文章编号: 1000-5013(2012)04-0460-07

具时滞和脉冲的植化相克系统周期正解

汪东树, 王全义

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 考虑一类具时滞和脉冲的两种群周期浮游生物植化相克系统,利用一些分析技巧和重合度理论,并巧妙构造一个同伦变换,得到该系统存在周期正解新结果,推广并改进了相关结果.

关键词: 植化相克; 脉冲; 时滞; 重合度理论; 周期解

中图分类号: O 175.6 **文献标志码:** A

1 预备知识

在水生生态系统中,浮游植物群落巨大波动的研究是一个重要的课题[1-3].考虑到种群通过产生植物间抑制物质毒素会影响到其他种群数量增长,以及环境呈周期性变化(季节性变化),文献[4]研究了一类系统

$$\left.\begin{aligned} N'_1 &= N_1[r_1(t)-a_1(t)N_1-b_1(t)N_2-c_1(t)N_1N_2(t-\tau_2(t))], \\ N'_2 &= N_2[r_2(t)-a_2(t)N_2-b_2(t)N_1-c_2(t)N_1(t-\tau_1(t))N_2] \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

的周期解存在性问题.其中:系统(1)的系数和时滞都是连续可微的 ω-周期函数.

考虑到脉冲效应对种群的影响,文献[5-6]研究了具脉冲的系统

$$\left.\begin{aligned} N'_1 &= N_1[r_1(t)-a_1(t)N_1-b_1(t)N_2-c_1(t)N_1N_2(t-\tau_2(t))], \quad t\neq t_k, \\ N'_2 &= N_2[r_2(t)-a_2(t)N_2-b_2(t)N_1-c_2(t)N_1(t-\tau_1(t))N_2], \quad t\neq t_k, \\ N_1(t_k^+)-N_1(t_k) &= d_{1,k}N_1(t_k), \quad t=t_k, \quad k=1,2,\cdots, \\ N_2(t_k^+)-N_2(t_k) &= d_{2,k}N_2(t_k), \quad t=t_k, \quad k=1,2,\cdots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

的周期解存在性等问题.

考虑具有脉冲和可变时滞植化相克系统

$$\left.\begin{aligned} y'_1(t) &= y_1(t)[r_1(t)-a_1(t)y_1(t-\tau_1(t))-b_1(t)y_2(t-\sigma_1(t))- \\ &\qquad c_1(t)y_1(t-\tau_2(t))y_2(t-\sigma_2(t))], \quad t\neq t_k, \\ y'_2(t) &= y_2(t)[r_2(t)-a_2(t)y_2(t-\sigma_3(t))-b_2(t)y_1(t-\tau_3(t))- \\ &\qquad c_2(t)y_2(t-\sigma_4(t))y_1(t-\tau_4(t))], \quad t\neq t_k, \\ y_1(t_k^+) &= (1+d_{1,k})y_1(t_k), \quad t=t_k, \quad k=1,2,\cdots, \\ y_2(t_k^+) &= (1+d_{2,k})y_2(t_k), \quad t=t_k, \quad k=1,2,\cdots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

的情况.其中:系统(3)满足以下 3 点假设:

A1) $0<t_1<t_2<\cdots<t_p<\omega$ 是一个周期内固定的脉冲点且 $t_{k+p}=t_k+\omega(k=1,2,\cdots)$;

A2) $d_{i,k}$是一个实序列($d_{i,k}$可以看成是种群 y_i 在 t_k 时刻的出生率或收获比率),且 $d_{i,k}>-1$,$d_{i,k}=d_{i,(k+p)}(i=1,2;k=1,2,\cdots)$;

A3) $a_i(t)$,$b_i(t)$,$c_i(t)$是非负连续的 ω 周期函数, $r_i(t)$,$\tau_j(t)$,$\sigma_j(t)$是连续的 ω 周期函数,且满足

收稿日期: 2011-09-29

通信作者: 汪东树(1981-),男,讲师,主要从事微分方程理论和应用的研究. E-mail:wangds@hqu.edu.cn.

基金项目: 国务院侨办科研基金资助项目(09QZR10);中央高校基本科研业务费资金资助项目,华侨大学科研基金资助项目(10HZR025)

$\int_0^\omega a_i(t)\mathrm{d}t>0, \int_0^\omega b_i(t)\mathrm{d}t>0(i=1,2; j=1,2,3,4)$.

2　相关引理和定义

首先,引入重合度理论中的延拓定理.

设 X,Z 是赋范向量空间，$L:\mathrm{Dom}\,L\subset X\to Z$ 为线性映射，$N:X\to Z$ 为连续映射. 若 $\dim\ker L=\mathrm{co}\dim\mathrm{Im}\,L<+\infty$ 且 $\mathrm{Im}\,L$ 为 Z 中闭子集,则称 L 为指标为零的 Fredholm 映射. 如果 L 是指标为零的 Fredholm 映射,且存在连续投影 $P:X\to X$ 及 $Q:Z\to Z$,使得 $\mathrm{Im}\,P=\mathrm{Ker}\,L$, $\mathrm{Im}\,L=\mathrm{Ker}\,Q=\mathrm{Im}(I-Q)$, $\boldsymbol{x}=\mathrm{Ker}\,L\oplus\mathrm{Ker}\,P$ 和 $Z=\mathrm{Im}\,L\oplus\mathrm{Im}\,Q$，则 $L_p\triangleq L|_{\mathrm{Dom}\,L\cap\mathrm{Ker}\,P}:\mathrm{Dom}\,L\cap\mathrm{Ker}\,P\to\mathrm{Im}\,L$ 可逆. 设其逆映射为 K_P,又设 Ω 为 X 中的有界开集，若 $QN:\bar{\Omega}\to Z$ 与 $K_P(I-Q)N:\bar{\Omega}\to X$ 都是紧的，则称 Z 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L-紧的. 由于 $\mathrm{Im}\,Q$ 与 $\mathrm{Ker}\,L$ 同构，因而存在同构映射 $J:\mathrm{Im}\,Q\to\mathrm{Ker}\,L$.

引理 1[7]　设 X,Z,L,N 如上定义，而且 L 是指标为零的 Fredholm 映射. 又设 Ω 为 X 中的有界开集，N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L-紧的. 假设

1）对任意的 $\lambda\in(0,1)$，方程 $L\boldsymbol{x}=\lambda N\boldsymbol{x}$ 的解满足 $X\notin\partial\Omega$(这里$\partial\Omega=\bar{\Omega}/\Omega$)；

2）对任意的 $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L, QN\boldsymbol{x}\neq0$；

3）Brouwer 度 $\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L,0\}\neq0$，这里的 J,Q 如上定义. 则方程 $L\boldsymbol{x}=N\boldsymbol{x}$ 在 $\mathrm{Dom}\,L\cap\bar{\Omega}$ 内至少存在一个解.

为了运用重合度理论证明主要的结论，需要引入一些函数空间.

记 $PC(\mathbf{R},\mathbf{R})=\{\boldsymbol{\Psi}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, 对于 $t\in\mathbf{R}$, $t\neq t_k$, $\boldsymbol{\Psi}(t)$是连续的，且当 $t\in\mathbf{R}$, $t\neq t_k$ 时是左连续的，$\boldsymbol{\Psi}(t_k^+)$存在，$k=1,2,\cdots\}$; $PC^1(\mathbf{R},\mathbf{R})=\{\boldsymbol{\Psi}:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\boldsymbol{\Psi}'(t)\in PC(\mathbf{R}\to\mathbf{R})\}$; $PC([0,\omega],\mathbf{R})=\{\boldsymbol{\Psi}(t)\in PC(\mathbf{R},\mathbf{R}):\boldsymbol{\Psi}(t+\omega)=\boldsymbol{\Psi}(t),t\in\mathbf{R}\}$.

取 $X=\{\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}\,|\,x_i\in PC([0,\omega],\mathbf{R}),x_i(t+\omega)=x_i(t),\forall t\in\mathbf{R},i=1,2\}$ 和 $Z=X\times\mathbf{R}^{2\cdot p}$，其中 $\mathbf{R}^{2\cdot p}=\underbrace{\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2\times\cdots\times\mathbf{R}^2}_{p}$.

另取范数

$$\|\boldsymbol{x}\|=\max\{\sup_{t\in[0,\omega]}|x_1(t)|,\sup_{t\in[0,\omega]}|x_2(t)|\},\qquad\boldsymbol{x}\in X;$$

$$\|\boldsymbol{z}\|=\|\boldsymbol{x}\|+\sum_{k=1}^{p}\boldsymbol{r}_k,\quad\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{x},r_1,r_2,\cdots,\boldsymbol{r}_p)\in Z,$$

其中：$\boldsymbol{r}_k=\begin{pmatrix}r_{1,k}\\r_{2,k}\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^2$，$\|\boldsymbol{r}_k\|=\max\{|r_{1,k}|,|r_{2,k}|\},k=1,2,\cdots,p$. 则$(X,\|\cdot\|)$和$(Z,\|\cdot\|)$都是 Banach 空间.

定义 1　如果 $y_1(t)$，$y_2(t)\in PC^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$,使得$(y_1(t),y_2(t))^{\mathrm{T}}$ 满足式(3)，则称$(y_1(t),y_2(t))^{\mathrm{T}}$ 是系统(3)的解.

定义 2[8]　函数集 $F\subset PC([0,\omega],\mathbf{R})$被称为是在$[0,\omega]$内拟等度连续的，如果对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\boldsymbol{x}\in F$，$k\in\mathbf{R}^+$，$\tau_1,\tau_2\in(t_{k-1},t_k)\cap[0,\omega]$，$|\tau_1-\tau_2|<\delta$ 时，就有$|\boldsymbol{x}(\tau_1)-\boldsymbol{x}(\tau_2)|<\varepsilon$.

引理 2[8]　函数集 $F\subset PC([0,\omega],\mathbf{R})$是相对紧的当且仅当

1）F 是有界的，存在常数 $M>0$，使得任一 $\boldsymbol{\Psi}\in F$ 都有 $\|\boldsymbol{\Psi}\|=\sup\{|\boldsymbol{\Psi}|:t\in[0,\omega]\}\leqslant M$；

2）F 在$[0,\omega]$内是拟等度连续的.

引理 3[9]　若函数 $f(t)\in PC^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$，那么

$$\left|\sup_{s\in[0,\omega]}f(s)-\inf_{s\in[0,\omega]}f(s)\right|\leqslant\frac{1}{2}\left[\int_0^\omega|f'(s)|\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{p}|\Delta f(t_k)|\right],$$

若 $f(t)$是一连续的 ω-周期函数，就记

$$\bar{f}=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(t)\mathrm{d}s.$$

为了方便叙述，引入下面记号：

$$R_1 = \bar{r}_1 + \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{p}\ln(1+d_{1,k}), \qquad R_2 = \bar{r}_2 + \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{p}\ln(1+d_{2,k});$$

$$H_1 = \min\left\{\ln\frac{R_1}{a_1},\ln\frac{R_2}{b_2}\right\} + \frac{1}{2}\omega(R_1 + |\bar{r}_1|) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}|\ln(1+d_{1,k})|;$$

$$H_2 = \min\left\{\ln\frac{R_1}{b_1},\ln\frac{R_2}{a_2}\right\} + \frac{1}{2}\omega(R_2 + |\bar{r}_2|) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}|\ln(1+d_{2,k})|;$$

$$\begin{aligned} A_1(t,\boldsymbol{x}(t)) = {} & r_1(t) - a_1(t)\exp(x_1(t-\tau_1(t))) - \\ & b_1(t)\exp(x_2(t-\tau_1(t))) - c_1(t)\exp(x_1(t-\tau_2(t)) + x_2(t-\tau_2(t))); \\ A_2(t,\boldsymbol{x}(t)) = {} & v_2(t) - a_2(t)\exp(x_2(t-\sigma_3(t))) - \\ & b_2(t)\exp(x_1(t-\tau_3(t))) - c_2(t)\exp(x_2(t-\sigma_4(t)) + x_1(t-\tau_4(t))); \\ B_{i,k} = {} & \ln(1+d_{i,k}); \\ & \Delta\boldsymbol{x}(t_k) = (\Delta x_1(t_k),\Delta x_2(t_k))^{\mathrm{T}}, \qquad i=1,2; \quad k=1,2,\cdots,p. \end{aligned}$$

引理 4 如果条件

A4) $R_1 - \bar{b}_1\exp(H_2) > 0$ 且 $R_2 - \bar{b}_2\exp(H_1) > 0$;

A5) $R_2 - \bar{a}_1\exp(H_1) > 0$ 且 $R_2 - \bar{a}_2\exp(H_2) > 0$

之一成立,则线性方程组

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_1 u_1 + \bar{b}_1 u_2 = R_1, \\ \bar{a}_2 u_2 + \bar{b}_2 u_1 = R_2, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

均有唯一正解$(u_1^*, u_2^*)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}_+^2$.

3 正周期解的存在性

定理 1 若系统(3)满足条件 A1)~A3),以及 $R_1>0$, $R_2>0$, 且条件

A6) $\max\{R_1 - \bar{b}_1\exp(H_2), R_2 - \bar{a}_2\exp(H_2)\} > 0$;

A7) $\max\{R_2 - \bar{b}_2\exp(H_1), R_1 - \bar{a}_1\exp(H_1)\} > 0$

成立, 又线性方程组(4)有唯一正解$(u_1^*, u_2^*) \in \mathbf{R}_+^2$, 则系统(3)至少存在一个 ω-周期正解.

证明 作变换 $y_i(t) = \exp(x_i(t))$, $i=1,2$,则系统(3)变为

$$\left.\begin{aligned} x'_1(t) = A_i(t,\boldsymbol{x}(t)), \qquad t \neq t_k, \\ \Delta x_i(t_k) = x_i(t_k^+) - x_i(t_k) = \ln(1+d_{1,k}), \qquad t = t_k, \quad k=1,2,\cdots; \quad i=1,2. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

显然,若系统(6)有一个 ω-周期解$(x_1^*(t), x_2^*(t))^{\mathrm{T}}$,则$(y_1^*(t), y_2^*(t))^{\mathrm{T}} = (\exp(x_1^*(t)), \exp(x_2^*(t)))^{\mathrm{T}}$就是系统(3)的 ω-周期正解. 因此,只须证明系统(5)存在一个 ω-周期解.

现定义线性算子 $L: \mathrm{Dom}\, L \subset X \to Z$ 为

$$\boldsymbol{x} \to (\boldsymbol{x}', \Delta\boldsymbol{x}(t_1), \cdots, \Delta\boldsymbol{x}(t_p)), \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathrm{Dom}\, L \subset X, \tag{6}$$

以及定义算子 $N: X \to Z$ 为

$$N\boldsymbol{x} = \left(\begin{pmatrix} A_1(t,\boldsymbol{x}(t)) \\ A_2(t,\boldsymbol{x}(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_{1,1} \\ B_{2,1} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} B_{2,p} \\ B_{2,p} \end{pmatrix}\right), \qquad \forall\, \boldsymbol{x} = (x_1. x_2)^{\mathrm{T}} \in X, \tag{7}$$

又定义投影算子 $P: X \to X$ 及 $Q: Z \to Z$ 为

$$\begin{aligned} P\boldsymbol{x} &= \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} \boldsymbol{x}(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \forall\, \boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in X; \\ Q\boldsymbol{z} &= Q(\boldsymbol{x}, c_1, \cdots, c_p) = \\ & \quad \left(\frac{1}{\omega}\left(\int_0^{\omega} \boldsymbol{x}(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{p} c_k\right), 0, \cdots, 0\right), \qquad \forall\, \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, c_1, \cdots, c_p) \in Z. \end{aligned}$$

易见 $\mathrm{Ker}\, L = \{\boldsymbol{x} \in X: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}$(常值向量)$\in \mathbf{R}^2\}$, $\mathrm{Im}\, L = \{\boldsymbol{z}: \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, c_1, \cdots, c_p) \in Z: \int_0^{\omega} \boldsymbol{x}(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{p} c_k = 0\}$ 为 Z 中的闭子集, 且 $\dim \ker L = 2 = \mathrm{co}\dim \mathrm{Im}\, L$, 故 L 是指标为零的 Fredholm 映射. P,

Q 是连续投影且使得 $\operatorname{Im} P=\operatorname{Ker} L$，$\operatorname{Im} L=\operatorname{Ker} Q=\operatorname{Im}(I-Q)$，$X=\operatorname{Ker} L\oplus\operatorname{Ker} P$，$Z=\operatorname{Im} L\oplus\operatorname{Im} Q$. 记 $L_p\triangleq L|_{\operatorname{Dom} L\cap\operatorname{Ker} P}$，则 L_P：$\operatorname{Dom} L\cap\operatorname{Ker} P\to\operatorname{Im} L$ 是到上的一一映射. 因此 L 的广义逆映射 K_P：$\operatorname{Im} L\to\operatorname{Dom} L\cap\operatorname{Ker} P$ 存在，且

$$K_P(z(t))=\int_0^t \boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}c_k-\frac{1}{\omega}\Big[\int_0^\omega\int_0^t \boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{p}c_k(\omega-t_k)\Big]. \tag{8}$$

由于
$$QN\boldsymbol{x}=\left(\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\omega}\Big(\displaystyle\int_0^\omega A_1(s,\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{p}B_{1,k}\Big)\\ \dfrac{1}{\omega}\Big(\displaystyle\int_0^\omega A_2(s,\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{p}B_{2,k}\Big)\end{pmatrix},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}\right),\qquad \forall\,\boldsymbol{x}\in X. \tag{9}$$

所以有
$$K_P(I-Q)N\boldsymbol{x}=K_pN\boldsymbol{x}-K_pQN\boldsymbol{x}, \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}&x'_i(t)=\lambda A_i(t,\boldsymbol{x}(t)),\qquad t\neq t_k,\\ &\Delta x_i(t_k)=\lambda[x_i(t_k^+)-x_i(t_k)]=\lambda\ln(1+d_{i,k}),\qquad t=t_k,\quad k=1,2,\cdots,\quad i=1,2.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

利用引理 2，不难证明，$QN(\bar{\Omega})$ 和 $K_P(I-Q)N(\bar{\Omega})$ 都是紧的. 从而 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L-紧的.

对应于算子方程 $L\boldsymbol{x}=\lambda N\boldsymbol{x}$，$\lambda\in(0,1)$，设 $\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}\in X$ 是系统(11)对应于某一 $\lambda\in(0,1)$的解．将系统(11)两端从 0 到 ω 积分，可得

$$\begin{aligned}&\int_0^\omega[r_1(t)-a_1(t)\exp(x_1(t-\tau_1(t)))-b_1(t)\exp(x_2(t-\sigma_1(t)))-\\ &c_1(t)\exp(x_1(t-\tau_2(t))+x_2(t-\sigma_2(t)))]\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+d_{1,k})=0,\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^\omega[r_2(t)-a_2(t)\exp(x_2(t-\sigma_3(t)))-b_2(t)\exp(x_1(t-\tau_3(t)))-\\ &c_2(t)\exp(x_2(t-\sigma_4(t))+x_1(t-\tau_4(t)))]\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{p}\ln(1+d_{2,k})=0.\end{aligned} \tag{13}$$

由式(11)～(13)可得

$$\int_0^\omega|x'_1(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\omega(R_1+|\bar{r}_1|); \tag{14}$$

$$\int_0^\omega|x'_2(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\omega(R_2+|\bar{r}_2|); \tag{15}$$

因为 $\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}\in X$，故 $\sup\limits_{t\in[0,\omega]}x_i(t)$，$\inf\limits_{t\in[0,\omega]}x_i(t)$存在且一定存在 $\eta_i,\xi_i\in[0,\omega]$，使得

$$x_i(\eta_i^+)=\sup_{t\in[0,\omega]}x_i(t),\qquad \text{或 } x_i(\eta_i^-)=\sup_{t\in[0,\omega]}x_i(t),\qquad i=1,2, \tag{16}$$

$$x_i(\xi_i^+)=\inf_{t\in[0,\omega]}x_i(t),\qquad \text{或 } x_i(\xi_i^-)=\inf_{t\in[0,\omega]}x_i(t),\qquad i=1,2. \tag{17}$$

为了方便讨论，不妨设式(16)，(17)中的第 1 式成立．至于其他情况则同理可得相同的估计．

首先估计 $x_i(t)$，$i=1,2$ 的上界．由式(12)，(13)，(17)有

$$\int_0^\omega[a_1(t)\exp(x_1(\xi_1^+))+b_1(t)\exp(x_2(\xi_2^+))+c_1(t)\exp(x_1(\xi_1^+)+x_2(\xi_2^+))]\mathrm{d}t\leqslant\omega R_1, \tag{18}$$

$$\int_0^\omega[a_2(t)\exp(x_2(\xi_2^+))+b_2(t)\exp(x_1(\xi_1^+))+c_2(t)\exp(x_1(\xi_1^+)+x_2(\xi_2^+))]\mathrm{d}t\leqslant\omega R_2. \tag{19}$$

于是有
$$x_1(\eta_1^+)\leqslant\min\{\ln\frac{R_1}{\bar{a}_1},\ln\frac{R_2}{\bar{b}_2}\}, \tag{20}$$

$$x_2(\eta_2^+)\leqslant\min\{\ln\frac{R_1}{\bar{b}_1},\ln\frac{R_2}{\bar{a}_2}\}. \tag{21}$$

因此，由式(14)，(15)，(20)，(21)，以及引理 3，可知当 $t\in[0,\omega]$时有

$$x_1(t)\leqslant x_1(\xi_1^+)+\frac{1}{2}\int_0^\omega|x'_1(t)|\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}|\ln(1+h_{1,k})|\leqslant H_1, \tag{22}$$

$$x_2(t)\leqslant x_2(\xi_2^+)+\frac{1}{2}\int_0^\omega|x'_2(t)|\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}|\ln(1+h_{2,k})|\leqslant H_2. \tag{23}$$

下面，估计 $x_i(t)$，$i=1,2$ 的下界．由式(12)，(13)，(16)可知

$$\int_0^\omega [a_1(t)\exp(x_1(\eta_1^+)) + c_1(t)\exp(x_1(\eta_1^+) + x_2(\eta_2^+))]\mathrm{d}t \geqslant \omega R_1 - \omega \bar{b}_1 \exp(x_2(\eta_2^+)), \tag{24}$$

$$\int_0^\omega [a_2(t)\exp(x_2(\eta_2^+)) + c_2(t)\exp(x_1(\eta_1^+) + x_2(\eta_2^+))]\mathrm{d}t \geqslant \omega R_2 - \omega \bar{b}_2 \exp(x_1(\eta_1^+)), \tag{25}$$

$$\int_0^\omega [b_1(t)\exp(x_2(\eta_2^+)) + c_1(t)\exp(x_1(\eta_1^+) + x_2(\eta_2^+))]\mathrm{d}t \geqslant \omega R_1 - \omega \bar{a}_2 \exp(x_1(\eta_1^+)), \tag{26}$$

$$\int_0^\omega [b_2(t)\exp(x_1(\eta_1^+)) + c_2(t)\exp(x_1(\eta_1^+) + x_2(\eta_2^+))]\mathrm{d}t \geqslant \omega R_2 - \omega \bar{a}_2 \exp(x_2(\eta_2^+)). \tag{27}$$

由式(24)~(26),以及条件 A6),A7)可知有

$$\exp(x_1(\eta_1^+)) \geqslant \min\{\frac{R_1 - \bar{b}_1\exp(H_2)}{\bar{a}_1 + \bar{c}_1\exp(H_2)}, \frac{R_2 - \bar{a}_2\exp(H_2)}{\bar{b}_2 + \bar{c}_2\exp(H_2)}\} > 0, \tag{28}$$

$$\exp(x_2(\eta_2^+)) \geqslant \min\{\frac{R_2 - \bar{b}_2\exp(H_1)}{\bar{a}_2 + \bar{c}_2\exp(H_1)}, \frac{R_1 - \bar{a}_1\exp(H_1)}{\bar{b}_1 + \bar{c}_1\exp(H_1)}\} > 0. \tag{29}$$

于是,由式(14),(28)及引理3,可知有

$$\begin{aligned} x_1(t) &\geqslant x_1(\eta_1^+) - \frac{1}{2}\int_0^\omega |x'_1(t)|\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}|\ln(1+h_{1,k})| \geqslant \\ &\ln\{\min\{\frac{R_1 - \bar{b}_1\exp(H_2)}{\bar{a}_1 + \bar{c}_1\exp(H_2)}, \frac{R_2 - \bar{a}_2\exp(H_2)}{\bar{b}_2 + \bar{c}_2\exp(H_2)}\}\} - \\ &\frac{1}{2}\omega(R_1 + |\bar{r}_1|) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}|\ln(1+d_{1,k})| = H_3. \end{aligned} \tag{30}$$

于是由式(15),(29)及引理3,可知当 $t\in[0,\omega]$时有

$$\begin{aligned} x_2(t) &\geqslant x_2(\eta_2^+) - \frac{1}{2}\int_0^\omega |x'_2(t)|\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}|\ln(1+h_{2,k})| \geqslant \\ &\ln\{\min\{\frac{R_2 - \bar{b}_2\exp(H_1)}{\bar{a}_2 + \bar{c}_2\exp(H_1)}, \frac{R_1 - \bar{a}_1\exp(H_1)}{\bar{b}_1 + \bar{c}_1\exp(H_1)}\}\} - \\ &\frac{1}{2}\omega(R_2 + |\bar{r}_2|) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}|\ln(1+d_{2,k})| = H_4. \end{aligned} \tag{31}$$

令 $H = \sum_{k=1}^{4}|H_k|$,由式(23),(24),(31),(32)的讨论,可知有

$$\|\boldsymbol{x}\| \leqslant H. \tag{32}$$

显然,正常数 H 与 $\lambda(\lambda\in(0,1))$是无关的.

考虑下列代数方程组

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_1\exp(x_1) + \bar{b}_1\exp(x_2) + \bar{c}_1\exp(x_1+x_2) = R_1, \\ \bar{a}_2\exp(x_2) + \bar{b}_2\exp(x_1) + \bar{c}_2\exp(x_1+x_2) = R_2. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

如果方程组式(33)有解 $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*)^{\mathrm{T}}$ 的话,则类似式(32)估计有

$$\|\boldsymbol{x}^*\| \leqslant H. \tag{34}$$

记 $M=H+1$,令 $\Omega=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in X: \|\boldsymbol{x}\|<M\}$,则 Ω 满足引理1中的条件1).

当 $\boldsymbol{x}\in \mathrm{Ker}\,L\cap\partial\Omega$ 时,$\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的常值向量且 $\|\boldsymbol{x}\|=M$. 不论方程组(33)是否有解,均可证明

$$QN\boldsymbol{x} = \left(\begin{pmatrix} \bar{r}_1 - \bar{a}_1\exp(x_1) - \bar{b}_1\exp(x_2) - \bar{c}_1\exp(x_1+x_2) + \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{p}B_{1,k} \\ \bar{r}_2 - \bar{a}_2\exp(x_2) - \bar{b}_2\exp(x_1) - \bar{c}_2\exp(x_1+x_2) + \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{p}B_{2,k} \end{pmatrix}, \boldsymbol{0}, \cdots, \boldsymbol{0}\right) \neq 0,$$

即引理1中的条件2)也被满足.

下面证明引理1中的条件3)也成立. 为此,定义映射族 $\Phi: (\bar{\Omega}\cap \mathrm{Ker}\,L)\times[0,1]\to\mathbf{R}^2$ 为

$$\Phi(x_1,x_2,\mu) = \begin{pmatrix} R_1 - \bar{a}_1\exp(x_1) - \bar{b}_1\exp(x_2) \\ R_2 - \bar{a}_2\exp(x_2) - \bar{b}_2\exp(x_1) \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -\bar{c}_1\exp(x_1+x_2) \\ -\bar{c}_2\exp(x_1+x_2) \end{pmatrix}.$$

其中:$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\bar{\Omega}\cap\mathrm{Ker}\,L$,$\mu\in[0,1]$为参数.

易证当 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\bar{\Omega}\cap\operatorname{Ker}L,\mu\in[0,1]$时，$\Phi(x_1,x_2,\mu)\neq 0$. 取 $J:\operatorname{Im}Q\to X:(f,0,\cdots,0)\to f$，则当 $\boldsymbol{x}\in\operatorname{Ker}L\cap\partial\Omega$ 时，有 $JQN\boldsymbol{x}=\Phi(x_1,x_2,1)$.

又由定理条件知，代数方程组(4)存在唯一实解 $\boldsymbol{v}^*=(v_1^*,v_2^*)^{\mathrm{T}}$，以及 $\bar{a}_1\bar{a}_2-\bar{b}_1\bar{b}_2\neq 0$. 且类似于式(33)，(34)的证明，可得

$$\| v^* \| \leqslant H < M.$$

又由于 $\Phi(x_1,x_2,\mu)$是同伦映射，其重合度不变，故有

$$\begin{aligned}\deg\{JQN,\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0\}&=\deg\{\Phi(x_1,x_2,1),\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0\}=\\ \deg\{\Phi(x_1,x_2,0),\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0\}&=\operatorname{sign}\{(\bar{a}_1\bar{a}_2-\bar{b}_1\bar{b}_2)\exp(v_1^*+v_2^*)\}\neq 0.\end{aligned}$$

从而引理 1 中的条件 3)也满足. 因此系统(5)至少有一个 ω-周期解，从而系统(3)至少存在一个 ω-周期正解.

又若 A4)或 A5)成立，那么 A6)与 A7)必然成立. 于是由定理 1 与引理 2 可得

定理 2　若系统(3)满足 A1)～A3)，以及 $R_1>0,R_2>0$，且条件 A4)与 A5)有一个成立，则系统(3)至少存在一个 ω-周期正解.

4　应用

下面考虑文献[4-6]中研究的系统(3)，(4)存在周期正解的问题. 由定理 1,2 可得

定理 3　若系统(1)满足条件 A3)，以及 $\bar{r}_1>0$，$\bar{r}_2>0$，且条件

1) $\max\{\bar{r}_1-\bar{b}_1\exp(\min\{\ln\frac{\bar{r}_1}{\bar{b}_1},\ln\frac{\bar{r}_2}{\bar{a}_2}\}+\frac{1}{2}\omega(\bar{r}_2+|\bar{r}_2|)),\bar{r}_2-\bar{a}_2\exp(\min\{\ln\frac{\bar{r}_1}{\bar{b}_1},\ln\frac{\bar{r}_2}{\bar{a}_2}\}+\frac{1}{2}\omega(\bar{r}_2+|\bar{r}_2|))\}>0$，

2) $\max\{\bar{r}_2-\bar{b}_2\exp(\min\{\ln\frac{\bar{r}_1}{\bar{b}_1},\ln\frac{\bar{r}_2}{\bar{a}_2}\}+\frac{1}{2}\omega(\bar{r}_1+|\bar{r}_1|)),\bar{r}_1-\bar{a}_1\exp(\min\{\ln\frac{\bar{r}_1}{\bar{a}_1},\ln\frac{\bar{r}_2}{\bar{b}_2}\}+\frac{1}{2}\omega(\bar{r}_1+|\bar{r}_1|))\}>0$ 成立，以及线性方程组

$$\left.\begin{aligned}\bar{a}_1u_1+\bar{b}_1u_2&=\bar{r}_1,\\ \bar{a}_2u_2+\bar{b}_2u_1&=\bar{r}_2.\end{aligned}\right\}\tag{35}$$

存在唯一正解$(u_1^*,u_2^*)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}_+^2$，则系统(1)至少存在一个 ω-周期正解.

定理 4　若系统(1)满足 A3)，以及 $\bar{r}_1>0$，$\bar{r}_2>0$，且下列两条件之一成立：

3) $\bar{r}_1-\bar{b}_1\exp(\min\{\ln\frac{\bar{r}_1}{\bar{b}_1},\ln\frac{\bar{r}_2}{\bar{a}_2}\}+\frac{1}{2}\omega(\bar{r}_2+|\bar{r}_2|))>0$ 且 $\bar{r}_2-\bar{a}_2\exp(\min\{\ln\frac{\bar{r}_1}{\bar{b}_1},\ln\frac{\bar{r}_2}{\bar{a}_2}\}+\frac{1}{2}\omega(\bar{r}_2+|\bar{r}_2|))>0$；

4) $\bar{r}_2-\bar{b}_2\exp(\min\{\ln\frac{\bar{r}_1}{\bar{b}_1},\ln\frac{\bar{r}_2}{\bar{a}_2}\}+\frac{1}{2}\omega(\bar{r}_1+|\bar{r}_1|))>0$ 且 $\bar{r}_1-\bar{a}_1\exp(\min\{\ln\frac{\bar{r}_1}{\bar{a}_1},\ln\frac{\bar{r}_2}{\bar{b}_2}\}+\frac{1}{2}\omega(\bar{r}_1+|\bar{r}_1|))>0$，

则系统(1)至少存在一个 ω-周期正解.

定理 5　若系统(4)满足条件 A1)～A3)，以及 $R_1>0$，$R_2>0$，且条件 A6)与 A7)成立，以及方程组(36)有唯一正解$(u_1^*,u_2^*)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}_+^2$，则系统(2)至少存在一个 -周期正解.

定理 6　若系统(4)满足 A1)～A3)，以及 $R_1>0$，$R_2>0$，且条件 A6)或 A7)成立，则系统(2)至少存在一个 ω-周期正解.

注 1　易见，定理 4,6 的结果成立的条件分别比文献[4-6]中的主要结果成立的条件弱得多. 即结论推广并改进了文献[4-6]中的主要结果.

例 1　考虑系统

$$\left.\begin{aligned}y'_1(t)=&y_1(t)[3-\cos t-(2+\cos t)y_1(t-\sin t)-\\ &(3\exp(16\pi)-\sin t)y_2(t-\cos t)-(3+\sin t)y_1(t-\sin t)y_2(t-\cos t)],\\ y'_2(t)=&y_2(t)[4-\sin t-(3-\sin t)y_2(t-\cos t)-\\ &(3\exp(12\pi)+\cos t)y_1(t-\sin t)-(5+\cos t)y_2(t-\cos t)y_1(t-\sin t)],\end{aligned}\right\}\tag{36}$$

$$\begin{cases} y'_1(t)=y_1(t)[3-\cos t-(2+\cos t)y_1-(3\exp(20\pi)-\sin t)y_2(t)- \\ \qquad (3+\sin t)y_1(t)y_2(t-\cos t)], \qquad t\neq t_k, \\ y'_2(t)=y_2(t)[4-\sin t-(3-\sin t)y_2(t)-(3\exp(16\pi)+\cos t)y_1(t)- \\ \qquad (5+\cos t)y_2(t)y_1(t-\sin t)], \qquad t\neq t_k, \\ y_1(t_k^+)=(1+d_{1,k})y_1(t_k), \qquad t=t_k;\quad k=\pm 1,\pm 2,\cdots, \\ \qquad y_2(t_k^+)=(1+d_{2,k})y_2(t_k), \qquad t=t_k;\quad k=\pm 1,\pm 2,\cdots. \end{cases} \tag{37}$$

式(36),(37)中:$t_1=\frac{\pi}{2}$;$t_2=\frac{3\pi}{2}$;$t_{k+2}=t_k+2\pi$;$d_{2,1}=d_{2,1}=1$;$d_{12}=d_{2,1}=-\frac{1}{2}$;$d_{i(k+2)}=d_{i,k}$;$i=1,2,k=\pm 1,\pm 2,\cdots$.

经计算可知:系统(36),(37)分别满足定理4,6中的条件.即系统(36),(37)都至少有一个2π周期正解.

易于验证,系统(6),(7)不满足文献[4-6]中相应定理的条件,故无法用文献[4-6]中的结论来判别其2π-周期正解的存在性.该例也很好地诠释了注1.

参考文献:

[1] RICE E L. Allelopathy[M]. 2nd ed. New York:Academic Press,1984.

[2] MAYNARD-SMITH J. Models in ecology[M]. Cambridge:Cambridge University,1974:146.

[3] MUKHOPADHYAY A,CHATTOPADHYAY J,TAPASWI P K. A delay differential equations model of plankton allelopathy[J]. Math Biosci,1998,149(2):167-189.

[4] 宋新宇,陈兰荪.一类浮游植化相克时滞微分方程的周期解[J].数学物理学报,2003,23A(1):8-13.

[5] JIA J,WANG M,LI M. Periodic solutions for impulsive delay differential equations in the control model of plankton allelopathy[J]. Chaos, Solitons and Fractals,2007,32(2):962-968.

[6] LIU Zhi-jun,WU Jian-hua,CHEN Yi-ping,et al. Impulsive perturbations in a periodic delay differential equation model of plankton allelopathy[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications,2010,11(1):432-445.

[7] GAINES R E,MAWHIN J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations[M]. Berlin:Springer-Verlag,1977:40-60.

[8] BAINOV D D,SIMEONOV P S. Impulsive differential equations: Periodic solution and applications[M]. New York:Longman Publishing Group,1993.

[9] WANG Qi,DAI Bin-xiang,CHEN Yu-ming. Multiple periodic solutions of an impulsive predator-prey model with Holling-type Ⅳ functional response[J]. Math Comput Modelling,2009,49(9/10):1829-1836.

Positive Periodic Solutions of Two-Specics Impulsive Systems with Time Delays in Plankton Allelopathy

WANG Dong-shu, WANG Quan-yi

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, two-species nonautonomous impulsive systems that arise in plankton allelopathy with time delays and periodic environmental factors are considered. By means of coincidence degree theory and some analysis techniques, we obtain some new results on the existence of positive periodic solutions to the system. Our results generalize and improve the related results.

Keywords: allelopathy; impulse; delay; coincidence degree theory; periodic solution

(**责任编辑**:陈志贤 **英文审校**:黄心中)