第 33 卷　第 5 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 33　No. 5
2012 年 9 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Sep. 2012

文章编号： 1000-5013(2012)05-0584-06

调和映照的 Landau 定理

李东征，陈行堤

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 研究调和映照的 Landau 定理和单叶性半径估计问题，结合有界单叶函数的 Koebe 定理和调和映照的 Schwarz 引理，得到 Landau 常数的渐进精确表示，改进了陈怀惠等近期的研究结果.

关键词： 调和映照；Landau 定理；Bloch 常数；单叶函数

中图分类号： O 174.55　　　**文献标志码：** A

1　预备知识

单连通区域 $\Omega\subset\mathbf{C}$ 内的 $\mathbf{C}^2$ 复值函数 $f(z)$ 被称为调和的，当且仅当它满足 $\Delta f=4f_{z\bar{z}}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$. 其中，$f_z=\dfrac{1}{2}(f_x-\mathrm{i}f_y)$，$f_{\bar{z}}=\dfrac{1}{2}(f_x+\mathrm{i}f_y)$. 由文献[1]可知，存在 Ω 上两个解析函数 $h(z)$ 与 $g(z)$，使得 $f=h+\bar{g}$.

记 $\Lambda_f(z)=\max\limits_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|f_z(z)+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}f_{\bar{z}}(z)|=|f_z(z)|+|f_{\bar{z}}(z)|=|h'|+|g'|$ 和 $\lambda_f(z)=\min\limits_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|f_z(z)+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}f_{\bar{z}}(z)|=||f_z(z)|-|f_{\bar{z}}(z)||=||h'||g'||$. 根据 Schwarz 引理[2]，如果单位圆盘 $D=\{z||z|<1\}$ 上的解析函数 $f(z)$ 满足 $f(0)=0$，$|f(z)|<1$，则有 $|f'(0)|\leqslant 1$，且等号成立当且仅当 $f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}z$，其中 α 为实常数. 即如果 $|f'(0)|=1$，则 $f(z)$ 在单位圆盘上都单叶且其单叶像圆盘半径为 1. Landau[3] 对 $|f'(0)|=\alpha$，$0<\alpha<1$ 的情形进行了研究，得到如下定理.

定理 A[3]　若 $f(z)$ 为单位圆盘 D 上的解析函数，满足 $f(0)=0$，$|f(z)|<1$，$z\in D$，$|f'(0)|=\alpha>0$，则 $f(z)$ 在圆盘 D_{r_0} 上单叶，且 $f(D_{r_0})$ 包含一个圆盘 $|\omega|<R_0$，其中：$r_0=\dfrac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}>\dfrac{\alpha^2}{2}$，$R_0=r_0^2$.

文献[1,4-6]在有界像域和有界偏导数的两种规范条件下，展开了 Landau 定理在调和映照类中的推广研究；而在其他类中的推广研究也有不少成果[7-11].

定理 B[4]　如果 $f(z)$ 为单位圆盘 D 上的保向调和映照，且满足 $f_z(0)=\alpha>0$，$f(0)=0$，$f_{\bar{z}}(0)=0$，$|f(z)|<1$，$z\in D$，那么 $f(z)$ 在某一包含原点的区域上单叶，其像区域包含一个以原点为圆心，R_0 为半径的圆盘．其中：$R_0=kr'^2\left(1-\dfrac{r'}{2}\right)$；$r'=\dfrac{\alpha}{2k+\sqrt{4k^2-\alpha^2}}$；$k=\dfrac{2\log 3}{\pi}$.

在定理 B 中，未给出 $f(z)$ 的单叶圆盘半径的估计. 针对调和映照的单叶圆盘和单叶像圆盘的半径估计的两个问题，借助有界单叶函数的 Koebe 定理和调和映照的 Schwarz 引理[12-13]，可得到

定理 1　如果 D 上的保向调和映照 $f(z)$ 满足 $f(0)=0$，$f_z(0)=\alpha>0$，$g(z)=b_m z^m+b_{m+1}z^{m+1}+\cdots$ $(b_m\neq 0,m\geqslant 2)$，$|f(z)|<1$，则 $f(z)$ 在圆盘 D_r 上单叶，且 $f(z)$ 的单叶像区域包含一个以原点为中心，R_1 为半径的圆盘，$R_1=(1-r_0^{m-1})R''$.

当 $2\leqslant m\leqslant 3$ 时，有

收稿日期： 2011-10-22

通信作者： 陈行堤(1976-)，男，副教授，主要从事函数论的研究. E-mail：chxtt@hqu.edu.cn.

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11101165)；福建省自然科学基金资助项目(2011J01011)；中央高校基本科研业务费专项基金资助项目，华侨大学基本科研专项基金资助项目(JB-ZR1136)

$$r \geqslant \frac{b^2 \alpha k}{(k+\sqrt{k^2-(b\alpha)^2}+\sqrt{k^2-(b\alpha)^2+k\sqrt{k^2-(b\alpha)^2}})^2},$$

$$r_0=\frac{b^2\alpha}{k+\sqrt{k^2-(b\alpha)^2}},\qquad R''=\frac{kb^2\alpha^2}{(k+\sqrt{k^2-(b\alpha)^2})^2},\qquad k=\frac{2}{\pi}\log\frac{1+b}{1-b};$$

当 $m>3$ 时，有

$$r \geqslant \frac{b^2 c\alpha}{(c+\sqrt{c^2-b^2\alpha^2}+\sqrt{c^2-b^2\alpha^2+c\sqrt{c^2-b^2\alpha^2}})^2},$$

$$r_0=\frac{b^2\alpha}{c+\sqrt{c^2-(b\alpha)^2}},\qquad R''=\frac{cb^2\alpha^2}{(c+\sqrt{c^2-(b\alpha)^2})^2},\qquad c=1+\frac{2}{\pi}b^{m-4}(\ln\frac{1}{1-b^2}-b^2).$$

其中：b 为小于 1 的正常数.

将定理 1 中的条件 $|f(z)|<1$ 换为其解析部分 $h(z)$，满足 $|h(z)|<1$，得到

定理 2 若 D 上保向有界调和映照 $f(z)$ 满足 $f(0)=0$，$f_z(0)=\alpha>0$，$g(z)=b_m z^m+b_{m+1}z^{m+1}+\cdots$ $(m\geqslant 2)$，$|h(z)|<1$，则 $f(z)$ 存在单叶圆盘 D_r，且 $f(z)$ 的单叶像区域包含 D_R. 其中：$r\geqslant \dfrac{\alpha}{(1+\sqrt{1-\alpha^2}+\sqrt{1-\alpha^2+\sqrt{1-\alpha^2}})^2}>\dfrac{\alpha}{6+2\sqrt{2}}$；$R=(1-r_0^{m-1})r_0^2$；$r_0=\dfrac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}>\dfrac{\alpha}{2}$.

近年来，对于局部单叶调和映照的单叶性问题（比如 Landau 定理、Bloch 常数）的研究已有很多. 在 $h(z)$ 为单叶的条件下，对于 $f(z)$ 的单叶性问题也开始被研究[14-15]. 本文给出了一个在 $h(z)$ 为单叶的条件下，$f(z)$ 的单叶圆盘及像区域单叶圆盘的半径估计.

定理 3 设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ 为 D 上的 K-拟正则调和映照. 若 $h(0)=0$，$h'(0)=1$，且 $h(z)$ 在 D 上单叶，则 f 存在单叶圆盘 D_r 且 f 的单叶像区域包含 D_R. 其中：$r\geqslant\dfrac{1}{4}(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{4}})^2=\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}$；$R=\dfrac{(1-k)}{4}$.

定理 3 中的估计 R 渐近精确于经典 Koebe 定理的结果.

2 引理及其证明

引理 A[7] 设 $f(z)$ 为单位圆盘到自身的调和映照，则 $\sup\limits_{z\in D}(1-|z|^2)(|h'(z)|+|g'(z)|)\leqslant\dfrac{4}{\pi}$.

引理隐含 $\Lambda_f(z)\leqslant\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{1-|z|^2}$，除了调和映照的 Schwarz 引理，还需要有界单叶函数所包含的最大圆盘及 Koebe 定理. 设 $S=\{f\,|\,f$ 为 D 上的单叶解析函数，且形式为 $f=z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots\}$.

引理 B[16] 设 $f(z)\in S$ 且 $|f(z)|<M$，$z\in D$，则有 $\mathrm{dist}(0,\partial f(z))\geqslant(1+\sqrt{1-M^{-1}})^{-2}$.

文献[11]中估计了 $f(z)$ 的解析部分为 z 时的单叶半径，得到

引理 C[11] 设 $f(z)=z+\overline{g(z)}$，$g(z)=b_mz^m+b_{m+1}z^{m+1}+\cdots$，$(b_m\neq 0,m\geqslant 2)$. f 为 $D_r=\{z:|z|\leqslant r\}$ 上的 K-拟正则调和映照，则 f 在 D_r 上单叶，且 $f(D_r)$ 包含一个半径为 R_m 的单叶圆盘，$R_m=r(1-\dfrac{K-1}{m(K+1)})$.

在一定的规范化条件下，估计了调和映照 $f(z)$ 的解析部分 $h(z)$ 的模，得到

引理1 若 f 为单位圆盘 D 上的保向调和映照且满足 $f(0)=0$，$f_z(0)=\alpha>0$，$g(z)=b_mz^m+b_{m+1}\times z^{m+1}+\cdots(b_m\neq 0,m\in N,m\geqslant 2)$，$|f(z)|<1$，则 $|z|\leqslant b<1$，其中 b 是正常数.

当 $2\leqslant m\leqslant 3$ 时，有

$$|h(z)|\leqslant\frac{2}{\pi}\log\frac{1+b}{1-b};$$

当 $m>3$ 时，有

$$|h(z)|<1+\frac{2}{\pi}b^{m-4}(\ln\frac{1}{1-b^2}-b^2).$$

证明 记 $f_z(z)$ 的所有零点的集合为 E,则在 $D\backslash E$ 上,函数 $\mu(z)=\overline{f_{\bar{z}}}/f_z$ 为全纯函数.由于 f 为 D 上的保向调和映照,知 $|\mu(z)|\leqslant 1$,故 E 是可去的,且 $\mu(0)=0$. 由 Schwarz 引理有 $|\mu(z)|<|z|^{m-1}$,即 $|f_{\bar{z}}|\leqslant|z|^{m-1}|f_z|$.

对于 $|z|\leqslant b<1$,当 $2\leqslant m\leqslant 3$ 时,由引理 A 有

$$|h(z)|\leqslant\int_{0\bar{z}}\Lambda_f|\mathrm{d}z|\leqslant\frac{4}{\pi}\int_{0\bar{z}}\frac{1}{1-|z|^2}|\mathrm{d}z|=\frac{2}{\pi}\log\frac{1+|z|}{1-|z|}<\frac{2}{\pi}\log\frac{1+b}{1-b};$$

当 $m>3$ 时,有 $|f(z)|<1$,$z\in D$,$|h(z)+\overline{g(z)}|<1$,即 $|h(z)|-|g(z)|<1$. 所以有

$$|h(z)|<1+|g(z)|=1+\left|\int_{0\bar{z}}g'(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant 1+\frac{2}{\pi}b^{m-4}(\log\frac{1}{1-b^2}-b^2).$$

注 1 当 $m\to\infty$ 时,$|h(z)|<1$.

引理2 若 $f(z)$ 为单位圆盘 $D=\{z\,|\,|z|<1\}$ 上的解析函数,且满足 $f(0)=0$,$f'(0)=\alpha>0$,$|f(z)|<1$,$z\in D$,则 $f(z)$ 在圆盘 D_{r_0} 上单叶,$f(D_{r_0})$ 包含圆盘 $|\omega|<R_0$,$f^{-1}(D_{R_0})$ 包含圆盘 $|z|\leqslant R$. 其中:$r_0=\dfrac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}>\dfrac{\alpha}{2}$;$R_0=r_0^2$;$R\geqslant\dfrac{\alpha}{(1+\sqrt{1-\alpha^2}+\sqrt{1-\alpha^2+\sqrt{1-\alpha^2}})^2}>\dfrac{\alpha}{6+4\sqrt{2}}$.

证明 由定理 A 可知,$f(z)$ 在圆盘 D_{r_0} 上单叶,且 $f(D_{r_0})$ 包含一个圆盘 $|\omega|<R_0$. 其中:$r_0=\dfrac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}>\dfrac{\alpha}{2}$;$R_0=r_0^2$. 令 $F(w)=\dfrac{\alpha f^{-1}(R_0 w)}{R_0}$,$w\in D$,则 $F(w)$ 为单位圆盘上的单叶函数,$F(0)=0$,$|F(w)|<\dfrac{\alpha}{r_0}$,$F'(0)=1$.

由引理 B 可知,$\mathrm{dist}(0,\partial F(w))\geqslant(1+\sqrt{1-\dfrac{r_0}{\alpha}})^{-2}=(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}})^{-2}>\dfrac{1}{3}$. 又因 $F(w)=\dfrac{\alpha f^{-1}(R_0 w)}{R_0}$,则 $\mathrm{dist}(0,\partial F(w))=\dfrac{\alpha}{R_0}\mathrm{dist}(0,\partial f^{-1}(R_0 w))$. 即 $\mathrm{dist}(0,\partial f^{-1}(w))\geqslant\dfrac{R_0}{\alpha}(1+\sqrt{1-\dfrac{r_0}{\alpha}})^{-2}=\dfrac{\alpha}{(1+\sqrt{1-\alpha^2}+\sqrt{1-\alpha^2+\sqrt{1-\alpha^2}})^2}>\dfrac{\alpha}{6+4\sqrt{2}}$. $f^{-1}(D_{R_0})$ 包含圆盘 $|z|\leqslant R$. 其中:$R\geqslant\dfrac{\alpha}{(1+\sqrt{1-\alpha^2}+\sqrt{1-\alpha^2+\sqrt{1-\alpha^2}})^2}>\dfrac{\alpha}{6+4\sqrt{2}}$.

3 主要结果的证明

1) 定理 1 的证明.由引理 1 可知,对任意一个常数 $b<1$,当 $|z|\leqslant b<1$,$2\leqslant m\leqslant 3$ 时,有

$$|h(z)|\leqslant\frac{2}{\pi}\log\frac{1+b}{1-b}=k.$$

令 $H(z)=\dfrac{h(bz)}{k}$,$z\in D$,则 $|H(z)|\leqslant 1$,$H(0)=0$,$H'(0)=\dfrac{bh'(0)}{k}=\dfrac{b\alpha}{k}$. 由引理 2 可知,$H(z)$ 在 $D_{r'}$ 上单叶,$H(D_{r'})$ 包含一个以原点为圆心,半径为 R' 的单叶圆盘 $D_{R'}$. 其中:$r'=\dfrac{b\alpha}{k+\sqrt{k^2-(b\alpha)^2}}$;$R'=r'^2$.

$H^{-1}(D_{R'})$ 包含圆盘 $|z|<R$. 其中:$R\geqslant\dfrac{b\alpha k}{(k+\sqrt{k^2-(b\alpha)^2}+\sqrt{k^2-(b\alpha)^2+k\sqrt{k^2-(b\alpha)^2}})^2}$. 故 $h(z)$ 在 D_{r_0} 上单叶,且 $h(D_{r_0})$ 包含一个以原点为圆心,半径为 R'' 的单叶圆盘 $D_{R''}$. 其中:$r_0=br'=\dfrac{b^2\alpha}{k+\sqrt{k^2-(b\alpha)^2}}$;$R''=kR'$.

由于 $H(z)=\dfrac{h(bz)}{k}$,$z\in D$,故 $H^{-1}(\xi)=z=\dfrac{h^{-1}(k\xi)}{b}$,$\xi\in D_{R'}$,则 $h^{-1}(D_{R''})$ 包含一个圆盘 $|z|\leqslant r$. 其中:$r=bR\geqslant\dfrac{b^2\alpha k}{(k+\sqrt{k^2-(b\alpha)^2}+\sqrt{k^2-(b\alpha)^2+k\sqrt{k^2-(b\alpha)^2}})^2}$.

当 $m>3$ 时,由引理 1 可知,对 $|z|\leqslant b<1$,有

$$|h(z)|<1+\frac{2}{\pi}b^{m-4}(\log\frac{1}{1-b^2}-b^2)=c.$$

令 $H(z)=\frac{h(bz)}{c}$，$z\in D$,则有 $|H(z)|\leqslant 1$，$H(0)=0$，$H'(0)=\frac{bh'(0)}{c}=\frac{b\alpha}{c}$. 由引理 2 可知，$H(z)$在 $D_{r'}$ 上单叶，且 $H(D_{r'})$包含一个以原点为圆心半径为 R'单叶圆盘 $D_{R'}$. 其中：$r'=\frac{b\alpha}{c+\sqrt{c^2-(b\alpha)^2}}$；$R'=r'^2$.

$H^{-1}(D_{R'})$包含一个圆盘 $|z|<R$. 其中：$R\geqslant\frac{bc\alpha}{(c+\sqrt{c^2-b^2\alpha^2}+\sqrt{c^2-b^2\alpha^2+c\sqrt{c^2-b^2\alpha^2}})^2}$. 故 $h(z)$ 在 D_{r_0} 上单叶，且 $h(D_{r_0})$包含一个以原点为圆心，半径为 R''单叶圆盘 $D_{R''}$. 其中：$r_0=br'=\frac{b^2\alpha}{c+\sqrt{c^2-(b\alpha)^2}}$；$R''=cR'$. 故 $h^{-1}(D_{R''})$包含一个圆盘 $D_r(|z|\leqslant r)$. 其中：$r=bR\geqslant\frac{b^2c\alpha}{(c+\sqrt{c^2-b^2\alpha^2}+\sqrt{c^2-b^2\alpha^2+c\sqrt{c^2-b^2\alpha^2}})^2}$.

由引理 1 的证明可知，$|\mu(z)|\leqslant r_0^{m-1}$，$|z|<r_0$. 令 $w=h(z)$，$F(w)=f\circ h^{-1}(w)$，$w\in D_{R''}$，则有

$$|\mu_F|=|\frac{F_{\bar{w}}}{F_w}|=|\frac{f_{\bar{z}}}{f_z}|<r_0^{m-1}<1,$$

所以，$F(w)$为 $D_{R''}$上的 K-拟正则调和函数．其中：$K=\frac{1+r_0^{m-1}}{1-r_0^{m-1}}$.

由引理 C 可知，$F(w)$在 $D_{R''}$上单叶，因此 $f(z)$在 $h^{-1}(D_{R''})$上单叶．又因为 $D_r\subset h^{-1}(D_{R''})$，故 f 在 D_r 上单叶.

令 $G=h^{-1}(D_{R''})\subset D_{r_0}$，对任意的 $z_1,z_2\in G$，$\gamma=h^{-1}(\overline{h(z_1),h(z_2)})$，则有

$$|h(z_1)-h(z_2)|=|\int_\gamma f_z(z)\mathrm{d}z|=\int_\gamma|f_z(z)||\mathrm{d}z|.$$

又由于 $|f_{\bar{z}}|\leqslant r_0^{m-1}|f_z|$，$z\in D_{r_0}$，则有

$$|f(z_1)-f(z_2)|\geqslant|h(z_1)-h(z_2)|-|g(z_1)-g(z_2)|\geqslant(1-r_0^{m-1})|h(z_1)-h(z_2)|.$$

所以有 $|f(z)|\geqslant(1-r_0^{m-1})|h(z)|$. $f(D_{r_0})$至少包含一个以原点为中心，半径为 R_1 的圆盘，$R_1=(1-r_0^{m-1})R''$.

当 $2\leqslant m\leqslant 3$ 时，有

$$r_0=\frac{b^2\alpha}{k+\sqrt{k^2-(b\alpha)^2}},\qquad R''=\frac{b^2k\alpha^2}{(k+\sqrt{k^2-(b\alpha)^2})^2};$$

当 $m>3$ 时，有

$$r_0=\frac{b^2\alpha}{c+\sqrt{c^2-(b\alpha)^2}},\qquad R''=\frac{cb^2\alpha^2}{(c+\sqrt{c^2-(b\alpha)^2})^2}.$$

注 2 当 $m\to\infty$时，$c\to 1$，$R_1\to R''\to\frac{b^2\alpha^2}{(1+\sqrt{1-(b\alpha)^2})^2}$，若此时令 $b\to 1$，就有 $R_1\to\frac{\alpha^2}{(1+\sqrt{1-\alpha^2})^2}$，其与解析函数的一致，故调和映照的像单叶圆盘是渐进精确的.

注 3 此定理给出调和映照具体的单叶区域 D_r，是文献[4]没有指出的.

$f(z)$单叶像圆盘半径 R 与文献[4]比较，如表 1 所示. 表 1 中：对于给定的 α 与 m，关于 b 取极值，得到 R 的极大值.

表 1 圆盘半径 R 的比较

Tab.1 Camparison of the disc radius R

m	R		
	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.9$
2	0.001 119 560	0.026 375 700	0.084 729 500
3	0.001 145 190	0.029 457 700	0.103 500 000
4	0.001 337 040	0.034 978 000	0.127 153 000
10	0.001 605 980	0.043 031 800	0.170 770 000
100	0.002 267 890	0.063 737 800	0.313 052 000
1 000	0.002 474 570	0.070 468 000	0.378 193 000
文献[4]结果	0.000 879 883	0.021 685 000	0.075 961 500

注 4 当 $m=2$，$b=1/2$ 时，便与文献[4]中的 R 值是一样的. 由此可知本定理的结果包含文献[4]的结果.

2) 定理2的证明. 因为$|h(z)|<1, z\in D, h(0)=0$, $h'(0)=\alpha$,故由定理A可知,$h(z)$在D_{r_0}上单叶,其中$r_0=\dfrac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}>\dfrac{\alpha}{2}$,且$h(D_{r_0})$包含一个圆盘$D_{R_0}$,$R_0=r_0^2$. 由引理2可知,$h^{-1}(D_{R_0})$包含一个圆盘$|z|\leqslant r$. 其中:$r\geqslant\dfrac{\alpha}{(1+\sqrt{1-\alpha^2}+\sqrt{1-\alpha^2+\sqrt{1-\alpha^2}})^2}$.

由于f为D上的保向有界调和映照,从引理1的证明可知,$|\mu_f|=|\dfrac{f_{\bar z}}{f_z}|\leqslant r_0^{m-1}<1, z\in D_{r_0}$,因此有$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$为$D_{r_0}$上的$K$-拟正则调和函数. 其中:$K=\dfrac{1+r_0^{m-1}}{1-r_0^{m-1}}$.

令$F(\xi)=f\circ h^{-1}(\xi)=\xi+\bar g\circ h^{-1}(\xi)=\xi+\overline{G(\xi)}, \xi\in h(D_{r_0})$,即有

$$|\mu_F|=|\frac{F_{\bar\xi}}{F_\xi}|=|\frac{f_{\bar z}}{f_z}|\leqslant r_0^{m-1}=\frac{K-1}{K+1}<1,$$

则$F(\xi)$为D_{R_0}上的K-拟正则调和函数,且$|F_{\bar\xi}|\leqslant r_0^{m-1}, \xi\in h(D_{r_0})$.

由引理C可知,$F(\xi)$在D_{R_0}上单叶,即$f(z)$在$h^{-1}(D_{R_0})$上单叶,显然$f(z)$在D_r上单叶.

令$G=h^{-1}(D_{R_0})\subset D_{r_0}$,对任意的$z_1, z_2\in G$,令$\gamma=h^{-1}(\overline{h(z_1), h(z_2)})$,则有

$$|h(z_1)-h(z_2)|=|\int_\gamma f_z(z)\mathrm{d}z|=\int_\gamma |f_z(z)||\mathrm{d}z|,$$

所以有

$$|f(z_1)-f(z_2)|\geqslant|h(z_1)-h(z_2)|-|g(z_1)-g(z_2)|\geqslant(1-r_0^{m-1})|h(z_1)-h(z_2)|.$$

取$z_1=z, z_2=0$,即$|f(z)|\geqslant(1-r_0^{m-1})|h(z)|$.

$f(z)$包含一个单叶像圆盘D_R,$R=(1-r_0^{m-1})R_0$,即$R=(1-r_0^{m-1})r_0^2$.

注5 当$m\to\infty$时,因为$|h(z)|<1, z\in D$,则有$|f(z)|<1, z\in D$,且$R\to R_0=r_0^2$.

注6 当$\alpha=1$时,由Schwarz引理可知,$h(z)=z$,此时有$f(z)$在D上单叶.

3) 定理3的证明. 因为$h(0)=0$, $h'(0)=1$,且$h(z)$在D上单叶,故由Koebe定理知,$h(D)$包含圆盘$D_{1/4}=\{w:|w|<\dfrac{1}{4}\}$. 令$G(\xi)=4h^{-1}(\dfrac{1}{4}\xi)$, $\xi\in D$,由引理B可知,$h^{-1}(D_{1/4})$包含一个半径为r的圆盘. 其中:$r\geqslant\dfrac{1}{4}(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{4}})^{-2}=\dfrac{1}{7+4\sqrt3}$. 令$F(\xi)=f\circ h^{-1}(\xi)$, $\xi\in h(D)$,又因为$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$为$D$上的$K$-拟正则调和映照,则有

$$|\mu_f|=|\frac{f_{\bar z}}{f_z}|\leqslant k=\frac{K-1}{K+1}<1,$$

所以有

$$|\mu_F|=|\frac{F_{\bar\xi}}{F_\xi}|=|\frac{f_{\bar z}}{f_z}|\leqslant k=\frac{K-1}{K+1}<1.$$

$F(\xi)$为$D_{1/4}\subset h(D)$上的K-拟正则调和映照,且$|F_{\bar\xi}|\leqslant k, \xi\in h(D)$.

由引理C可知,$F(\xi)$在$D_{1/4}$上单叶,又由于$h(z)$在D上单叶,所以f在D_r上单叶.

设$\xi_1, \xi_2\in D_{1/4}$,由

$$|F(\xi_1)-F(\xi_2)|\geqslant|\int_{\overline{\xi_1,\xi_2}}F_\xi\mathrm{d}\xi|-|\int_{\overline{\xi_1,\xi_2}}F_{\bar\xi}\mathrm{d}\bar\xi|\geqslant(1-k)|\xi_1-\xi_2|,$$

令$|\xi_1|=\dfrac{1}{4}, \xi_2=0$,则有

$$|F(\xi_1)-F(0)|\geqslant(1-k)|\xi_1|=\frac{(1-k)}{4}.$$

故f在某一包含原点的区域上单叶,此区域的像至少包含半径为R的圆盘,其中$R=\dfrac{(1-k)}{4}$.

推论1 设$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$为$D$上的开调和映照,若$h(0)=0$, $h'(0)=1$, $g'(0)=0$, $h(z)$在D上单叶,则$f(z)$在$G_1=\{z':z'=\rho z, z\in D_r\}$上单叶. 其中:$r=\dfrac{1}{4}(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{4}})^{-2}=\dfrac{1}{7+4\sqrt3}$, $0<\rho<1$.

参考文献：

[1] CHEN Huai-hui, GAUTHIER P M, HENGARTNER W. Bloch constants for planar harmonic mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 2000, 128(11): 3231-3240.

[2] AHLFORS L V. 复分析[M]. 北京：机械工业出版社，2005.

[3] LANDAU E. Der picard-schottysche satz und die blochsche konstanten[M]. Berlin: Sitzungsber Press Akad Wiss, 1926: 467-474.

[4] CHEN Huai-hui, GAUTHIER P M. The Landau theorem and Bloch theorem for planar harmonic and pluriharmonic mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 2011, 139(2): 583-595.

[5] GRIGORYAN A. Landau and Bloch theorems for harmonic mappings[J]. Complex Variable Theory Appl, 2006, 51(1): 81-87.

[6] HUANG Xing-zhong. Estimates on Bloch constants for planar harmonic mappings[J]. J Math Anal Appl, 2008, 337(2): 880-887.

[7] COLONNA F. The Bloch constant of bounded harmonic mappings[J]. Indiana Univ Math J, 1989, 38: 829-840.

[8] DORFF M, NOWAK M. Landau′s theorem for planar harmonic mappings[J]. Comput Meth Funct Theory, 2004, 4: 151-158.

[9] LIU Ming-sheng. Landau′s theorems for biharmonic mappings[J]. Complex Variables and Elliptic Equations, 2008, 53(9): 843-855.

[10] LIU Ming Sheng. Landau′s theorem for planar harmonic mappings[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 57(7): 1142-1146.

[11] 李东征，陈行堤．调和映照的 Bloch 常数[J]. 华侨大学学报：自然科学版，2012，33(1)：103-106.

[12] DUREN P. Harmonic mappings in the plane[M]. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2004.

[13] 李忠. 复分析导引[M]. 北京：北京大学出版社，2004.

[14] CHUAQUI M. HERNANDEZ R. Univalent harmonic mappings and linearly connected domains[J]. J Math Anal Appl, 2007, 332(2): 1189-1194.

[15] 黄心中. 具有线性连结像域的局部单叶调和映照[J]. 数学年刊，2010，31A(5)：625-630.

[16] PICK G. Über die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschränktes Gebiet[J]. S-B Kaiserl Akad Wiss Wien Math Natur Kl Abt Ⅱa, 1917, 126: 247-263.

Landau Theorem for Planar Harmonic Mappings

LI Dong-zheng, CHEN Xing-di

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, we study Landau theorem and the univalence radius for harmonic mappings in the plane. Combining Koebe theorem of bounded univalent functions and Schwarz lemma of harmonic mappings, we obtain an asymptotically sharp estimate of Landau constant for a harmonic mapping. Our results improve the ones recently gotten by H. H. Chen and P. M. Gauthier.

Keywords: Harmonic mapping; Landau theorem; Bloch constant; univalent function

（**责任编辑**：陈志贤　　**英文审校**：张金顺，黄心中）