsymbol{\Phi}(t)$为 $y^{(i)}(t)$,$i=1,2,\cdots,n$ 的近似解,则对于任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 N_i,$i=1,2,\cdots,n$,使得当 $m>N_i$ 时,对 $\forall t\in[0,1]$,有 $\|y_m^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)\|<\varepsilon$. 其中:$\boldsymbol{c}=[c_0,c_1,\cdots,c_n]^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{\Phi}(x)=[B_{0,m}(x),B_{1,m}(x),\cdots,B_{m,m}(x)]^{\mathrm{T}}$

引理 2[9] 设 $y_m(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(t)$为 $y(t)$的近似解,则对于任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 N_{n+1},使得当 $m>N_{n+1}$时,对 $\forall t\in[0,1]$有 $\|y_m(t)-y(t)\|<\varepsilon$. 其中:$\boldsymbol{c}=[c_0,c_1,\cdots,c_m]^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{\Phi}(x)=[B_{0,m}(x),B_{1,m}(x),\cdots,B_{m,m}(x)]^{\mathrm{T}}$. 令

$$f_m(t)=\sum_{i=0}^{n}a_i(t)y_m^{(i)}(t)+\lambda_1\int_0^t(t-s)^{-\alpha}y_m(s)\mathrm{d}s+\lambda_2\int_0^1K(t,s)y_m(s)\mathrm{d}s,$$

则有如下定理.

定理 1 若 $y_m^{(i)}(t)$,$y_m(t)$的定义同上,对任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得当 $m>N$ 时,有 $\|f_m(t)-f(t)\|<\varepsilon$.

证明 由于 $a_i(t)$,$i=0,1,2,\cdots,n$ 为$[0,1]$上的连续函数,故存在正整数 M_i,$i=0,1,2,\cdots,n$,使得 $\forall t\in[0,1]$,有 $\|a_i(t)\|\leqslant M_i$.

同时，存在正整数 M_{n+1}，使得 $\forall(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$，有 $\|K(t,s)\|\leqslant M_{n+1}$.

取 $M=\max\{M_0,M_1,\cdots,M_{n+1}\}$ 由引理 1,2 可知

$$\begin{aligned}\|f_m(t)-f(t)\| &= \Big\|\sum_{i=0}^{n}a_i(t)[y_m^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)]+\lambda_1\int_0^t\frac{y_m(s)-y(s)}{(t-s)^{\alpha}}\mathrm{d}s+\\ &\lambda_2\int_0^1K(t,s)[y_m(s)-y(s)]\mathrm{d}s\Big\| \leqslant \Big\|\sum_{i=0}^{n}a_i(t)[y_m^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)]\Big\|+\\ &\Big\|\lambda_1\int_0^t\frac{y_m(s)-y(s)}{(t-s)^{\alpha}}\mathrm{d}s\Big\|+\Big\|\lambda_2\int_0^1K(t,s)[y_m(s)-y(s)]\mathrm{d}s\Big\|\leqslant\\ &\sum_{i=0}^{n}\|a_i(t)\|\cdot\|y_m^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)\|+\lambda_1\int_0^t\frac{\|y_m(s)-y(s)\|}{(t-s)^{\alpha}}\mathrm{d}s+\\ &\lambda_2\int_0^1\|K(t,s)\|\,\|y_m(s)-y(s)\|\mathrm{d}s\leqslant nM\varepsilon+\frac{\lambda_1}{1-\alpha}\varepsilon+\lambda_2M\varepsilon=\\ &(nM+\frac{\lambda_1}{1-\alpha}+\lambda_2M)\varepsilon.\end{aligned}$$

因此，取 $N=\max\{M,N_1,N_2,\cdots,N_{n+1}\}$.

当 $m>N$ 时，由 ε 的任意性可知 $\|f_m(t)-f(t)\|<\varepsilon$，定理证毕. 定理 1 说明了所提方法是收敛的.

6　数值算例

考虑 Volterra-Fredholm 积分微分方程

$$\sum_{i=0}^{4}t^iy^{(i)}(t)+\int_0^t(t-s)^{-1/2}y(s)\mathrm{d}s+\int_0^1(t+s)y(s)\mathrm{d}s=f(t). \tag{31}$$

式(31)中：$f(t)=65t^4+32t^3+\frac{7}{10}t+\frac{17}{30}+\frac{\sqrt{\pi}t^{9/2}\Gamma(5)}{\Gamma(11/2)}+\frac{2\sqrt{\pi}t^{7/2}\Gamma(4)}{\Gamma(9/2)}$，其精确解为 $y(t)=t^4+2t^3$. 取 n 分别为 $n=4$，$n=5$，$n=6$，用 MATLAB 软件计算数值解与精确解的绝对误差，如表 1 所示.

表 1　数值解与精确解的绝对误差

Tab. 1　Absolute error of numerical solution and exact solution

t	$n=4$	$n=5$	$n=6$
0	$1.110\,2\times10^{-15}$	$1.054\,7\times10^{-15}$	$7.105\,4\times10^{-15}$
0.1	$2.944\,7\times10^{-16}$	$2.723\,0\times10^{-15}$	$4.994\,3\times10^{-15}$
0.2	$9.089\,9\times10^{-16}$	$9.853\,2\times10^{-15}$	$2.112\,9\times10^{-15}$
0.3	$9.367\,5\times10^{-16}$	$3.393\,1\times10^{-15}$	$1.651\,4\times15^{-15}$
0.4	$4.996\,0\times10^{-16}$	$8.215\,6\times10^{-15}$	$5.467\,8\times10^{-15}$
0.5	$2.220\,4\times10^{-15}$	$1.165\,7\times10^{-14}$	$8.548\,7\times10^{-15}$
0.6	$1.110\,2\times10^{-15}$	$1.232\,3\times10^{-14}$	$1.043\,6\times10^{-14}$
0.7	$1.776\,3\times10^{-15}$	$9.103\,8\times10^{-15}$	$1.143\,5\times10^{-14}$
0.8	$2.442\,5\times10^{-15}$	$1.332\,3\times10^{-15}$	$1.221\,2\times10^{-14}$
0.9	$2.220\,4\times10^{-15}$	$1.154\,6\times10^{-14}$	$1.509\,9\times10^{-14}$

计算结果表明，结合 Bernstein 多项式的算子矩阵，上述方法可以对含高阶变系数且带有弱奇异积分核 Volterra-Fredholm 积分微分方程进行数值求解，验证了该方法的有效性和可行性. 同时通过表 1，可以看到所提方法具有高精度，且使用较强.

7　结论

利用 Bernstein 多项式并结合算子矩阵的思想，对变系数做了有效的离散 . 将变系数且带有弱奇异积分核 Volterra-Fredholm 积分微分方程转化为熟悉的线性代数方程，从而更容易计算机求解. 通过收敛性分析，理论上说明了所提方法是收敛的. 数值算例进一步表明，该方法所得数值解精度高，且计算量小，是一种有效的算法.

参考文献:

[1] MALEKNEJAD K. A new approach to the numerical solution of Volterra integral equations by using bernstein's approximation[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simul,2011,16(2):647-655.

[2] YOUSEFI S A,BEHROOZIFAR M. Operational matrices of bernstein polynomials and their applications[J]. Internat J Systems Sci,2010,41(6):709-716.

[3] MALEKNEJAD K,HASHEMIZADEH E,BASIRAT B. Computational method based on bernstein operational matrices for nonlinear Volterra-Fredholm-hammerstein integral equations[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 2011,17(1):52-61.

[4] DELVES L M,MOHAMED J L. Computational methods for integral equations[M]. Cambridge:Cambridge University Press,1985.

[5] SCHIAVANE P,CONSTANDA C,MIODUCHOWSKI A. Integral methods in science and engineering[M]. Boston: Birkhäuser Boston,2002.

[6] RAZZAGHI M. The legendre wavelets operational matrix of integration[J]. Int J Syst Sci,2001,32(4):495-502.

[7] MALEKNEJA K. An efficient numerical approximation for the linear class of Fredholm integro-differential equations based on Cattani's method[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat,2011,16(7):2672-2679.

[8] MALEKNEJAD K. A Bernstein operational matrix approach for solving a system of high order linear Volterra-Fredholm integro-differential equations[J]. Mathematical and Computer Modelling,2012,55(3/4):1363-1372.

[9] PHILLIPS G M. Interpolation and approximation by polynomials[M]. New York :Springerr,2003.

Bernstein Operational Matrix Method for Solving the Numerical Solution of High Order Integro-Differential Equation with Weakly Singular

SHAN Rui, WEI Jinxia, ZHANG Yan

(College of Sciences, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: In order to obtain the numerical solution for high order variable coefficients Volterra- Fredholm integro-differential equation with weakly singular kernels, we present a Bernstein operational matrix method in this paper. A approximate formula which solves solution for any arbitrary order weakly singular integral is given by using the definition of Bernstein polynomial and some properties, and a operational matrix of derivative of Bernstein polynomial is also obtained. By translating the original problem through simplifying and descreting the equation, the problem can be transferred into a system of algebraic equations. Convergence analysis shows that the method is convergent. The numerical example shows that the method is effective.

Keywords: high order variable coefficients; weakly singular; integro-differential equation; Bernstein polynomial; operational matrix; numerical solution

(**责任编辑**: 陈志贤 **英文审校**: 黄心中)