文章编号： 1000-5013(2012)04-0472-05

带 Markov 跳随机种群收获系统数值解的指数稳定性

赵朝锋[1]，张启敏[1,2]

(1. 北方民族大学 信息与计算科学学院，宁夏 银川 750021；
2. 宁夏大学 数学计算机学院，宁夏 银川 750021)

摘要： 研究一类带跳的非线性随机种群收获动力学模型的数值解指数稳定性的问题，给出了外界环境对系统产生影响的条件下带跳的随机收获动力学系统. 通过一些特殊不等式，Ito 公式及 Burkholder-Davis-Gundy 不等式，讨论了带 Markov 随机种群系统数值解的收敛性，得到了数值解指数稳定所满足的充分条件，所得结论是确定性种群系统的扩展.

关键词： Markov 跳；随机种群模型；Ito 公式；数值解；稳定性

中图分类号： O 175.21 **文献标志码：** A

近年来，随机种群模型引起了广泛的研究. 如在不考虑具有跳的随机环境影响的情况下，文献[1]对随机微分方程的基本理论进行了论述；文献[2-3]对随机种群系统的数值解问题进行了研究；文献[4]对随机种群系统状态方程解的存在唯一性及指数稳定性进行了研究；文献[5]对一类单种群收获模型稳定性的进行了研究. 上述文献都没有考虑随机跳的影响，而自然界中地震、海啸等随机自然灾害都是具有跳的特征的. 把随机跳因素考虑到种群收获系统中，得到带 Markov 跳的随机种群模型(P)为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p(r,t)}{\partial r}+\frac{\partial p(r,t)}{\partial t}+\lambda_1(r,t)p(r,t)+u_1(r,t)p(r,t)=f_1(p,v(t))+g_1(p,v(t))\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t},\\ &p(r,0)=p_0,\\ &p(0,t)=\int_0^A\beta(r,t)p(r,t)\mathrm{d}r. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式(1)中：$(r,t)\in Q$，$Q=(0,A)\times(0,T)$，A 是种群个体最高存活年龄，$0<A<\infty$；r 是种群年龄，$0<r<A$；$t>0$ 是时间；λ_1 是平均死亡率；β_1 是平均生育率；$p(r,t)$是在 t 时刻年龄 r 的种群密度；$u_1(r,t)$是最优收获变量，满足 $0<u_1(t)<u_{\max}(t)$；f_1 是年龄为 r 在时刻 t 的种群外界扰动(如迁移、地震等多突发灾害所造成的种群变化等)；$f_1(p,v(t))+g_1(p,v(t))\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$是外界环境对所研究系统的随机扰动；$w_t$ 是白噪声；$v(t)$是 Markov 过程. 然而，对于上述带 Markov 跳的随机收获系统(1)的数值解稳定性的研究至今未曾见到. 本文利用文献[3,6]的方法，讨论带 Markov 跳的随机收获系统的数值解稳定性问题.

1 预备知识

令 $V=H_1(Q)=\{z\mid z\in L^2,\frac{\partial z}{\partial x}\in L^2(Q)$，其中$\frac{\partial z}{\partial x}$是广义偏导数$\}$，$V$ 是 Q 的一阶 Sobolev 空间，有

$$V\rightarrow H\equiv H_1\rightarrow V_1.$$

其中：V_1 是 V 的对偶空间. 分别用 $\|\cdot\|$，$|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|_1$ 表示空间 V，H 和 V_1 上的范数；用$\langle\cdot,\cdot\rangle$

收稿日期： 2011-12-23

通信作者： 张启敏(1964-)，女，教授，主要从事控制理论和及其应用的研究. E-mail：zhangqimin64@sina.com.

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11061024)

表示 V_1,V 的对偶积，$(\cdot,\cdot)$表示 H 中的内积，且存在常数 k，则有

$$|x| \leqslant k\|x\|, \qquad \forall x \in V.$$

$F\in\psi(M,H)$是 M 到 H 有界算子空间中的一个算子，$\|F\|_2$ 是 Hilbert-Schmidt 范数，$\|F\|_2^2=\operatorname{tr}(FWF^{\mathrm{T}})$. 设$(\Omega,F,P)$是定义的一个完备的概率空间，滤波$\{F_t\}_{t\geqslant0}$是右连续的且递增的，$F_0$包含所有的零测度集，$w_t$ 是一个标准的 d 维 Brownian 运动.

$v(t)$，$t\geqslant0$ 是定义在上述完备空间上取值于有限状态空间 $S=\{1,2,\cdots,N\}$右连续马尔可夫链，其生成元 $\Gamma=(r_{i,j})_{N\times N}$为

$$p\{r(t+\Delta)=j \mid r(t)=i\}=\begin{cases} r_{i,j}\Delta+o(\Delta), & \text{if } i\neq j, \\ 1+r_{i,j}\Delta+o(\Delta), & \text{if } i=j. \end{cases}$$

其中：$\Delta>0$. 若 $i\neq j$，则 $r_{i,j}\geqslant0$ 是表示状态 i 到状态 j 的转移率，且 $r_{i,i}=-\sum\limits_{i\neq j}r_{i,j}$.

假设马尔可夫链 v_t 与布朗运动 W_t 相互独立，则易知 v_t 的每一个样本轨道几乎是右连续阶梯函数，且在 $\mathbf{R}^+$ 上的任何有限子区间上至多有有限个跳跃点.

将方程(1)写成积分形式，即

$$p_t=p_0-\int_0^t\frac{\partial p_s}{\partial r}\mathrm{d}s-\int_0^t\lambda_1(r,s)p_s\mathrm{d}s-\int_0^t u_1(r,s)p_s\mathrm{d}s+ \int_0^t f_1(p_s,v(s))\mathrm{d}s+\int_0^t g_1(p_s,v(s))\mathrm{d}w_s, \qquad p_t=p(r,t). \tag{2}$$

对于系统(P)，在时间 $t\in[0,h,2h,3h,\cdots,Nh]$上定义的离散数值解为

$$V_t^{n+1}=V_t^n-\frac{\partial V_t^{n+1}}{\partial r}h-\lambda_1(r,t_n)V_t^nh-u_1(r,t_n)V_t^nh+f_1(V_t^n,v_n^h)h+g_1(V_t^n,v_n^h)\mathrm{d}w_n. \tag{3}$$

式(3)中：$V_t^0=p(r,0)$；$V(t,0)=\int_0^A\beta(r,t)V_t\mathrm{d}r$；$r_n^h=v(nh)$，$n\geqslant1$；$V_t^n$ 是 $p(r,t)$的近似值；$t_n=nh$，时间增量 $h=\dfrac{T}{N}\ll1$，用 $\Delta w_k=w(t_{k+1})-w(t_k)$运动的增量.

对于连续的情形，则有

$$V_t=p_0-\int_0^t\frac{\partial V_s}{\partial r}\mathrm{d}s-\int_0^t\lambda_1(r,s)Z_s\mathrm{d}s-\int_0^t u_1(r,s)Z_s\mathrm{d}s+ \int_0^t f_1(Z_s,\bar{v}(s))\mathrm{d}s+\int_0^t g_1(Z_s,\bar{v}(s))\mathrm{d}w_s. \tag{4}$$

式(4)中：$V_0=p(r,0)$；$V(t,0)=\int_0^A\beta(r,t)V_t\mathrm{d}r$；$V_t=V(r,t)$；$\bar{v}(0)=i_0$；$Z_t=Z(r,t)=\sum\limits_{n=0}^{N-1}V_s^n1_{[nh,(n+1)h]}(s)$；$1_Q$表示定义在集合 Q 的示性函数. 由此易得 $Z(t_n,r)=V_t^n=V(r_n,t)$.

同时下列假设条件成立：

A_1) $f(i,0)=0$，$g(i,0)=0$，$i\in S$；

A_2) (Lipschitz 条件)存在一个正常数 L，当 $x,y\in D$，$i\in S$ 时，有

$$|f_1(i,y)-f_1(i,x)| \vee \|g_1(i,y)-g_1(i,x)\| \leqslant L\|y-x\|_D;$$

A_3) $\lambda_1\in C(Q\times R^+)$非负可测函数，且满足 $0\leqslant\lambda_1(r,0)\leqslant\lambda_1(r,t)\leqslant\theta_1<\infty$；

A_4) $\beta_1\in C(Q\times R^+)$非负可测函数，且满足 $0\leqslant\beta_1(r,0)\leqslant\beta_1(r,t)\leqslant\theta_2<\infty$；

A_5) $u\in U_{ad}=U$ 的非空凸子集，$U=L^2(Q)$，$\varepsilon\leqslant u\leqslant m$.

2　几个引理

定义 1　若 $\forall r\in[0,A]$，给定步长 $h>0$，有两个正常数 η 和 $\bar{N}$，则有

$$E|V_t|^2\leqslant\bar{N}\mathrm{e}^{-\eta t}, \qquad \forall t\geqslant0. \tag{5}$$

式(5)称方程(2)的数值解在均方意义下指数稳定.

引理 1　若条件 A_1)～A_5)成立，p_t 是方程(3)的强解，则存在常数 $l>0$，$c_1>0$，使得

$$E\mid p_t\mid^2\leqslant c_1E(\mid p_0\mid^2+k(\delta))\mathrm{e}^{-lt},\qquad \forall t\geqslant 0. \tag{6}$$

证明 与文献[4]类似.

引理 2 若条件 A_1)～A_5)成立,则有

$$E\sup_{t\in[0,T]}(\mid V_t\mid^2)\leqslant c_2. \tag{7}$$

式(7)中:依赖 p_0 和 T 而不依赖.

证明 与文献[3]类似.

引理 3 若条件 A_1)～A_5)成立,则有

$$E\mid\frac{\partial V_t}{\partial r}\mid^2\mathrm{d}t<\infty,$$

那么有

$$E\sup_{t\in[0,T]}(\mid V_t-Z_t\mid^2)\leqslant c_2h. \tag{8}$$

证明 $|U_t-Z_t|^2$ 和 $|V_t-W_t|^2$ 可用相同的方法处理,故只需在 $\forall t\in[0,T]$中讨论 $|U_t-Z_t|^2$ 即可. 若 $\forall t\in[0,t]$,必存在一个整数 n,使得 $t\in[nh,(n+1)h)$,则有

$$V_t-Z_t=V_t-V_t^n=-\int_{nh}^t\frac{\partial V_s}{\partial r}\mathrm{d}s-\int_{nh}^t\lambda_1(r,s)Z_s\mathrm{d}s-\int_{nh}^t u_1(r,s)Z_s\mathrm{d}s+\int_{nh}^t f_1(Z_s,\bar{v}(s))\mathrm{d}s+\int_{nh}^t g_1(Z_s,\bar{v}(s))\mathrm{d}w_s. \tag{9}$$

应用$(a+b+c+d+e)^2\leqslant 5a^2+5b^2+5c^2+5d^2+5e^2$ 及所给的条件可得

$$\mid V_t-Z_t\mid^2\leqslant 5\mid\int_{nh}^t\frac{\partial V_s}{\partial r}\mathrm{d}s\mid^2+5\mid\int_{nh}^t\lambda_1(r,s)Z_s\mathrm{d}s\mid^2+5\mid\int_{nh}^t u_1(r,s)Z_s\mathrm{d}s\mid^2+5\mid\int_{nh}^t f_1(Z_s,\bar{v}(s))\mathrm{d}s\mid^2+5\mid\int_{nh}^t g_1(Z_s,\bar{v}(s))\mathrm{d}w_s\mid^2. \tag{10}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和假设条件可得

$$\mid V_t-Z_t\mid^2\leqslant 5h\int_{nh}^t\mid\frac{\partial V_s}{\partial r}\mid^2\mathrm{d}s+5\theta_1^2h\int_{nh}^t\mid V_s\mid^2\mathrm{d}s+5m^2h\int_{nh}^t\mid V_s\mid^2\mathrm{d}s+5L^2h\int_{nh}^t\mid V_s\mid^2\mathrm{d}s+5\mid\int_{nh}^t g_1(Z_s,\bar{v}(s))\mathrm{d}w_s\mid^2. \tag{11}$$

由 Doob 不等式可得

$$E\mid V_t-Z_t\mid^2\leqslant 5TE(\frac{\partial V_s}{\partial r})^2h+5T\theta_1^2c_2h+5Tm^2c_2h+5TL^2c_2h+5TL^2c_2h. \tag{12}$$

式(11)中:$L=\max\limits_{i\in D}L_i$,所以有

$$c_3=5T(E(\frac{\partial V_s}{\partial r})^2h+\theta_1^2c_2+m^2c_2+2L^2c_2).$$

3 主要结论

定理 1 对于任意 $t\in[0,T]$,有

$$E\int_0^t\mid f(\bar{v}(s),V_s)-f(v(s),V_s)\mid^2\mathrm{d}s\leqslant c_4h+o(h),$$

$$E\int_0^{t_k}\parallel g(\bar{v}(s),V_s)-g(v(s),V_s)\parallel_2^2\mathrm{d}s\leqslant c_5h+o(h).$$

证明 参考文献[7].

定理 2 若条件 A_1)～A_5)成立,则有

$$E\sup_{t\in[0,T]}(\mid p_t-V_t\mid^2)\leqslant c_6h,$$

证明 由于有

$$p_t - V_t = -\int_0^t \frac{\partial(p_s - V_s)}{\partial r}\mathrm{d}s - \int_0^t \lambda_1(r,s)(p_s - V_s)\mathrm{d}s -$$
$$\int_0^t u_1(r,s)(p_s - V_s)\mathrm{d}s + \int_0^t (f_1(p_s - v(s)) - f_1(Z_s,\bar{v}(s)))\mathrm{d}s +$$
$$\int_0^t (g_1(p_s - v(s)) - g_1(Z_s,\bar{v}(s)))\mathrm{d}w_s.$$

利用 Ito 公式，Cauchy-Schwarz 不等式及假设条件可得

$$|p_t - V_t|^2 = -2\int_0^t \langle p_s - V_s, \frac{\partial(p_s - V_s)}{\partial r}\rangle \mathrm{d}s -$$
$$2\int_0^t (p_s - V_s, \lambda_1(r,s)(p_s - V_s))\mathrm{d}s - 2\int_0^t (p_s - V_s, u_1(r,s)(p_s - V_s))\mathrm{d}s +$$
$$2\int_0^t (p_s - V_s, (f_1(p_s - v(s)) - f_1(Z_s,\bar{v}(s))\mathrm{d}s +$$
$$\int_0^t \| g_1(p_s - v(s)) - g_1(Z_s,\bar{v}(s)) \|_2^2 \mathrm{d}s +$$
$$2\int_0^t (p_s - V_s, (g_1(p_s, v(s)) - g_1(Z_s,\bar{v}(s)))\mathrm{d}w_s \leqslant$$
$$(A^2\theta_2^2 + 3m + 3\theta_1 + 2L^2 + 1)\int_0^t |p_s - V_s|^2 \mathrm{d}s +$$
$$(m + 3\theta_1)\int_0^t |V_s - Z_s|^2 \mathrm{d}s + 2L\int_0^t \| p_s - Z_s \| \, |p_s - V_s| \mathrm{d}s +$$
$$\int_0^t [f_1(V_s, v(s)) - f_1(Z_s,\bar{v}(s))]^2 \mathrm{d}s + 2\int_0^t \| g_1(V_s, v(s)) - g_1(Z_s,\bar{v}(s)) \|_2^2 \mathrm{d}s +$$
$$2\int_0^t (p_s - V_s, g_1(p_s, v(s)) - g_1(Z_s,\bar{v}(s)))\mathrm{d}w_s.$$

注 1　$\langle p_s, \frac{\partial(p_s)}{\partial r}\rangle = -\int_0^A p_s d_r(p_s) = \frac{1}{2}\int_0^A \beta^2(r,s)\mathrm{d}s \int_0^A p_s^2 dr \leqslant \frac{1}{2}A^2\theta_2^2 |p_s|.$

因此，对于 $t\in[0,T]$，有

$$E\sup_{t\in[0,T]} |p_s - V_s|^2 \leqslant$$
$$(A^2\theta_2^2 + 3m + 3\theta_1 + 2L^2 + 1)\int_0^t E\sup_{t\in[0,T]} |p_s - V_s|^2 \mathrm{d}s +$$
$$(m + \theta_1)E\int_0^t |V_s - Z_s|^2 \mathrm{d}s + \int_0^t \| g_1(V_s, v(s)) - g_1(Z_s,\bar{v}(s)) \|_2^2 \mathrm{d}s +$$
$$\int_0^t [f_1(V_s, v(s)) - f_1(Z_s,\bar{v}(s))]^2 \mathrm{d}s +$$
$$2E\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t (p_s - V_s, (g_1(p_s, v(s)) - g_1(Z_s,\bar{v}(s)))\mathrm{d}w_s \leqslant$$
$$(A^2\theta_2^2 + 3m + 3\theta_1 + 2L^2 + 1)\int_0^t E\sup_{t\in[0,T]} |p_s - V_s|^2 \mathrm{d}s + c_3(m + \theta_1 + L)h \times$$
$$(c_4 + c_5)h + o(h) + 2\int_0^t E\sup_{s\in[0,t]} (p_s - V_s, (g_1(p, v(s)) - g_1(Z_s,\bar{v}(s)))\mathrm{d}w_s. \tag{13}$$

由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式可得

$$E\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t (p_s - V_s, (g_1(p_s, v(s)) - g_1(Z_s,\bar{v}(s)))\mathrm{d}w_s \leqslant$$
$$\tau_1 E[\sup_{s\in[0,T]} |p_s - V_s| (\int_0^t \| g_1(p_s, v(s)) - g_1(Z_s,\bar{v}(s)) \|_2^2 \mathrm{d}s)^{1/2}] \leqslant$$
$$\frac{1}{4}E[\sup_{s\in[0,T]} |p_s - V_s|^2] + [\tau_2\int_0^t E\| p_s - V_s \|_c^2 \mathrm{d}s + \tau_2 c_5 h + o(h)]. \tag{14}$$

式(13)中：τ_1,τ_2 是两个正常数．将式(13)代入式(12)可得

$$E\sup_{s\in[0,T]} |p_s - V_s|^2 \leqslant (A^2\theta_2^2 + 3m + 3\theta_1 + 2L^2 + 1 + 2\tau_2) \times$$

$$\int_0^t E \sup_{r\in[0,T]} |p_s - V_s|^2 \mathrm{d}s + [c_3(m+\theta_1+L)+c_4+c_5+\tau_2 c_5]h +$$

$$o(h) + \frac{1}{2}E[\sup_{s\in[0,T]} |p_s - V_s|^2 \leqslant Q_1 h + Q_2\int_0^t E \sup_{r\in[0,T]} |p_s - V_s|^2 \mathrm{d}s,$$

其中:$Q_1 = 2Tc_3(m+\theta_1+L)$;$Q_2 = 2(A^2\theta_2^2+3m+3\theta_1+2L^2+1+2\tau_2)$.

运用 Gronwall 引理可以得到

$$E \sup_{s\in[0,T]} |p_s - V_s|^2 \leqslant c_6 h,$$

其中:$c_6 = Q_1\exp(Q_2 T)$.

定理3 若假设条件 A_1)～A_5)成立,则方程(1)的 Euler 数值解是在均方意义下指数稳定.证明方法与文献[6]类似.

4 结束语

利用文献[3,6]的方法,讨论带 Markov 跳的随机收获系统的数值解稳定性问题,得到了在外界环境对系统产生影响的条件下,数值解稳定性存在的充分条件,所得到的结论是文献[8]的扩展.

参考文献:

[1] ARNOLD L. Stochastic differential equations: Theory and applications[M]. Detroit: Wiley,1972.

[2] ZHANG Qi-min,HAN Chang-zhao. Numerical analysis for stochastic age-structured population equations[J]. Applied Mathmatics and Computation,2005,169(1):278-294.

[3] LI Rong-hua,MENG Hong-bing,CHANG Qin. Convergence of numerical solutions to stochastic age-dependent population equations[J]. Comput Appl Math,2006,193(1):109-120.

[4] ZHANG Qi-min,LIU Wen-an,NIE Zan-kan. Existence, uniqueness and exponential stability for stochastic age-dependent population[J]. Appl Math Comput,2004,154(1):183-201.

[5] 李鸿.一种单种群收获模型的稳定性分析[J].生物数学学报,2001,16(1):63-69.

[6] PANG Wan-kai,LI Rong-hua, LIU Ming. Exponential stability of numerical solutions to stochastic age-dependent population equations[J]. Applied Mathematics and Computation,2006,183(1):152-159.

[7] ZHOU Shao-bo,WU Fu-ke. Convergence of numerical solution to neutral stochastic delay differential equation with Markovian switching[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2009,229(1):85-96.

[8] 何荣泽,王绵森.一类非线性周期种群系统的最优收获控制[J].应用数学,2003,16(3):88-93.

Exponential Stability of Numerical Solutions to Nonlinear Stochastic Harvesting Population System with Markov Jumps

ZHAO Chao-feng[1], ZHANG Qi-min[1,2]

(1. School of Informatics and Computer Science, Beifang University of Nationalities, Yinchuan 750021, China;
2. School of Mathematics and Computer Science, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: A harvesting exponential stability of numerical solution for nonlinear stochastic population system with jump is studied with the external environment impact on the system of Markov jump. One sufficient condition for the exponential stability of numerical solution is obtained through some special inequality, Ito formula and Burkholder-Davis-Gundy inequality. The obtained result is the expansion of certainty population system.

Keywords: Markov jump; stochastic population model; Ito formula; numerical solution; stability

(**责任编辑**:陈志贤 **英文审校**:黄心中)