文章编号：　1000-5013(2012)05-0581-03

单位圆上调和映照的单叶半径

朱剑峰，王朝祥，黄心中

（华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021）

摘要：　设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=z+\sum\limits_{n=2}^{+\infty}a_nz^n+\overline{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_nz^n}$ 为定义在单位圆盘 U 上的调和映照，满足条件 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}n^p(|a_n|+|b_n|)\leqslant 1-|b_1|$，证明当 $0<p\leqslant 1$ 时，$f(z)$ 在圆盘 $|z|<r_0=1/(2^{1-p})$ 内单叶；当 $1<p\leqslant 2$ 时，$f(z)$ 在圆盘 $|z|<R_0=1/(2^{2-p})$ 内为凸像函数. 所得结果推广了 M. Jahangiri 等和 M. Öztürk 等的结论.

关键词：　调和映照；单叶半径；星像函数；凸像函数

中图分类号：　O 174.2　　　**文献标志码：**　A

1　预备知识

设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 为定义在区域 D 上的连续函数，如果 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 皆为实调和函数，则称 $f(z)$ 为 D 上的复调和函数. 又若 D 为单连通区域，则 $f(z)$ 可写成

$$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}. \tag{1}$$

$h(z)$ 和 $g(z)$ 为 D 上的解析函数，称 $h(z)$ 为 $f(z)$ 的解析部分，$g(z)$ 为 $f(z)$ 的共轭解析部分. 由文献[1]可知：$f(z)$ 为 D 上的局部单叶保向映照的充要条件是 $|h'(z)|>|g'(z)|$，对于任意的 $z\in D$.

记 $U=\{z:|z|<1\}$ 为单位圆盘，如果式(1)中的 $f(z)$ 满足 $f(0)=f_z(0)-1=0$，则有

$$h(z)=z+\sum_{n=2}^{+\infty}a_nz^n,\qquad g(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_nz^n. \tag{2}$$

定义 S_H 类函数为一族定义在单位圆盘 U 上的单叶保向调和映照且满足条件(2). 对于任意的 $f\in S_H$，若其像域 $f(U)$ 为星像，则称 $f(z)$ 为星像调和函数，记为 $f\in S_H^*$. 类似地若其像域 $f(U)$ 为凸像，则称 $f(z)$ 为凸像调和函数，记为 $f\in K_H$. 关于星像调和与凸像调和函数的特征，有如下充要条件[2]，即

$$f\in S_H^*\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial\theta}(\arg f(r\exp(\mathrm{i}\theta)))>0,\qquad z=r\exp(\mathrm{i}\theta)\in U, \tag{3}$$

$$f\in K_H\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial\theta}(\arg\frac{\partial f}{\partial\theta}(r\exp(\mathrm{i}\theta)))>0,\qquad z=r\exp(\mathrm{i}\theta)\in U. \tag{4}$$

M. Jahangiri 等[3-4]利用系数不等式证明了下列的定理.

定理 A　设 $f=h+\overline{g}$ 为定义在单位圆盘 U 上的调和映照，其中 h 和 g 的定义如式(2)，满足

$$\sum_{n=2}^{+\infty}n(|a_n|+|b_n|)\leqslant 1-|b_1|. \tag{5}$$

则 $f(z)$ 为 U 上的单叶、保向近于凸映照. 式(5)的上限是精确的，因为对于任意的 $\delta>0$，$f(z)=z+\dfrac{1+\delta}{n}z^n$ 在 U 内已不在单叶. 进一步地，若有

$$\sum_{n=2}^{+\infty}n^2(|a_n|+|b_n|)\leqslant 1-|b_1|, \tag{6}$$

收稿日期：　2011-10-12

通信作者：　朱剑峰(1980-)，男，讲师，主要从事函数论的研究. E-mail：flandy@hqu.edu.cn.

基金项目：　国家自然科学基金资助项目(11101165)；国务院侨办科研基金资助项目(10QZR22)

则 $f\in K_H$ 为 U 上的凸像函数. 这里的上限同样是精确的,因为函数 $f(z)=z+\frac{1+\delta}{n}z^n$, $\delta>0$ 表明式(6)的上界已无法再改进.

M. Öztürk 等[5]进一步研究了上述问题. 设 $f=h+\overline{g}$ 为单位圆盘 U 上的调和函数,其中 h,g 由式(2)定义,若其系数满足

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-\alpha}{1-\alpha}(|a_n|+|b_n|)\leqslant 1-|b_1|, \tag{7}$$

则称 $f\in HS(\alpha)$, $0\leqslant\alpha<1$. 利用 $n\geqslant 2$ 时, $n\leqslant\frac{n-\alpha}{1-\alpha}$,文献[4]证明了下列的定理.

定理 B 若 $f\in HS(\alpha)$,则 $f(z)$为单叶、保向、星像函数. 进一步地,若 $f(z)$满足

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}(|a_n|+|b_n|)\leqslant 1-|b_1|, \tag{8}$$

则 $f(z)$为凸像函数.

2 主要结论及其证明

定理 1 设 $f=h+\overline{g}$ 为定义在单位圆盘 U 上的调和映照, h 和 g 如式(2)定义,对于任意的 $0<p\leqslant 1$,若 $f(z)$满足

$$\sum_{n=2}^{+\infty}n^p(|a_n|+|b_n|)\leqslant 1-|b_1|, \tag{9}$$

则 $f(z)$在圆盘 k_0 : $|z|r_0=1/(2^{1-p})$内单叶、保向的.

证明 令 $t(x)=x^{\frac{p-1}{x-1}}$,则 $f(z)$在 $x\geqslant 2$ 时单调增加,所以 $t(x)\geqslant t(2)=1/(2^{1-p})$. 于是有 $n^{\frac{p-1}{n-1}}\geqslant\frac{1}{2^{1-p}}=r_0$, $n=2,3,\cdots$. 任取 $z_1,z_2\in k_0$,且 $z_1\neq z_2$,则有

$$|f(z_1)-f(z_2)|=|(z_1-z_2)+\sum_{n=2}^{+\infty}a_n(z_1^n-z_2^n)+\overline{\sum_{n=1}^{+\infty}b_n(z_1^n-z_2^n)}|>$$

$$|z_1-z_2|(1-|b_1|-\sum_{n=2}^{+\infty}n^p(|a_n|+|b_n|))\geqslant 0.$$

所以, $f(z)$在 k_0 内单叶. 又因为对于任意的 $z\in k_0$,有

$$|h'(z)|=|1+\sum_{n=2}^{+\infty}na_nz^{n-1}|>1-\sum_{n=2}^{+\infty}n|a_n|r^{n-1}\geqslant|g'(z)|.$$

所以, $f(z)$在 k_0 内保向的.

定理 2 设 $f=h+\overline{g}$ 为定义在单位圆盘 U 上的调和映照,满足条件(9),则当 $1<p\leqslant 2$ 时 $f(z)$为圆盘 K_0 : $|z|<R_0=\frac{1}{2^{2-p}}$上的凸像函数. 这里的常数 R_0 是最佳的.

证明 因为 $p>1$,故有 $\sum_{n=2}^{+\infty}n(|a_n|+|b_n|)\leqslant\sum_{n=2}^{+\infty}n^p(|a_n|+|b_n|)\leqslant 1-|b_1|$. 由定理 A 可知 $f(z)$为 U 上的单叶、保向调和映照的. 对于 $R>1$,有 $\frac{1}{R}f(Rz)=z+\sum_{n=2}^{+\infty}a_nz^nR^{n-1}+\overline{\sum_{n=1}^{+\infty}b_nz^nR^{n-1}}$,仍为 U 上的单叶调和映照. 下面只需找到最小的常数 R_0,使 $f(z)$为凸像函数.

由定理 A 可知有

$$\sum_{n=2}^{+\infty}n^2(|a_nR^{n-1}|+|b_nR^{n-1}|)\leqslant\sum_{n=2}^{+\infty}n^p(|a_n|+|b_n|)\leqslant 1-|b_1|, \tag{10}$$

则 $f(z)$为凸像函数. 于是, $n^2R^{n-1}\leqslant n^p$,所以 $R\leqslant n^{p-2/n-1}$. 取 $R_0=1/2^{2-p}$,则 $f(z)$为圆盘 K_0 : $|z|<R_0$ 内的凸像函数.

注 1 当 $1<p\leqslant 2$ 时,条件(9)并不足以保证 $f(z)$为凸像函数. 事实上,函数 $f(z)=z-\frac{1}{2^p}\overline{z}^2$ 满足条件(9),但是有

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\arg\frac{\partial}{\partial\theta}f(r\exp(\mathrm{i}\theta)))=\mathrm{Re}\left[\frac{zh'+z^2h''+\overline{zg'+z^2g''}}{zh'-\overline{zg'}}\right]=\mathrm{Re}\left[(z-\frac{4}{2^p}\bar{z}^2)/(z+\frac{2}{2^p}\bar{z}^2)\right]. \quad (11)$$

取 $z=r<1$，当 $\frac{1}{2^{2-p}}<r<1$ 时，式(11)为 $(r-\frac{4}{2^p}r^2)/(r+\frac{2}{2^p}r^2)<0$，故 $f(z)$ 不是凸函数. 说明了 R_0 是最佳的[6].

定理 3　设 $f=h+\bar{g}$ 为定义在为圆盘 U 上的调和映照，满足条件(9). 其中 $p\geqslant 1$，则 $f(z)\in S_H^*(\alpha)$ 为单位圆盘上的调和星像函数，这里 $\alpha\leqslant\frac{2^p-2}{2^p-1}$.

证明　$p\geqslant 1$，由定理 2 知 $f(z)$ 为单叶保向调和映照，又当 $n^p\geqslant\frac{n-\alpha}{1-\alpha}$，$n=2,3,\cdots$ 时，有 $\alpha\leqslant\frac{n^p-n}{n^p-1}$. 对于固定的 p，$\frac{n^p-n}{n^p-1}$ 关于 n 单调增加，所以 $\alpha\leqslant\frac{2^p-2}{2^p-1}$. 此时又有

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-\alpha}{1-\alpha}(|a_n|+|b_n|)\leqslant\sum_{n=2}^{+\infty}n^p(|a_n|+|b_n|)\leqslant 1-|b_1| \quad (12)$$

由定理 B 知 $f(z)\in S_H^*(\alpha)$ 为星像调和函数. 这里 $\alpha\leqslant\frac{2^p-2}{2^p-1}$.

参考文献：

[1] LEWY H. On the non-vanishing of the Jocobian in certain one-to-one mappings[J]. Bull Am Math Soc，1936，42(10)：689-692.

[2] AHUJA P. Planar harmonic univalent and related mappings[J]. Journal of Inequalitities in Pure and Applied Mathematics，2005，6(4)：1-18.

[3] JAHANGIRI M，SILVERMAN H. Harmonic close-to-convex mappings[J]. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis，2002，15(1)：23-28.

[4] JAHANGIRI M，SILVERMAN H. Meromorphic univalent harmonic functions with negative coefficients[J]. Bull Korean Math Soc，1999，36(4)：763-770.

[5] ÖZTÜRK M，YALCIN S. On univalent harmonic functions[J]. Journal of Inequalities in Pure and Applies Mathematics，2002，3(4)：1-8.

[6] WIDOMAKI J，GREGORCZYK M. Harmonic mappings in the exterior of the unit disk[J]. Annales UMCS，Mathematica，2010，64(1)：63-73.

Univalent Radius of Harmonic Mapping in the Unit Disk

ZHU Jian-feng，WANG Chao-xiang，HUANG Xin-zhong

(School of Mathematical Sciences，Huaqiao University，Quanzhou 362021，China)

Abstract：Let $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=z+\sum_{n=2}^{+\infty}a_nz^n+\overline{\sum_{n=1}^{+\infty}b_nz^n}$ be a harmonic mapping of the unit disk U，satisfying $\sum_{n=2}^{+\infty}n^p\times(|a_n|+|b_n|)\leqslant 1-|b_1|$. In this paper we prove that：if $0<p\leqslant 1$，then $f(z)$ is univalent in the disk $|z|<r_0=\frac{1}{2^{1-p}}$；if $1<p\leqslant 2$，then $f(z)$ is convex in the disk $|z|<R_0=\frac{1}{2^{2-p}}$. These improve the corresponding results made by M. Jahangiri and M. Öztürk.

Keywords：harmonic mapping；univalent radius；starlike mapping；convexity mapping

(**责任编辑**：黄晓楠　　**英文审校**：黄心中)