

文章编号: 1000-5013(2012)04-0375-05

一种新的子空间更新算法在 DOA 估计中的应用

胡茂兵, 汤炜, 蔡灿辉

(华侨大学 信息科学与工程学院, 福建 厦门 361021)

摘要: 为改进传统算法对突变信号跟踪慢的缺点,提出一种有效的可变遗忘因子的子空间更新算法——逼近特征分解方法.该算法采用可变遗忘因子对阵列输出信号协方差矩阵进行秩-1 更新,在该协方差矩阵特征分解的基础上,结合先验信息构造新的代价函数,并利用该代价函数的最小二乘解实现对信号子空间的实时更新.仿真结果表明:新算法的波达方向估计误差仅为原算法的 1/5,而对突变信号的跟踪速度达到原算法的 5 倍,证实该算法的准确性和有效性.

关键词: 波达方向; 突变信号; 可变遗忘因子; 子空间更新算法; 特征分解

中图分类号: TN 911.7 **文献标志码:** A

随着信息时代的到来,国内外学者提出利用智能天线技术解决现阶段频谱资源匮乏的问题^[1-2].近年来,波达方向(DOA)估计作为智能天线应用中的关键技术已得到广泛的关注并提出许多 DOA 估计算法.但这类算法不能对相干信源进行 DOA 估计,而在 CDMA 通信系统中这类相干信源是普遍存在的^[3]. Pillai 等^[4]融合前后向空间平滑技术改进了这一缺陷.此外,这类算法属“批处理”算法,即在获得所有快拍数据后一次性处理.显然,这种“批处理”算法仅适用于非时变系统和平稳信号^[5-6],而在实际环境中存在大量时变系统和非平稳信号,如仍采用上述算法进行 DOA 估计,则传统方法就会失效.针对子空间更新的问题, Yang 等^[7-8]提出了近似投影子空间跟踪(PAST)算法与紧缩近似投影子空间跟踪(PASTd)算法,这类方法由于其收敛速度快而得到广泛应用.然而,该方法得出的子空间正交性不强. Meraim 等^[9]随后提出了改进的 OPAST 算法.这一系列类算法均未考虑信号的相干性和遗忘因子的可变性等问题,致使方法的应用范围受到限制.本文在传统算法的基础上对遗忘因子和代价函数进行了优化和改进,提出了一种新的子空间更新算法——逼近特征分解方法.

1 阵列信号模型

考虑阵元数 M 的均匀线阵(ULA),阵元间距 $d=\lambda/2$,采样快拍数为 pd ,接收来自 D 不同方向 $\theta=[\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_D]$ 的窄带信号 $\mathbf{S}(t)=[s_1(t), s_2(t), \dots, s_D(t)]^T$. 假定 D 先验已知,定义信号到达角 θ 为信号传播方向与 ULA 法向的夹角,阵列天线模型如图 1 所示,则第 k 个快拍时刻阵列接收信号^[10]为

$$\mathbf{X}(k) = \sum_{i=1}^D \mathbf{a}(\theta_i) s_i(k) + \mathbf{N}(k) = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{S}(k) + \mathbf{N}(k), \quad k = 1, 2, \dots, pd. \quad (1)$$

式中: $\mathbf{X}(k)=[x_1(k), x_2(k), \dots, x_M(k)]^T$ 为 M 个阵元的接收信号矢量, $\mathbf{a}(\theta_i)=[1, \exp(-j\varphi_i), \dots, \exp(-j(M-1)\varphi_i)]^T$ 为 ULA 与信号 $s_i(k)$ 对应的导引向量; $\mathbf{N}(k)=[n_1(k), n_2(k), \dots, n_M(k)]^T$ 为 M 个阵元接收的与信源无关且相互独立的高斯白噪声; $\varphi_i=(2\pi d \sin \theta_i)/\lambda$; $\mathbf{A}(\theta)=[\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_D)]$ 为 ULA 导引矩阵.

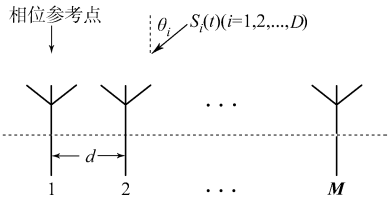


图 1 M 元均匀线阵模型
Fig. 1 Model of the ULA with M sensor elements

2 逼近特征分解的子空间更新算法

考虑子空间类算法中,协方差矩阵“批处理”性质无法实现时变信号的 DOA 跟踪,Yang 等^[7]提出了投影逼近子空间跟踪(PAST)算法,其阵列输出信号协方差矩阵 $\mathbf{R}(k)=E[\mathbf{X}(k)\mathbf{X}^H(k)]$ 的代替式为

$$\mathbf{R}(k)=\sum_{i=1}^k\alpha^{k-i}\mathbf{X}(i)\mathbf{X}^H(i)=\alpha\mathbf{R}(k-1)+\mathbf{X}(k)\mathbf{X}^H(k), \tag{2}$$

式(2)中: α 为遗忘因子,反映的是原有数据在 $\mathbf{R}(k)$ 更新过程中所占的比重.当 α 较大时,原有数据保留较多,相应的实时数据所占比例下降,协方差矩阵更新速度较慢;而当 α 较小时,原有数据保留较少,实时数据所占比例增加,虽然协方差矩阵更新速度加快,但数据量不足,使得估计性能易受噪声影响,估计误差较大.所以对于具有恒定遗忘因子的算法(如 PAST 算法),无法同时获得较快的收敛速度和较小的稳态 DOA 跟踪误差.

针对阵列输出信号协方差矩阵秩-1 更新式(2)中固定遗忘因子 α 所带来的性能缺陷,提出一种新的方程,即

$$\mathbf{R}(k)=\alpha(k)\mathbf{R}(k-1)+\mathbf{r}(k). \tag{3}$$

式(3)中: $\mathbf{r}(k)=\mathbf{X}(k)\mathbf{X}^H(k)$.与传统子空间更新算法不同,它采用的是可变遗忘因子,即 $\alpha(k)=\{\alpha_1,\alpha_2\}$,且 $\alpha_1<\alpha_2$.假设在快拍时刻 K_1 时信号 DOA 发生突变,此时令 $\alpha(k)=\alpha_1$,其余时刻 $\alpha(k)=\alpha_2$.这样对于突变信号,既可以获得较快的跟踪速度,又可以获得较低的稳态估计误差.

为了适用于相干信号源的情况,对式(3)中的协方差矩阵 $\mathbf{R}(k)$ 进行前后向平滑处理,即

$$\mathbf{R}(k)=\alpha(k)\mathbf{R}(k-1)+(\mathbf{r}(k)+\mathbf{J}\mathbf{r}^*(k)\mathbf{J})/2. \tag{4}$$

式(4)中: \mathbf{J} 为 M 维交换矩阵,其反对角线上的元素为 1,其余元素为 0.对平滑处理后的 $\mathbf{R}(k)$ 进行特征分解,有

$$\mathbf{R}(k)=\mathbf{U}_S(k)\mathbf{\Lambda}_S(k)\mathbf{U}_S^H(k)+\mathbf{U}_N(k)\mathbf{\Lambda}_N(k)\mathbf{U}_N^H(k). \tag{5}$$

式(5)中: $\mathbf{\Lambda}_S(k),\mathbf{\Lambda}_N(k)$ 分别为由较大的 D 个特征值和较小的 $M-D$ 个特征值构成的对角矩阵,对应的特征向量组成的矩阵 $\mathbf{U}_S(k),\mathbf{U}_N(k)$ 分别构成信号子空间和噪声子空间,且存在如下关系,即

$$\mathbf{U}_S^H(k)\mathbf{U}_S(k)=\mathbf{I}_D,\quad \mathbf{U}_S^H(k)\mathbf{U}_N(k)=\mathbf{0}. \tag{6}$$

式(6)中: \mathbf{I}_D 为 D 维单位矩阵.对式(5)等号两边分别右乘 $\mathbf{U}_S(k),\mathbf{U}_N(k)$,并利用性质(6),可得

$$\mathbf{R}(k)\mathbf{U}_S(k)=\mathbf{U}_S(k)\mathbf{\Lambda}_S(k),\quad \mathbf{R}(k)\mathbf{U}_N(k)=\mathbf{U}_N(k)\mathbf{\Lambda}_N(k). \tag{7}$$

将方程组(7)可等效为

$$\mathbf{R}(k)\mathbf{U}(k)=\mathbf{U}(k)\mathbf{\Lambda}(k). \tag{8}$$

式(8)中: $\mathbf{U}(k)$ 为 $M\times r$ 矩阵.当 $r=D$ 时, $\mathbf{U}(k)$ 代表信号子空间;而当 $r=M-D$ 时, $\mathbf{U}(k)$ 代表噪声子空间.利用先验信息可得估计误差为

$$\mathbf{e}(k)=\mathbf{X}(k)-\mathbf{U}(k-1)\mathbf{h}(k). \tag{9}$$

式(9)中: $\mathbf{h}(k)=\mathbf{U}^H(k-1)\mathbf{X}(k)$ 为 $\mathbf{X}(k)$ 在 $\mathbf{U}(k-1)$ 所张空间上的投影.由递归最小二乘法可得子空间更新模型为

$$\mathbf{U}(k)=\mathbf{U}(k-1)+\mathbf{e}(k)\mathbf{g}^H(k). \tag{10}$$

在式(8)中,利用先验信息 $\mathbf{U}(k-1)$ 逼近 $\mathbf{U}(k)$,可构造新的代价函数为

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}(k))=\|\mathbf{U}(k)\mathbf{\Lambda}(k)-\mathbf{R}(k)\mathbf{U}(k-1)\|^2. \tag{11}$$

其中:约束条件 $\mathbf{U}(k)^H\mathbf{U}(k)=\mathbf{I}_r$.由于式(11)中的 $\mathbf{\Lambda}(k)$ 是由阵列输出信号协方差矩阵的特征值构成的对角矩阵,为了避免特征分解,减少算法运算量, $\mathbf{\Lambda}(k)$ 可以通过迭代来实时更新,即

$$\mathbf{\Lambda}(k)=\alpha(k)\mathbf{\Lambda}(k-1)+\text{diag}\{\|\mathbf{h}_1(k)\|^2,\cdots,\|\mathbf{h}_r(k)\|^2\}. \tag{12}$$

式(12)中: $\mathbf{h}_i(k)$ 是 $r\times 1$ 维向量 $\mathbf{h}(k)$ 的第 i 个元素; $\text{diag}\{\cdot\}$ 是由 $\mathbf{h}(k)$ 中的 r 个元素组成的对角矩阵.由最小二乘法可得 $\mathbf{g}^H(k)$ 的最小二乘解为

$$\mathbf{g}_{LS}^H(k)=\frac{1}{\|\mathbf{e}(k)\|^2}\mathbf{e}^H(k)(\mathbf{I}_M-\mathbf{U}(k-1)\mathbf{U}^H(k-1))\mathbf{R}(k)\mathbf{U}(k-1)\mathbf{\Lambda}^{-1}(k). \tag{13}$$

利用式(9)和式(13),可将 $\mathbf{g}_{LS}^H(k)$ 化简为

$$\mathbf{g}_{\text{LS}}^H(k) = \frac{1}{\|\mathbf{e}(k)\|^2} \mathbf{e}^H(k) \mathbf{R}(k) \mathbf{U}(k-1) \mathbf{\Lambda}^{-1}(k). \tag{14}$$

将式(14)代入式(10), 结合式(9)可以实现对子空间 $\mathbf{U}(k)$ 的更新. 然而, 按式(10)得到的更新子空间并非完全正交的, 需采用 Gram-Schmidt 方法对其正交化处理.

鉴于 LS-ESPRIT 算法具有不需谱峰搜索的优点^[11], 故将更新后的子空间 $\mathbf{U}(k)$ 运用于 LS-ESPRIT 算法, 就可以对时变信号进行 DOA 跟踪.

式(3)中的信号突变时刻 k_1 可以通过式(9)中的估计误差 $\mathbf{e}(k)$ 确定, 共有 4 个步骤: 1) 假定算法在 k_0 时刻收敛, 取 $1 \leq k \leq k_0$ 时刻对应 $\|\mathbf{e}(k)\|$ 的最大值 e_{\max} , 即令 $e_{\max} = \max(\|\mathbf{e}(1:k_0)\|)$; 2) 用 e_{\max} 对 $k_0 < k < pd$ 时刻所对应的 $\|\mathbf{e}(k)\|$ 进行归一化处理, 可得到 $\|\mathbf{e}(\tilde{k})\|$, 即有 $\|\mathbf{e}(\tilde{k})\| = \|\mathbf{e}(k)\|/e_{\max}$; 3) 令 $c(k) = \|\mathbf{e}(\tilde{k})\|/\|\mathbf{e}(\tilde{k}-1)\|$; 4) 若 $c(k_2)/c(k_2-1) > \delta$ (δ 为常数), 则认为 k_2 是 k_1 的估计值.

在子空间更新类算法中, 初始值 $\mathbf{R}(0), \mathbf{U}(0), \mathbf{\Lambda}^{-1}(0)$ 的选取必须适当. 根据各矩阵的性质, 最方便的选取即令 $\mathbf{R}(0), \mathbf{\Lambda}^{-1}(0), \mathbf{U}(0)$ 分别为 $M \times M$ 和 $r \times r$ 的单位矩阵, 以及 $M \times M$ 的单位矩阵的前 r 列.

3 仿真结果及分析

3.1 遗忘因子的选择

仿真参数: ULA 阵元数 $M=8$, 阵元间距 $d=\lambda/2$, 采样快拍数 $pd=400$, 信号源数 $D=3$, 子空间维数参量 $r=D$. 考虑 3 个非相关正弦信号源, 频率分别为 1, 3, 2 GHz, 初始相位均为 0, 采样频率 f_s 为 10 GHz. 其中: 信号 1 为非时变信号, DOA = 0° , 信噪比为 0 dB; 信号 2 为慢变信号, 每次快拍间信号角度变化 0.025° , 信噪比为 5 dB, 起始角度为 30° ; 信号 3 为每次快拍间信号角度变化 0.1° 的快变信号, 信噪比为 5 dB, 起始角度为 40° .

不同遗忘因子对应的稳态快拍数 (pd) 和最大 DOA 估计误差 (e_{\max}) 仿真结果, 如表 1 所示. 从表 1 可以看出: 稳态快拍数和最大 DOA 估计误差与前文分析吻合, 即 α 较大时, 算法趋于稳态速度较慢, 估计误差较小; 而 α 较小时算法趋于稳态速度较快, 估计误差增加. 综合考虑这两方面因素, 分别选择 α_1 和 α_2 为 0.60 和 0.85.

3.2 对非相关信号的 DOA 跟踪

仿真信号模型与算例 3.1 相同, 结果如图 2 所示. 图 2 中: $\alpha = \{0.60, 0.85\}$. 由图 2 可以看出: 新算法不仅能对非时变信号和慢变信号进行精确 DOA 估计, 对快变信号也能得到良好估计.

将该算法与 PAST 和特征值分解 (ED) 算法进行比较, 得到的快变信号跟踪误差 (e) 曲线, 如图 3 所示. 其中: ED 算法中的信号子空间是直接对式(4)中的协方差矩阵进行特征分解得到的.

从图 3 中可以看出: 对快变信号而言, 提出的算法与 ED 算法具有相似的跟踪特性, 对应的 DOA 误差均约为 PAST 算法的 1/5. 这说明由该算法得到的信号子空间更接近于理想信号子空间, 即 ED 算法中的信号子空间.

3.3 对突变信号的跟踪性能分析

考虑单一正弦信号源, 其频率为 $f_1=1$ GHz, 初始相位为 0, 采样频率 $f_s=10$ GHz. 起始角度 0° , 采

表 1 不同遗忘因子的仿真实验结果

Tab. 1 Simulation results for different forgetting factors

遗忘因子	比较参量	非时变信号	慢变信号	快变信号
$\alpha=0.60$	pd	9	9	3
	$e_{\max}/(^{\circ})$	5.314 6	2.372 8	1.775 8
$\alpha=0.70$	pd	9	10	5
	$e_{\max}/(^{\circ})$	2.976 1	1.432 4	0.817 5
$\alpha=0.75$	pd	12	13	5
	$e_{\max}/(^{\circ})$	1.521 0	0.722 9	0.522 5
$\alpha=0.80$	pd	13	13	13
	$e_{\max}/(^{\circ})$	0.986 4	0.530 5	0.482 9
$\alpha=0.85$	pd	17	14	14
	$e_{\max}/(^{\circ})$	0.523 5	0.525 6	0.485 3
$\alpha=0.90$	pd	18	15	15
	$e_{\max}/(^{\circ})$	0.406 2	0.465 7	1.033 5
$\alpha=0.95$	pd	20	16	16
	$e_{\max}/(^{\circ})$	0.494 7	0.545 6	2.107 6

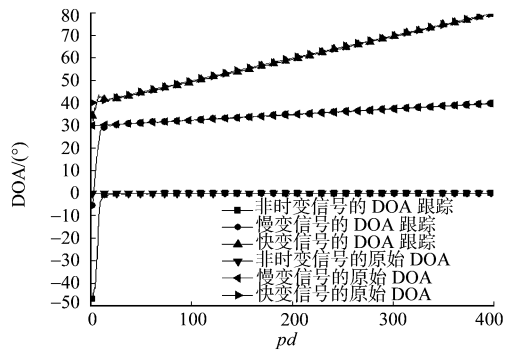


图 2 算法的跟踪特性曲线

Fig. 2 Tracking characteristic curve of this algorithm

样时刻为 200 时,信号源角度突变成 10° ,即 $k_1=200, k_0=20$,常数 $\delta=17$.按照提供的对突变时刻 k_1 估计的方法,测得 k_1 的估计成功概率(P)与信噪比(SNR)的关系,如图 4 所示.由图 4 可知:随着信噪比的增加,对突变时刻 k_1 的估计成功概率逐渐接近 100%,说明提供的对突变时刻 k_1 估计方法的有效性.

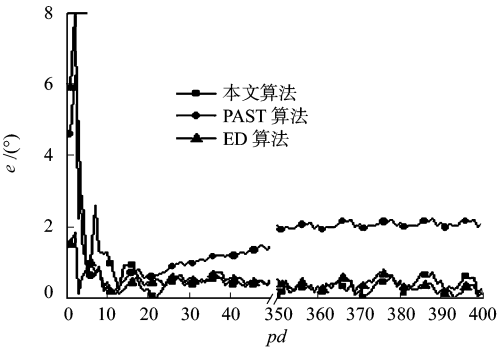


图 3 几种算法对快变信号跟踪误差特性比较
Fig. 3 Tracking error curve about rapidly varying time signal compare with algorithms

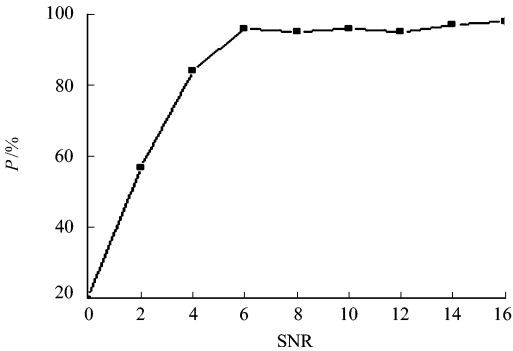


图 4 估计成功概率与信噪比的关系曲线
Fig. 4 Successful probability estimation versus the SNR

选取单一正弦信号源,其信噪比为 5 dB,将所提出的算法与 PAST 算法对突变信号 DOA 跟踪特性进行比较,如图 5 所示.为了验证可变遗忘因子对突变信号 DOA 跟踪的有效性,将 PAST 算法分为 PAST 恒定 α 算法和 PAST 可变 α 算法,即 PAST 算法步骤中的 α 是可变的.

从图 5 可以看出:所提出的可变遗忘因子算法对突变信号的 DOA 跟踪速度最快,为 PAST 算法跟踪速度的 5 倍;并且,由 PAST 两类算法的跟踪速度可以进一步验证可变遗忘因子类算法在子空间更新算法中的优势.

3.4 对相干信号的 DOA 跟踪

设有 3 个正弦信号源,频率分别为 $f_1=1\text{ GHz}, f_2=1\text{ GHz}, f_3=2\text{ GHz}$,其他仿真条件与算例 3.1 完全相同.由这 3 个信号源的频率关系可知:信号 2(慢变信号)是信号 1(非时变信号)的相干信号,均为信号 3(快变信号)的非相关信号.此时所得到的 DOA 跟踪曲线,如图 6 所示.从图 6 可以看出:由于所提算法对阵列输出信号的协方差矩阵进行了前后向平滑处理,而 PAST 算法未考虑信号相干性的影响,所以算法能实现对相干信号的 DOA 跟踪.

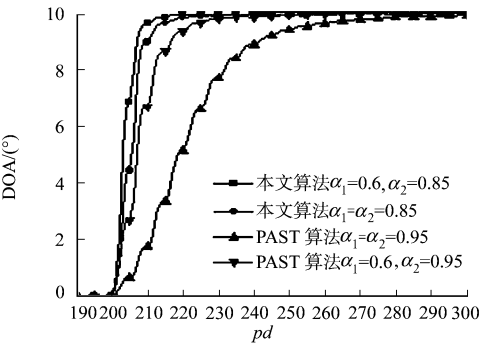


图 5 两种算法对突变信号的跟踪特性曲线
Fig. 5 Tracking the sudden parameter changing signals compared with the two algorithms

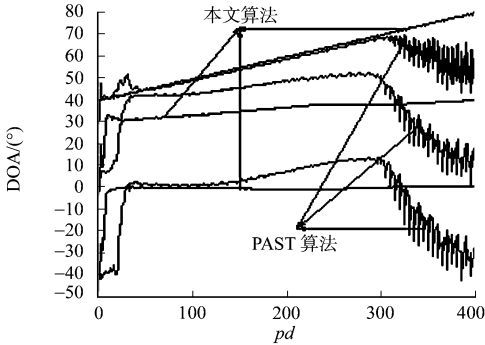


图 6 对相干信号源 DOA 估计比较曲线图
Fig. 6 Tracking the coherent signals compared with PAST algorithm

4 结束语

通过对遗忘因子在子空间更新算法中物理意义进行分析,得出可变遗忘因子可以加快算法对突变信号的 DOA 跟踪速度的结论.结合前后向空间平滑技术及新的代价函数,提出了一种适用性更为广泛、快速高效的新算法——逼近特征分解算法.对连续时变信号而言,新算法的 DOA 跟踪误差仅为 PAST 算法的 1/5;另一方面,对突变信号而言,该算法的跟踪速度达到传统算法的 5 倍,同时还克服了

PAST 算法无法对相干信号进行 DOA 跟踪的缺陷。

参考文献:

- [1] JIAN Huan, LIU Jian-fei. Application study of dual-polarization smart antenna in TD-SCDMA system[C]// IEEE Trans on International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation. Changsha: IEEE Press, 2010: 679-682.
- [2] WINTERS J H. Smart antenna techniques and their application to wireless ad hoc networks[J]. IEEE Wireless Communications, 2006, 13(4): 77-83.
- [3] WANG Li-xin. The DOA tracking method based gaussian particle filter in smart antennas[C]// IET International Conference on Wireless, Mobile and Multimedia Networks. Hangzhou: IEEE Press, 2006: 1-4.
- [4] PILLAI S U, KWON B H. Forward/backward spatial smoothing techniques for coherent signal identification[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1989, 37(1): 8-15.
- [5] TAO Guo-zheng. Recursive subspace model identification based on orthogonal projection and principal component analysis[C]// IEEE International Conference on Computer Application and System Modeling. Taiyuan: IEEE Press, 2010: 422-429.
- [6] TU Chao-cheng, CHAMPAGNE B. Subspace tracking of fast time-varying channels in precoded MIMO-OFDM systems[C]// IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Taipei: IEEE Press, 2009: 2565-2568.
- [7] SARKAR T K, YANG X. Application of the conjugate gradient and steepest descent for computing the eigenvalues of an operator[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1989, 17(1): 31-38.
- [8] YANG B. Projection approximation subspace tracking[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(1): 95-107.
- [9] ABED-MERAİM K, CHKEIF A, HUA Y. Fast orthonormal PAST algorithm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2000, 7(3): 60-62.
- [10] 王永良, 陈辉, 彭应宁, 等. 空间谱估计理论与算法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [11] LAVATE T B, KOKATE V K, SAPKAL A M. Performance analysis of MUSIC and ESPRIT DOA estimation algorithms for adaptive array smart antenna in mobile communication[J]. IEEE International Conference on Computer and Network Technology. Bangkok: IEEE Press, 2010: 308-311.

Application of a New Subspace Updating Algorithm in DOA Estimation

HU Mao-bing, TANG Wei, CAI Can-hui

(College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In order to improve the weakness of the traditional methods on tracking sudden parameter changing signals slowly, the approximation eigenvalue decomposition method, an efficient subspace updating algorithm with variable forgetting factor, is presented. The novel algorithm adopts a new rank_1 updating equation with variable forgetting factors to update the covariance matrix of the array output signals. At the same time it proposes a new cost function which is based on the prior information and the eigenvalue decomposition (ED) of the updated covariance matrix. And then the signal subspace is updated real time by the least square solution of the new cost function. Finally, some examples are simulated and the results exhibit that the algorithm provides not only one fifth of the direction of arrival estimation error, but also five times of the tracking speed of sudden parameter changing signals to the original algorithm, which confirms the accuracy and effectiveness of this new algorithm.

Keywords: arrival direction; sudden parameter changing signals; variable forgetting factor; subspace updating algorithm; eigenvalue decomposition