第 33 卷 第 4 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 33 No. 4
2012 年 7 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jul. 2012

文章编号: 1000-5013(2012)04-0477-04

图谱理论中一些定理的新证明

汪秋分,宋海洲

(华侨大学 数学科学学院,福建 泉州 362021)

摘要: 利用非负矩阵理论并结合图论性质,给出图谱理论中 3 个重要定理的证明,给出的证明方法比之前文献的证明更为简洁、易懂.

关键词: 图谱理论;简单连通图;最大特征值;非负不可约矩阵

中图分类号: O 157.5 **文献标志码:** A

图谱理论在物理学和化学上有着很重要的应用,从 L. M. Lihtenbaum 与 Collatz 的开创性文章发表以来,人们对图谱理论的研究不断深入. F. R. K. Chang 在 1994 年瑞士苏黎世举行世界数学家大会把图谱理论的研究推向一个新的层面. 如下 3 个定理在图谱理论中占有十分重要的地位.

定理 1[1] 若 G 为简单的连通图,$\boldsymbol{A}$ 为其对应的邻接矩阵,$|G|=n$,$\rho(\boldsymbol{A})$为 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值,$\boldsymbol{x}$ 为特征值 $\rho(\boldsymbol{A})$对应的 Perron 向量[2],则 $\boldsymbol{x}>0$.

定理 2[3] 设 G 为简单连通图,G 的顶点集 $V(G)=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,记 $G_1=G-x_i$,$x_i\in V(G)$,若 $\rho(G)$与 $\rho(G_1)$分别表示图 G 与 G_1 的最大特征值,则有 $\rho(G)>\rho(G_1)$.

定理 3[3-6] 设 G 为简单的连通图,G'为其真部分图(即 G 与 G'的顶点集相同,G'的边集是 G 的边集的真子集,G'不一定连通),G 与 G'的邻接矩阵分别记为 $\boldsymbol{A}(G)$和 $\boldsymbol{A}(G')$,$\rho(G')$与 $\rho(G')$分别为 $\boldsymbol{A}(G)$与 $\boldsymbol{A}(G')$ 的最大特征值,则有 1) $\rho(G')<\rho(G)$;2) 当 $\boldsymbol{x}\geqslant\rho(G)$时,$\chi(G,x)<\chi(G',x)$.

虽然这 3 个重要定理已经得到了证明,但是其证明方法均过于繁琐. 一些数学家们试图寻找这些定理更为简洁的证明方法,如游兆永等[1]对定理 1 给出新证明. 但证明仍不够简洁. 本文给出 3 个定理更为简洁、易懂的新证明.

1 一些引理

为了重新证明上述 3 个定理,先引入如下几个重要的引理.

引理 1[7] 设 G 为简单连通图,$\boldsymbol{A}$ 为 G 的邻接矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 为非负不可约矩阵[8].

引理 2[7] 设 $\boldsymbol{A}$ 为非负不可约矩阵,$\rho(\boldsymbol{A})$为 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值,$\boldsymbol{x}$ 为特征值 $\rho(\boldsymbol{A})$对应的 Perron 向量,则 $\boldsymbol{x}\geqslant 0$.

引理 3[7] 已知 $\boldsymbol{A}$ 为一个 $n\times n$ 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{x}$ 为一 n 维向量,记 $\boldsymbol{A}$ 的特征根分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,若 $\lambda_{\max}=\max\{\lambda_i\}$,$i=1,2,\cdots,n$,则有

$$\lambda_{\max} = \max_{\|x\|=1}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}).$$

引理 4 设 G 为简单的连通图,$|G|=n$,记 $G=(V,E)$,$V(G)=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$\boldsymbol{A}(G)$为图 G 的邻接矩阵,$\boldsymbol{A}(G)$的特征多项式记为 $\chi(G)$,即 $\chi(G)=\chi(G,\boldsymbol{x})=\det(\boldsymbol{xI}-\boldsymbol{A}(G))$,则有

$$\chi'(G,\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n}\chi(G-x_i,\boldsymbol{x}).$$

证明 设邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)=(a_{i,j})_{n\times n}$. 由矩阵求导性质可知:对一参数矩阵某个变量的求导等于对

收稿日期: 2011-11-16

通信作者: 宋海洲(1971-),男,副教授,主要从事运筹优化的研究. E-mail:hzsong@hqu.edu.cn.

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目,华侨大学科研基金资助项目(10HZR26)

其所有列分别对相应变量求导的和.则有

$$\chi'(G,\boldsymbol{x})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} x-a_{1,1} & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & x-a_{2,2} & \cdots & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \cdots & x-a_{n,n} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ 0 & x-a_{2,2} & \cdots & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -a_{n,2} & \cdots & x-a_{n,n} \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} x-a_{1,1} & 0 & \cdots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & 1 & \cdots & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n,1} & 0 & \cdots & x-a_{n,n} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} x-a_{1,1} & -a_{1,2} & \cdots & 0 \\ -a_{2,1} & x-a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}=$$

$$\chi(G-x_1,\boldsymbol{x})+\chi(G-x_2,\boldsymbol{x})+\cdots+\chi(G-x_n,\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\chi(G-x_i,\boldsymbol{x}),$$

因此有

$$\chi'(G,\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\chi(G-x_i,\boldsymbol{x}).$$

2 定理的证明

定理1[1] 若G为简单的连通图,$\boldsymbol{A}$为其对应的邻接矩阵,$|G|=n$,$\rho(\boldsymbol{A})$为$\boldsymbol{A}$的最大特征值,$\boldsymbol{x}$为特征值$\rho(\boldsymbol{A})$对应的Perron向量,则$\boldsymbol{x}>0$.

证明 采用反证法证明.由于$\boldsymbol{A}$为连通图G的邻接矩阵,由引理1可知:$\boldsymbol{A}$为非负不可约矩阵.又由引理2可知:特征值$\rho(\boldsymbol{A})$对应的Perron向量$\boldsymbol{x}\geqslant 0$.

假设$\boldsymbol{x}>0$不成立,则存在一个置换阵$\boldsymbol{P}$及实数$s(1\leqslant s<n)$,使得$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Px}\triangleq(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$,则有$y_1>0,y_2>0,\cdots,y_s>0,y_{s+1}=0,\cdots,y_n=0$.令$\boldsymbol{PAP}^{-1}=\boldsymbol{B}$,则$\rho(\boldsymbol{A})=\rho(\boldsymbol{B})$.由题意可得$\rho(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}(G)\boldsymbol{x}$,左乘矩阵$\boldsymbol{P}$可得$\boldsymbol{P}\rho(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{PA}(G)\boldsymbol{x}$,即有$\rho(\boldsymbol{A})\boldsymbol{Px}=\boldsymbol{PA}(G)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Px}$,即$\boldsymbol{By}=\rho(\boldsymbol{B})\boldsymbol{y}$.

记$\boldsymbol{B}=(b_{i,j})_{n\times n}$,由于$y_{s+1}=0,\cdots,y_n=0$,所以有$\sum\limits_{i=1}^{n}b_{j,i}y_i=\rho(\boldsymbol{B})y_j=0,j=s+1,s+2,\cdots,n$;从而有$\sum\limits_{i=1}^{n}b_{j,i}y_i=\sum\limits_{i=1}^{s}b_{j,i}y_i=0$.由于$\boldsymbol{A}$为非负不可约实对称矩阵,故可知$\boldsymbol{B}$也为非负不可约实对称矩阵.又由于$y_1>0,y_2>0,\cdots,y_s>0$,且$b_{j,i}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,n)$,从而有$b_{j,i}=0$.其中:$j=s+1,s+2,\cdots,n;i=1,2,\cdots,s$.

故矩阵$\boldsymbol{B}$可写为$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{s\times s} & \boldsymbol{O}_{s\times(n-s)} \\ \boldsymbol{O}_{(n-s)\times s} & \boldsymbol{D}_{(n-s)\times(n-s)} \end{pmatrix}$,这与$\boldsymbol{B}$是非负不可约矩阵相矛盾.从而假设不成立,原命题成立.

定理2[3] 设G为简单连通图,G的顶点集$V(G)=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,记$G_1=G-x_i$,$x_i\in V(G)$,若$\rho(G)$与$\rho(G_1)$分别表示图$G$与$G_1$的最大特征值,则有$\rho(G)>\rho(G_1)$.

证明 由题设知$|G|=n$,容易验证当$n=2$及$n=3$时,原命题成立.

对$n\geqslant 4$分下面两种情形进行证明.

情形1 $G_1=G-x_i$仍是连通图.

设G与G_1的邻接矩阵分别为$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$,由引理1可知:$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$均为非负不可约矩阵.设$\boldsymbol{B}$对应$\rho(G_1)$的Perron向量为$\boldsymbol{x}$,则有$\boldsymbol{Bx}=\rho(G_1)\boldsymbol{x}$;再由定理1可知:$\boldsymbol{x}>0$.

由于$G_1=G-x_i$,G为简单连通图,故可知存在$\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^{(n-1)\times 1}$,且$\boldsymbol{X}\geqslant 0,\boldsymbol{X}\neq 0$,使得$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{X}' & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$.记$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$,则有$\boldsymbol{0}\leqslant\boldsymbol{C}\leqslant\boldsymbol{A}$,且$\rho(\boldsymbol{B})=\rho(\boldsymbol{C})$.

根据组合矩阵论可得:$\rho(\boldsymbol{B})=\rho(\boldsymbol{C})\leqslant\rho(\boldsymbol{A})$,即$\rho(G_1)\leqslant\rho(G)$.设$\boldsymbol{x}_0$为对应于$\rho(G_1)$的Perron向量,

则 $\boldsymbol{x}_0>0$，$\|\boldsymbol{x}_0\|=1$，且有 $\boldsymbol{x}'_0\boldsymbol{X}>0$. 取 $\boldsymbol{y}_0=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\binom{\boldsymbol{x}_0}{a}$，其中 $a=\frac{\boldsymbol{x}'_0\boldsymbol{X}}{\rho(\boldsymbol{B})}$，则有 $a>0$，且 $\boldsymbol{x}'_0\boldsymbol{X}=a\rho(\boldsymbol{B})$. 又由 $\|\boldsymbol{x}_0\|=1$，可得 $\|\boldsymbol{y}_0\|=1$. 因而有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}'_0\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_0 &=\frac{1}{a^2+1}\binom{\boldsymbol{x}_0}{a}'\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{X}' & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\binom{\boldsymbol{x}_0}{a}=\\ &\frac{1}{a^2+1}(\boldsymbol{x}'_0\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_0+2a\boldsymbol{x}'_0\boldsymbol{X})=\frac{1}{a^2+1}(\rho(\boldsymbol{B})+2a\boldsymbol{x}'_0\boldsymbol{X})=\\ &\frac{1}{a^2+1}(\rho(\boldsymbol{B})+2a^2\rho(\boldsymbol{B}))>\frac{1}{a^2+1}(\rho(\boldsymbol{B})+a^2\rho(\boldsymbol{B}))>\rho(\boldsymbol{B}).\end{aligned}$$

由引理 3 可得

$$\rho(\boldsymbol{A})=\max_{\|\boldsymbol{B}\|=1}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{y}'_0\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}_0>\rho(\boldsymbol{B}),$$

因此有 $\rho(\boldsymbol{A})>\rho(\boldsymbol{B})$，即 $\rho(G)>\rho(G_1)$.

情形 2　$G_1=G-x_i$ 不再是连通图.

不妨设 $x_i=x_n$，记 G_1 的连通分支分别为 $H_1,H_2,\cdots,H_k$，且 $H_1,H_2,\cdots,H_k$ 各对应的邻接矩阵分别为 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_k$. 设 $\rho(H_k)=\max\limits_{i=1}^{k}\rho(H_i)$，记图 G,G_1 对应的邻接矩阵分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可表示为分块对角阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \boldsymbol{P}_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{P}_k\end{pmatrix}$，且有 $\rho(\boldsymbol{B})=\rho(H_k)=\rho(G_1)$.

由于 $H_k=G-x_n-H_1-H_2-\cdots-H_{k-1}$，故可设 $H_k=G-\sum\limits_{j=1}^{m}x_{l_j}$，其中 $1\leqslant m<n$，并且保持 $G-x_{l_1},G-x_{l_1}-x_{l_2},\cdots,G-x_{l_1}-x_{l_2}-\cdots-x_{l_m}$ 连通. 利用情形 1 的结论可得：$\rho(G)>\rho(G-x_{l_1})>\cdots>\rho(G-\sum\limits_{j=1}^{m}x_{l_j})=\rho(H_k)=\rho(G_1)$，则有 $\rho(G)>\rho(G_1)$.

综上两种情形可知定理 2 成立.

定理 3[3-6]　设 G 为简单的连通图，G' 为其真部分图(即 G 与 G' 的顶点集相同，G' 的边集是 G 的边集的真子集，G' 不一定连通)，G 与 G' 的邻接矩阵分别记为 $\boldsymbol{A}(G)$ 和 $\boldsymbol{A}(G')$，$\rho(G)$ 与 $\rho(G')$ 分别为 $\boldsymbol{A}(G)$ 与 $\boldsymbol{A}(G')$ 的最大特征值，则有 1) $\rho(G')<\rho(G)$；2) 当 $\boldsymbol{x}\geqslant\rho(G)$ 时，$\chi(G,\boldsymbol{x})<\chi(G',\boldsymbol{x})$.

证明　先证 $\rho(G')<\rho(G)$ 成立. 显然，由题意易知，$0\leqslant\boldsymbol{A}(G')\leqslant\boldsymbol{A}(G)$，根据组合矩阵论可得 $\rho(G')\leqslant\rho(G)$ 成立. 下面分两种情形进行证明 .

情形 1　G' 仍是连通图.

由于 G' 是连通图，由引理 1 可知：$\boldsymbol{A}(G')$ 为非负不可约矩阵. 又 G' 为 G 的真部分图，从而有 $\boldsymbol{A}(G')\leqslant\boldsymbol{A}(G)$，且 $\boldsymbol{A}(G')\neq\boldsymbol{A}(G)$.

设 $\boldsymbol{y}$ 为对应于 $\rho(G')$ 的 Perron 向量，则有 $\|\boldsymbol{y}\|=1$ 且 $\boldsymbol{A}(G')\boldsymbol{y}=\rho(G')\boldsymbol{y}$；再根据定理 1 可知：$\boldsymbol{y}>0$. 从而有 $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}(G')\boldsymbol{y}=\rho(G')\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}=\rho(G')\|\boldsymbol{y}\|=\rho(G')$.

故 $\rho(G')=\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}(G')\boldsymbol{y}<\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}(G)\boldsymbol{y}\leqslant\max\limits_{\|x\|=1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}(G)\boldsymbol{x}$. 又由引理 3 可知：$\rho(G)=\max\limits_{\|x\|=1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}(G)\boldsymbol{x}$，从而有 $\rho(G')<\rho(G)$.

情形 2　G' 不再是连通图.

由于 G' 不连通，故可设 $G'=G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_k$，其中 $G_1,G_2,\cdots,G_k$ 为 G' 的 k 个连通分支，$k\geqslant2$. 不妨设 $\rho(G_1)=\rho(G')$，由于 G 是连通图，G' 为其真部分图，故存在边 e_1，且 $e_1\in E(G)$，使得 G_1 与某个 G_j 相连，其中 $j=1,2,\cdots,k$. 不妨设 G_1 可通过 e_1 与 G_2 相连，记 $F=G'\cup\{e_1\}=[G_1\cup G_2\cup\{e_1\}]\cup G_3\cup\cdots\cup G_k$，可知 F 仍为 G 的真部分图或者等于 G.

若 $k\geqslant3$，则 $G_1\cup G_2\cup\{e_1\}$ 为 G 的部分图，且 $|G_1\cup G_2\cup\{e_1\}|=|G|$. 因而存在非空的顶点集 W，使得 $G_1\cup G_2\cup\{e_1\}$ 为 $G-\bigcup\limits_{x_i\in W}\{x_i\}$ 的部分图，从而有 $\rho(G')=\rho(G_1)\leqslant\rho(G-\bigcup\limits_{x_i\in W}\{x_i\})$. 又由定理 2 的证明

可知:$\rho(G-\bigcup_{x_i\in W}\{x_i\})<\rho(G)$,故 $\rho(G')<\rho(G)$. 若 $k=2$,则 G_1 可通过一条边 e_1 与 G_2 相连,从而存在非空顶点集 W,使得 $G_1=G-\bigcup_{x_i\in W}\{x_i\}$. 再由定理 2 的证明可得:$\rho(G')<\rho(G)$.

综上可得:$\rho(G')<\rho(G)$.

其次,证明当 $\boldsymbol{x}\geqslant\rho(G)$ 时,$\chi(G,\boldsymbol{x})<\chi(G',\boldsymbol{x})$ 成立. 设 $G=(V,E)$,且 $|G|=n$. 当 $n=2$ 及 $n=3$ 时,容易验证原命题成立. 现对 $n\geqslant 4$ 进行归纳法证明.

设当 $n\leqslant s(s\geqslant 3)$ 时,定理 3 中命题 2)成立;当 $n=s+1$ 时,由定理 3 中命题 1)可知:$\rho(G')<\rho(G)$,则有 $\chi(G',\rho(G))>0$. 又由引理 4 可知 $\chi'(G',\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\chi(G-x_i,\boldsymbol{x})$,从而有

$$\chi'(G',\boldsymbol{x})-\chi(G,\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\chi'(G',x_i,\boldsymbol{x})-\sum_{i=1}^{n}\chi(G-x_i,\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{s+1}[\chi(G'-x_i,\boldsymbol{x})-\chi(G-x_i,\boldsymbol{x})].$$

由于 G' 为 G 得真部分图,因而有 $|G'-x_i|=|G-x_i|$,$x_i\in V(G)$. 对于 $i=1,2,\cdots,s+1$,可知 $G'-x_i$ 或者等于 $G-x_i$,或者是 $G-x_i$ 的真部分图. 根据前面结论可得:$\rho(G'-x_i)\leqslant\rho(G-x_i)$. 由定理 2 可知:$\rho(G-x_i)<\rho(G)$. 因而由前面假设可知,当 $\boldsymbol{x}\geqslant\rho(G)>\rho(G-x_i)$ 时,$\chi(G'-x_i,\boldsymbol{x})-\chi(G-x_i,\boldsymbol{x})\geqslant 0$ 成立.

又由于 G' 为 G 的真部分图,则存在 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$,使得 $G'-x_j$ 是 $G-x_j$ 的真部分图. 由假设可知,存在 $j\in\{1,2,\cdots,s\}$,使得当 $\boldsymbol{x}\geqslant\rho(G-x_j)$ 时,有 $\chi(G'-x_j,\boldsymbol{x})-\chi(G-x_j,\boldsymbol{x})>0$. 从而当 $\boldsymbol{x}\geqslant\rho(G)$ 时,有 $\chi'(G',\boldsymbol{x})-\chi'(G,\boldsymbol{x})>0$ 成立. 又有 $\chi(G',\rho(G))-\chi(G,\rho(G))=\chi(G',\rho(G))>0$,故当 $\boldsymbol{x}\geqslant\rho(G)$ 时,$\chi(G,x)<\chi(G',\boldsymbol{x})$ 成立.

参考文献:

[1] 游兆永,永学荣. Perron-Frobenius 定理的新证明[J]. 西安交通大学学报,1992,26(5):27-31.

[2] 吴雅容,何沙,束金龙. 具有条割边的极图[J]. 华东师范大学学报:自然科学版,2007,53(3):67-74.

[3] 李乔,冯克勤. 论图的最大特征值[J]. 应用数学学报,1979,2(2):167-175.

[4] 袁西英,吴宝丰,肖恩利. 树的运算及其 Laplace 谱[J]. 华东师范大学学报:自然科学版,2004,50(2):13-18.

[5] LIU Hui-qing, LU Mei, TIAN Feng. On the spectral radius of graphs with cut edges[J]. Linear Algebra Appl, 2004, 389:139-145.

[6] GUO J M. The Laplacian spectral radius of a graph under perturbation[J]. Comput Math Appl, 2007, 54(5):709-720.

[7] 柳柏濂. 组合矩阵论[M]. 2版. 北京:科学出版社,2005:33-260.

[8] 宋海洲,徐强,田朝薇. 计算非负不可约矩阵谱半径的新算法[J]. 华侨大学学报:自然科学版,2011,32(3):348-351.

A New Proof for Some Theorems in Graph Theory

WANG Qiu-fen, SONG Hai-zhou

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: We give the proof of three important theorems in graph theory by the nonnegative matrix theory and combining with graph properties, and the proof technique is more concise and understandable than the previous one made in the references.

Keywords: graph theory; simple connected graph; largest eigenvalue; nonnegative irreducible matrix

(**责任编辑**: 钱筠 **英文审校**: 黄心中)