

文章编号: 1000-5013(2012)04-0467-05

## 一类二阶具偏差变元微分方程周期解

陈应生

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 研究具有偏差变元的二阶微分方程  $x''(t) + h(x'(t)) + f(x(t))x'(t) + g(t, x(t - \tau(t))) = p(t)$  的周期解的存在性问题, 利用重合度理论, 在满足一定条件下, 得到方程至少存在一个周期解的新结果.

**关键词:** 微分方程; 周期解; 重合度; 偏差变元

**中图分类号:** O 175.14

**文献标识码:** A

二阶微分方程周期解问题的研究一直是人们广泛关注的问题, 文献[1-4]研究了具有偏差变元的 Rayleigh 方程  $x''(t) + f(x'(t)) + g(t, x(t - \tau(t))) = p(t)$  的周期解的充分条件. 文献[5]研究了 Duffing 方程  $x''(t) + f(x'(t)) + gx(t - \tau(t)) = p(t)$  的  $T$  周期解问题, 得出如果存在  $M > 0, D > 0, K > 0$ , 使得 i) 当  $x \in \mathbf{R}$  时,  $|f(x)| \leq K$ ; ii) 当  $x \leq -D$  时,  $g(x) \geq -M$ ; iii) 当  $|x| \geq D$  时,  $xg(x) > 0$ , 则方程至少存在一个周期解. 文献[6]研究了  $x''(t) + h(x'(t)) + f(x(t))x'(t) + gx(t - \tau(t)) = p(t)$  的  $T$  周期解问题, 其中:  $f, g, \tau$  和  $p$  都是定义在  $\mathbf{R}$  的连续函数,  $\tau$  和  $p$  以  $T$  为周期,  $\int_0^T p(t) dt = 0$ . 文献[6]得出如果存在  $M > 0, D > 0, H > 0$  和  $K > 0$ , 使得 i) 当  $x \in \mathbf{R}$  时,  $|f(x)| \leq M$ ; ii) 当  $x \in \mathbf{R}$  时,  $|h(x)| \leq K$ ; iii) 当  $|x| \geq D$  时,  $xg(x) > 0$  且  $|g(x)| > K$ ; iv) 当  $x \leq -D$  时,  $g(x) \geq -H$ , 则当  $TM < 1$  时, 方程至少存在一个  $T$  周期解. 本文研究微分方程

$$x''(t) + h(x'(t)) + f(x(t))x'(t) + g(t, x(t - \tau(t))) = p(t) \quad (1)$$

的周期解问题. 式(1)中:  $f, \tau$  和  $p$  都是定义在  $\mathbf{R}$  上的连续函数;  $g$  是  $[0, T] \times \mathbf{R}$  上的连续函数;  $\tau$  和  $p$  以  $T$  为周期;  $g$  是关于第 1 个变量  $t$  以  $T$  为周期, 且  $\int_0^T p(t) dt = 0$ .

## 1 预备知识

引入重合度理论的连续性引理. 设  $X, Y$  是赋范向量空间,  $L: \text{Dom } L \subset X \rightarrow Y$  为线性映射,  $N: X \rightarrow Y$  是连续映射. 若  $\dim \text{Ker } L = \text{co dim Im } L < +\infty$ ,  $\text{Im } L$  为  $Y$  的非空闭子集, 则称  $L$  是指标为零的 Fredholm 映射, 且存在投影  $P: X \rightarrow X, Q: Y \rightarrow Y$ , 使得  $\text{Im } P = \text{Ker } L, \text{Im } L = \text{Ker } Q = \text{Im}(I - Q), X = \text{Ker } L \oplus \text{Ker } P, Y = \text{Im } L \oplus \text{Im } Q$ , 则  $L|_{\text{Dom } L \cap \text{Ker } P}: \text{Dom } L \cap \text{Ker } P \rightarrow \text{Im } L$  可逆. 设其逆映射为  $K_P, \Omega$  为  $X$  中的有界开集, 若  $QN: \bar{\Omega} \rightarrow Y$  与  $K_P(I - Q)N: \bar{\Omega} \rightarrow X$  都是紧的, 则称映射  $N$  的  $\bar{\Omega}$  上是  $L$ -紧的. 由于  $\text{Im } Q$  与  $\text{Ker } L$  同构, 因而存在同构映射  $J: \text{Im } Q \rightarrow \text{Ker } L$ .

**引理 1** 设  $\Omega$  是  $X$  中的有界开集,  $L: \text{Dom } L \subset X \rightarrow Y$  是指标为零的 Fredholm 映射,  $N: X \rightarrow Y$  在  $\bar{\Omega}$  上是  $L$ -紧的, 假设 i) 对任意的  $\lambda \in (0, 1)$ , 方程  $Lx = \lambda Nx$  的解满足  $x \notin \partial Q$ ; ii) 对任意的  $x \in \partial Q \cap \text{Ker } L, QNx \neq 0$ ; iii) Brouwer 度  $\deg\{JQN, Q \cap \text{Ker } L, 0\} \neq 0$ . 则方程  $Lx = Nx$  在  $\text{Dom } L \cap \bar{\Omega}$  至少存在一个解.

设  $X = \{x \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) : x(t, T) = x(t)\}, Y = \{x \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}) : x(t + T) = x(t)\}$ . 定义范数  $\|x\|_0 =$

收稿日期: 2011-09-21

通信作者: 陈应生(1976-), 男, 讲师, 主要从事常微分及泛函微分方程的研究. E-mail: cyssheng@hqu.edu.cn.

基金项目: 国务院侨办科研基金资助项目(09QZR10); 福建省自然科学基金资助项目(Z0511026)

$\max_{t \in [0, T]} |x(t)|, \|x\| = \max\{|x|_0, |x'|_0\}$ , 则  $(X, \|\cdot\|)$  和  $(X, |\cdot|_0)$  都是 Banach 空间, 记  $\|x\|_2 = (\int_0^T |x(t)|^2 dt)^{1/2}$ .

定义线性算子  $L: \text{Dom } L \rightarrow Y, Lx = x''$ , 其中:  $x \in \text{Dom } L = C^2_T = \{x \in C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}) | x(t+T) = x(t)\} \subset X$ , 及定义连续映射  $N: X \rightarrow Y, Nx = -h(x'(t)) - f(x'(t)) - f(x(t))x'(t) - g(t, x(t-\tau(t))) + p(t)$ ,  $x \in X$ . 易知, 要证明方程(1)至少存在一个周期解等价于证明算子方程  $Lx = Nx, x \in \text{Dom } L \subset X$  至少存在一个周期解.

由算子  $L$  的定义可知,  $\text{Ker } L = \mathbf{R}, \text{Im } L = \{y \in Y, \int_0^T y(t) dt = 0\}$  是  $Y$  中闭子集, 且  $\text{Dim Ker } L = 1 = \text{co dim Im } L < +\infty$ , 因此算子  $L$  是指标为零的 Fredholm 映射.

定义投影  $P: X \rightarrow \text{Ker } L$  和  $Q: Y \rightarrow Y$  为  $Px = x(0) = x(T), \forall x \in X, Qy = (\frac{1}{T}) \int_0^T y(t) dt, \forall x \in Y$ , 易见  $P, Q$  都是连续投影, 且满足  $\text{Im } P = \text{Ker } L, \text{Im } L = \text{Ker } Q = \text{Im}(I - Q), X = \text{Ker } L \oplus \text{Ker } P, Y = \text{Im } L \oplus \text{Im } Q$ , 则  $L|_{\text{Dom } L \cap \text{Ker } P}: \text{Dom } L \cap \text{Ker } P \rightarrow \text{Im } L$  可逆, 逆算子  $K_P: \text{Dom } L \cap \text{Ker } P \rightarrow \text{Im } L$  表示为

$$\begin{aligned} K_P y(t) &= \int_0^t \int_0^s y(\xi) d\xi ds - \frac{t}{T} \int_0^T \int_0^s y(\xi) d\xi ds = \\ &= -\frac{t}{T} \int_0^T (T-s)y(s) ds + \int_0^t (t-s)y(s) ds, \quad y \in \text{Im } L \subset Y. \\ QNx &= -\frac{1}{T} \int_0^T [-h(x'(t)) - g(t, x(t-\tau(t))) + p(t)] dt, \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_P(I-Q)Nx &= \int_0^t (t-s)Nx(s) ds - \frac{t}{T} \int_0^T (T-s)Nx(s) ds - \\ &= \frac{1}{T} \int_0^t (t-s)Nx(\xi) d\xi ds + \frac{1}{T^2} \int_0^T (T-s)Nx(\xi) d\xi ds = \\ &= \int_0^t (t-s)Nx(s) ds - (\frac{t^2}{2T} + \frac{t}{2}) \int_0^T Nx(s) ds + \frac{t}{T} \int_0^T Nx(s) ds, \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

其中:  $Nx(s) = -h(x'(s)) - f(x(s))x'(s) - g(s, x(s-\tau(s))) + p(s)$ .

利用 Lebesgue 收敛定理, 可以证明  $QN: X \rightarrow Y$  和  $K_P(I-Q)N: X \rightarrow X$  是连续的, 再利用 Arzela-Ascoli 定理可以证明, 对于  $X$  中的任意有界开子集  $\Omega, QN: \Omega \rightarrow Y$  及  $K_P(I-Q)N: \Omega \rightarrow X$  是紧的, 因而  $N$  在  $\Omega$  上是  $L$ -紧的.

显然, 算子方程  $Lx = \lambda Nx, x \in \text{Dom } L \subset X, \lambda \in (0, 1)$  等价于方程

$$x'' = -\lambda h(x'(t)) - \lambda f(x(t))x'(t) - \lambda g(t, x(t-\tau(t))) + \lambda p(t). \tag{2}$$

**引理 2**<sup>[7]</sup> 即 Wirtinger 不等式. 若  $f \in C^1[a, b]$ , 且  $f(a) = f(b) = 0$ , 则有  $\int_a^b f^2(x) dx \leq (\frac{b-a}{\pi})^2 \times \int_a^b f'^2(x) dx$ .

**引理 3** 即 闵可夫斯基(Minkowski)不等式. 若  $f, g \in C[a, b]$ , 则  $(\int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx)^{1/2} \leq (\int_a^b (f(x))^2 dx)^{1/2} + (\int_a^b (g(x))^2 dx)^{1/2}$ .

如果存在  $a \geq 0, b > 0, D > 0, H > 0, K > 0$ , 那么有  $A_1)$  当  $x \in \mathbf{R}$  时,  $|h(x)| \leq K; A_2)$  当  $|x| \geq D$  时,  $xg(t, x) > 0$ , 且  $|g(t, x)| > K; A_3)$  当  $x \in \mathbf{R}$  时,  $|f(x)| \leq a|x| + b; A_4)$   $\lim_{x \rightarrow -\infty} \max_{t \in (0, T)} \frac{g(t, x)}{x} \leq r; A_5)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \max_{t \in (0, T)} \frac{g(t, x)}{x} \leq r.$$

**引理 4** 若条件  $A_1), A_2)$  成立, 则方程(2)的任一  $T$  周期解  $x(t)$  满足

$$|x|_0 < D + \frac{\sqrt{T}}{2} |x'|_2. \tag{3}$$

证明 设  $x(t) \in C_T^1$  是方程(2)任一周期解, 将方程(2)两边同时从 0 到  $T$  积分, 得  $\int_0^T [h(x'(t)) - g(t, x(t - \tau(t)))] dt = 0$ . 由积分中值定理得, 存在  $\xi \in [0, T]$ , 使得  $h(x'(\xi)) = -g(\xi, x(\xi - \tau(\xi))) = 0$ . 若  $|x(\xi - \tau(\xi))| > D$ , 由条件  $A_2), A_3)$  可得  $K < |g(\xi, x(\xi - \tau(\xi)))| = |h(x'(\xi))| \leq K$ . 这是矛盾的, 故  $|x(\xi - \tau(\xi))| \leq D$ . 因为  $\xi - \tau(\xi) \in \mathbf{R}$ , 故存在整数  $k$  和  $t^* \in [0, T]$ , 使得  $\xi - \tau(\xi) = kT + t^*$ , 及有

$$|x(t^*)| = |x(\xi - \tau(\xi))| \leq D. \tag{4}$$

又因为

$$|x(t)| \leq |x(t^*)| + \int_{t^*}^t |x'(s)| ds,$$

且有

$$|x(t + T)| \leq |x(t^* + T)| + \int_t^{t^* + T} |x'(s)| ds,$$

所以有

$$|x|_0 = \max_{t \in (0, T)} |x(t)| \leq D + \frac{\sqrt{T}}{2} |x'|_2.$$

## 2 主要结论

**定理 1** 若条件  $A_1), A_2), A_3), A_4)$  成立, 则当  $\frac{rT^2}{\pi} < 1$  时, 方程(1)至少有一个  $T$  周期解.

证明 设  $\Omega_1 = \{x : x \in \text{Dom } L \subset X, Lx = \lambda Nx, \lambda \in (0, 1)\}$ . 首先证明  $\Omega_1$  就有界的. 设  $x = x(t) \in \Omega_1$ , 则  $x(t)$  是方程(2)的解, 对方程(2)两边从 0 到  $T$  上积分可得

$$\int_0^T [h(x'(t)) + g(t, x(t - \tau(t)))] dt = 0. \tag{5}$$

由  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \max_{t \in (0, T)} \frac{g(t, x)}{x} \leq r$  及条件  $A_2)$  可得, 存在  $\rho > D$ , 使得当  $x < -\rho$  时有

$$|g(t, x)| \leq r |x|. \tag{6}$$

设  $E_1 = \{t : t \in [0, T], x(t - \tau(t)) > \rho\}$ ,  $E_2 = \{t : t \in [0, T], x(t - \tau(t)) < -\rho\}$ ,  $E_3 = \{t : t \in [0, T], |x(t - \tau(t))| \leq \rho\}$ , 由式(3)得

$$\int_{E_1 + E_2 + E_3} g(t, x(t - \tau(t))) dt = - \int_0^T h(x'(t)) dt,$$

所以有

$$\int_{E_1} g(t, x(t - \tau(t))) dt \leq \int_{E_2 + E_3} |g(t, x(t - \tau(t)))| dt + \int_0^T |h(x'(t))| dt.$$

由条件  $A_2)$  可得

$$\int_{E_1} |g(t, x(t - \tau(t)))| dt \leq \int_{E_2 + E_3} |g(t, x(t - \tau(t)))| dt + \int_0^T |h(x'(t))| dt,$$

所以可得

$$\int_0^T |g(t, x(t - \tau(t)))| dt \leq 2 \int_{E_2 + E_3} |g(t, x(t - \tau(t)))| dt + \int_0^T |h(x'(t))| dt. \tag{7}$$

设  $v(t) = x(t + t^*) - x(t^*)$ , 则有  $v(0) = v(T) = 0$ . 由引理 2 可得

$$\int_0^T |v(t)|^2 dt \leq \left(\frac{T}{\pi}\right)^2 \int_0^T |v'(t)|^2 dt = \left(\frac{T}{\pi}\right)^2 \int_0^T |x'(t)|^2 dt,$$

又  $|x|_2^2 = \int_0^T |x(t)|^2 dt = \int_{t^*}^{T+t^*} |x(t + t^*)|^2 dt = \int_0^T |x(t + t^*)|^2 dt,$

由 Minkowski 不等式及式(4)有

$$|x|_2 = \left[\int_0^T |x(t)|^2 dt\right]^{1/2} \leq \frac{T}{\pi} |x'|_2 + D\sqrt{T}. \tag{8}$$

由  $E_2 + E_3$  的定义及式(6), (8)可得

$$\int_{E_2} |g(t, x(t - \tau(t)))| dt \leq r\sqrt{T}(\sqrt{T}D + \frac{T}{\pi} |x'|_2), \tag{9}$$

$$\int_{E_3} |g(t, x(t - \tau(t)))| dt \leq Tg_\rho. \tag{10}$$

其中： $g_\rho = \max_{|x| \leq \rho} |g(x)|$ .

由式(7),(9),(10)及条件  $A_1$  中的  $|h(x)| \leq K$ , 可得到

$$\int_0^T |g(t, x(t - \tau(t)))| dt \leq 2r \sqrt{T} (\sqrt{T}D + \frac{T}{\pi} |x'|_2) + 2Tg_\rho + TK. \tag{11}$$

由条件  $(A_1)$  可得

$$|x'|^2 \leq \int_0^T K |x(t)| dt + |x|_0 \left| \int_0^T g(t, x(t - \tau(t))) dt \right| + \sqrt{T} |p|_2 |x|_2. \tag{12}$$

由式(3),(12)可得

$$\begin{aligned} |x'|^2 &\leq K \sqrt{T} (\sqrt{T}D + \frac{T}{\pi} |x'|_2) + (D + \frac{\sqrt{T}}{2} |x'|_2) \times \\ &\quad [2r \sqrt{T} (\sqrt{T}D + \frac{T}{\pi} |x'|_2) + 2Tg_\rho + TK] + \sqrt{T} |p|_2 (\sqrt{T}D + \frac{T}{\pi} |x'|_2). \end{aligned}$$

所以有

$$\alpha_1 |x'|_2^2 - \beta_1 |x'|_2 - \gamma_1 \leq 0.$$

其中： $\alpha_1 = 1 - \frac{rT^2}{\pi}$ ,  $\beta_1 = (\frac{K}{\pi} + \frac{2rD}{\pi} + rDg_\rho + \frac{K}{2} + \frac{|p|_2}{\pi})T^{3/2}$ ,  $\gamma_1 = (K + 2rD + 2g_\rho + K + |p|_2)DT$ . 故一定

存在  $M_0 > 0$ , 使得  $|x'|_2 \leq M_0$ ,  $|x|_0 < D + \frac{\sqrt{T}}{2} |x'|_2 \leq M_1$ . 所以有

$$|x|_2 < D \sqrt{T} + \frac{T}{\pi} |x'|_2 \leq M_2.$$

由式(11)及条件  $A_1), A_3)$  可得

$$\begin{aligned} \int_0^T |x''(t)| dt &\leq 2r \sqrt{T} (\sqrt{T}D + \frac{T}{\pi} |x'|_2) + \\ &\quad 2Tg_\rho + 2TK + a |x|_2 |x'|_2 + b \sqrt{T} |x'|_2 + \int_0^T |p(t)| dt. \end{aligned}$$

故一定存在  $M_3 > 0$ , 使得  $\int_0^T |x''(t)| dt \leq M_3$ ,  $x(0) = x(T)$ , 以及存在  $\eta \in (0, T)$ , 使得  $x'(\eta) = 0$ ,  $|x'(t)| = |x'(\eta) + \int_\eta^t x''(t) dt| \leq \int_0^T |x''(t)| dt \leq M_3$ . 所以  $|x'|_0 = \max_{t \in [0, T]} |x'(t)| \leq M_3$ ,  $\|x\| = \max\{|x|_0, |x'|_0\} = \max\{M_1, M_3\} \triangleq M_4$ . 即  $\Omega_1$  是有界的.

设  $\Omega_2 = \{x : x \in \text{Ker } L, Nx \in \text{Im } L\}$ , 则对任意的  $x \in \Omega_2$ , 存在  $m \in \mathbf{R}$ , 使得  $x = m$ , 且  $\int_0^T g(t, m) dt = 0$ . 故而存在  $\xi \in [0, T]$ , 使得  $g(\xi, m) = 0$ , 从而由条件  $A_2)$  可得,  $|m| \leq D$ , 故  $\Omega_2$  是有界的

设  $\Omega = \{x : x \in X, \|x\| < D + M_3 + 1 := M\}$ , 则  $\Omega \supset \Omega_1 \cup \Omega_2$ , 且它是一个闭集. 对  $\forall x \in \partial\Omega \cap \text{Ker } L$  和  $\lambda \in (0, 1)$ , 有  $Lx \neq \lambda Nx$ ; 对  $\forall x \in \partial\Omega \cap \text{Ker } L$ , 有  $x = N(N > D)$ , 或  $x = -N$ . 因此有

$$QNx = (\frac{1}{T}) \int_0^T [-h(x'(t)) - f(x(t))x'(t) - g(t, x(t - \tau(t))) - p(t)] dt = -g(\pm N) \neq 0.$$

作变换  $H(x, s) = sx + (1-s)g(x)$ ,  $s \in [0, 1]$ , 因为  $\forall x \in \partial\Omega \cap \text{Ker } L$  及  $s \in [0, 1]$ , 有  $xH(x, s) = sx^2 + (1-s)g(x)x > 0$ , 因此  $H(x, s)$  是同伦变换.

因为  $\text{Im } \Omega = \text{Ker } L = \mathbf{R}$ , 所以可取同构映射  $J = I : \text{Im } \Omega \rightarrow \text{Ker } L$ . 由拓扑度的同伦不变性原理可知  $\deg\{JQNx, \Omega \cap \text{Ker } L, 0\} = \deg\{QNx, \Omega \cap \text{Ker } L, 0\} = \deg\{H(x, 0), \Omega \cap \text{Ker } L, 0\} = \deg\{H(x, 1), \Omega \cap \text{Ker } L, 0\} = 1 \neq 0$ .

故定理 1 成立, 方程(1)至少有一个  $T$  周期解.

**定理 2** 若条件  $A_1), A_2), A_3), A_4)$  成立, 则当  $\frac{rT^2}{\pi} < 1$  时, 方程(1)至少有一个  $T$  周期解.

证明 与定理 1 相同.

即当  $x \leq -D, g(x) \geq -H \cdot |x| \geq D$  时,  $|g(x)| > K$ , 则有  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \max_{t \in (0, T)} \frac{|g(t, x)|}{|x|} = 0$ . 文献[6]是定理 1 中, 当  $r=0, a=0$  的特殊情形, 且不需要  $TM < 1$  的条件. 定理 1 推广改进了文献[6]的结果. 文献[5]是当  $h(x)=0, a=0, r=0$  时的特殊情形, 定理 1 改进了文献[5]的结果.

### 3 例子

考虑方程

$$x''(t) + \frac{\sin x'(t)}{2\pi(1+\pi)} + [x(t) + \cos(1-x(t))]x'(t) + \frac{x(t - \sin t)}{2\pi(1+\pi)} = \cos t.$$

其中:  $h(x) = \frac{\sin x}{2\pi(1+\pi)}; g(x) = \frac{c}{2\pi(1+\pi)}; f(x) = x + \cos(1-x).$

$|h(x)| \leq \frac{1}{2\pi(1+\pi)},$  当  $|x| \geq 1$  时,  $|g(x)| \geq \frac{1}{2\pi(1+\pi)}, |f(x)| \leq |x| + 1, T = 2\pi, r = \frac{1}{2\pi(1+\pi)},$   
 $\frac{rT^2}{\pi} = \frac{1}{\pi(1+\pi)} \cdot 2\pi < 1.$  由定理 1 可知, 方程(1)至少有一个  $T$  周期解.

参考文献:

- [1] LIU Bing-wen, HUANG Li-hong. Existence and uniqueness of periodic solutions for a kind of Liénard equation with a deviating argument[J]. Applied Math Letter, 2008, 21(1): 51-56.
- [2] ZHAO Jun-fang, GENG Feng-jie, ZHAO Jian-feng, et al. Positive solutions to a new kind Strum-Liouville-like four-point boundary value problem[J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 217(2): 811-819.
- [3] 鲁世平, 葛渭高, 郑祖麻. 具偏差变元的 Rayleigh 方程周期解问题[J]. 数学学报, 2004, 47(2): 299-304.
- [4] 余志伟, 王全义. 一类具有偏差变元的二阶泛函微分方程的周期解[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2009, 30(6): 709-714.
- [5] 李鹏程. 二阶非线性泛函微分方程周期解的存在定理[J]. 吉林大学学报: 理学版, 2003, 41(3): 272-275.
- [6] 陈新一. 二阶非线性泛函微分方程周期解的存在定理[J]. 西北民族大学学报: 自然科学版, 2010, 31(1): 1-4.
- [7] 匡继昌. 常用不等式[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2010.

## Periodic Solutions for a Class of Second Order Differential Equation with Deviating Arguments

CHEN Ying-sheng

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** In this paper, we study the problem on the existence of periodic solutions for a class of second order differential equations  $x''(t) + h(x'(t)) + f(x(t))x'(t) + g(t, x(t - \tau(t))) = p(t)$ . By means of the coincidence degree theory, one new result is obtained under some conditions.

**Keywords:** differential equation; periodic solution; coincidence degree; deviating arguments

(责任编辑: 陈志贤      英文审校: 黄心中)