

文章编号: 1000-5013(2012)04-0361-05

圆锯片轴向变形的解析模型及其实验验证

房怀英, 李远, 徐西鹏

(华侨大学 脆性材料加工技术教育部工程研究中心, 福建 厦门 361021)

摘要: 为研究石材锯切过程中圆锯片的轴向变形及其与轴向力之间的关系, 根据弹性薄板小挠度弯曲的基本理论, 对轴向力作用下圆锯片的轴向变形进行理论推导, 并通过编程进行数值求解. 采用实验方法测量圆锯片在锯切石材时的轴向变形及轴向力信号, 并将圆锯片上一整圈的轴向变形实验结果与解析模型计算结果进行比较. 研究表明: 两种方法所得圆锯片轴向变形的结果符合得较好, 由圆锯片所受的轴向力可以推导出锯片的轴向变形.

关键词: 圆锯片; 轴向变形; 轴向力; 弹性薄板; 小挠度弯曲

中图分类号: TG 717 **文献标志码:** A

岩石材料从岩体上开采下来到变成成为石材制品要经历切割、磨平、抛光和倒边等多道机械加工工序, 其中切割工序最常见^[1]. 金刚石圆锯片是石材行业中使用最多的切割工具, 特别是对于锯切小规格板材, 金刚石圆锯片是不可或缺的^[2]. 锯切石材时, 多种因素均会导致圆锯片发生轴向变形, 而过大的轴向变形会造成圆锯片基体受力不良, 锯切出的板材锯缝不直、平面度不高、厚度不均等缺憾^[3]. 因此, 有必要对石材锯切过程中圆锯片的轴向变形进行研究. 现有文献中, 与此相关问题的研究较少, 文献[4]运用有限元方法简单分析了圆锯片在非对称集中轴向力作用下的轴向变形整体形状; 文献[5-7]研究锯切过程中圆锯片的横向振动随加工参数的变化规律, 但对圆锯片的轴向变形情况未作讨论. 锯切石材用的圆锯片在工作过程中作旋转和进给的复合运动, 使得锯片轴向变形的测量不方便. 但从圆锯片锯切石材的作用过程可以看出, 圆锯片发生轴向变形后将受到石材沿着轴向的反作用, 对锯片直接施以轴向力. 因此, 可以推测锯片所受的轴向力与其轴向变形间应该存在直接的联系. 本文根据弹性薄板小挠度弯曲的基本理论, 对轴向力作用下的圆锯片的轴向变形进行理论推导, 并通过 Matlab 编程进行数值求解, 最后通过实验对所建解析模型的正确性进行验证.

1 轴向力作用下圆锯片轴向变形的理论推导

锯切石材过程中, 圆锯片用法兰盘固定在锯机主轴上, 锯切时圆锯片在锯切弧区内的节块受到石材的轴向力作用, 锯片上各点发生挠曲变形. 此时可以将圆锯片简化为中间固支, 周边自由的圆板在非对称轴向力作用下的振动情况来分析, 所对应的圆锯片轴向变形微分方程^[8]为

$$D\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) = q. \tag{1}$$

式(1)中: w 为圆锯片的轴向变形; q 为轴向分布载荷; D 为圆锯片的刚度.

假设圆锯片的轴孔半径是 r' , 约束法兰盘的半径是 a , 圆锯片的半径是 c 、厚度是 t . 锯切石材时, 圆锯片在锯切弧区内的节块受轴向力的作用面小, 可认为是集中力, 设力的大小为 F_z 、作用点半径为 b , 作用于 $\theta=0$ 的平面上, 圆锯片的极坐标力学模型如图 1 所示. 因此, 方程(1)的解可写成以下形式, 即

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} R_m \cos m\theta. \tag{2}$$

收稿日期: 2012-03-12

通信作者: 房怀英(1978-), 女, 副教授, 主要从事脆性材料加工的研究. E-mail: happen@hqu.edu.cn.

基金项目: 福建省自然科学基金资助项目(2010J01294); 中央高校基本科研业务费专项资金资助, 华侨大学“侨办”科研基金项目(JB-ZR1156)

式(2)中: $R_m(m=0,1,2,3,\cdots)$ 为要求轴向变形半径 r 的函数. 将式(2)代入式(1),可得 R_m 的解为

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r, \\ R_1 &= A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \ln r, \\ R_m &= A_m r^m + B_m r^{-m} + C_m r^{m+2} + D_m r^{-m-2}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式(3)中:常数 $A_0, B_0, C_0, D_0, A_1, B_1, C_1, D_1, A_m, B_m, C_m, D_m(m \geq 2)$ 由圆锯片的边界条件确定.

假设把圆锯片从载荷作用点 $r=b$ 处分成两个圆环板, 根据式(2)可将圆锯片分成内、外两部分的轴向变形, 即

$$w_N = R_{N,0} + R_{N,1} + \sum_{m=2}^{\infty} R_{N,m} \cos m\theta, \quad w_W = R_{W,0} + R_{W,1} + \sum_{m=2}^{\infty} R_{W,m} \cos m\theta. \quad (4)$$

在边界 $r=a$ 上,圆锯片处于固支状态,沿该半径上圆锯片的挠度为零,斜率也为零,则有

$$(w_N)_{r=a} = 0, \quad \left(\frac{\partial w_N}{\partial r}\right)_{r=a} = 0. \quad (5)$$

在边界 $r=c$ 上,圆锯片处于自由状态,在该半径上圆锯片的弯矩为零,总分布剪力也为零,则有

$$(M_r)_{r=c} = 0, \quad V_r = \left(Q_r - \frac{\partial M_{r,\theta}}{r \partial \theta}\right)_{r=c} = 0. \quad (6)$$

式(6)中: Q_r 为横向剪力; $M_{r,\theta}$ 为扭矩.

根据圆周 $r=b$ 上的变形连续性条件,沿该半径上圆锯片的挠度和弹性曲面的斜率应分别相等,有

$$(w_N)_{r=b} = (w_W)_{r=b}, \quad \left(\frac{\partial w_N}{\partial r}\right)_{r=b} = \left(\frac{\partial w_W}{\partial r}\right)_{r=b}. \quad (7)$$

因为沿圆周 $r=b$ 无分布外力矩,所以在此交界线上内外两部分的弯矩 M_r 应该相等,即

$$(M_{N,r})_{r=b} = (M_{W,r})_{r=b} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 w_N}{\partial r^2}\right)_{r=b} = \left(\frac{\partial^2 w_W}{\partial r^2}\right)_{r=b}. \quad (8)$$

将轴向力 F_z 沿圆周展开成三角级数^[9], 则有

$$p = \frac{F_z}{\pi b} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \right). \quad (9)$$

因为在圆周上内外两部分的总分布剪力应与式(12)所表示的外力平衡, 所以有

$$\begin{aligned} (V_{N,r})_{r=b} &= (V_{W,r})_{r=b} = -\frac{F_z}{\pi b} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \right) \Rightarrow \\ D \left(\left(\frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w_N) \right)_{r=b} - \left(\frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w_W) \right)_{r=b} \right) &= \frac{F_z}{\pi b} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \right). \end{aligned} \quad (10)$$

把式(3)代入式(4)后,再依次代入式(5)~(10),可得到关于 $A_{N,m}, B_{N,m}, C_{N,m}, D_{N,m}$ 和 $A_{W,m}, B_{W,m}, C_{W,m}, D_{W,m}(m \geq 0)$ 的 3 个八元一次方程组, 即

$$\left. \begin{aligned} A_{N,0} + B_{N,0} a^2 + C_{N,0} \ln a + D_{N,0} a^2 \ln a &= 0, \\ 2B_{N,0} a + C_{N,0} a^{-1} + D_{N,0} a + D_{N,0} a \ln a &= 0, \\ 2(1+u)B_{W,0} - (1-u)c^{-2}C_{W,0} + (3+u)D_{W,0} + 2(1+u)D_{W,0} \ln c &= 0, \\ 4D_{W,0} c^{-1} &= 0, \\ A_{N,0} + B_{N,0} b^2 + C_{N,0} \ln b + D_{N,0} b^2 \ln b &= A_{W,0} + B_{W,0} b^2 + C_{W,0} \ln b + D_{W,0} b^2 \ln b, \\ 2B_{N,0} b + C_{N,0} b^{-1} + D_{N,0} b + D_{N,0} b \ln b &= 2B_{W,0} b + C_{W,0} b^{-1} + D_{W,0} b + D_{W,0} b \ln b, \\ 2B_{N,0} b - C_{N,0} b^{-2} + 3D_{N,0} + 2D_{N,0} \ln b &= 2B_{W,0} - C_{W,0} b^{-2} + 3D_{W,0} + 2D_{W,0} \ln b, \\ 8\pi D(D_{N,0} - D_{W,0}) &= F_z. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{N,1} a + B_{N,1} a^3 + C_{N,1} a^{-1} + D_{N,1} a \ln a &= 0, \\ A_{N,1} + 3B_{N,1} a^2 - C_{N,1} a^{-2} + D_{N,1} (1 + \ln a) &= 0, \\ A_{W,1} c^{-1} u + 3(2+u)B_{W,1} c + (2-u)C_{W,1} c^{-3} + (1+u)D_{W,1} c^{-1} + D_{W,1} c^{-1} u \ln c &= 0, \\ -A_{W,1} c^{-2} + 9B_{W,1} - 3C_{W,1} c^{-4} - D_{W,1} c^{-2} - D_{W,1} c^{-2} \ln c &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

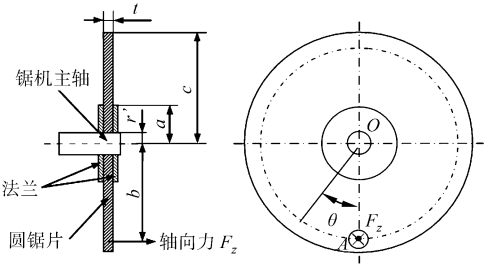


图 1 圆锯片的力学模型
Fig. 1 Mechanical model of the circular saw

$$\left. \begin{aligned} A_{N,1}b + B_{N,1}b^3 + C_{N,1}b^{-1} + D_{N,1}b \ln b &= A_{W,1}b + B_{W,1}b^3 + C_{W,1}b^{-1} + D_{W,1}b \ln b, \\ A_{N,1} + 3B_{N,1}b^2 - C_{N,1}b^{-2} + D_{N,1}(1 + \ln b) &= A_{W,1} + 3B_{W,1}b^2 - \\ &\quad C_{W,1}b^{-2} + D_{W,1}(1 + \ln b), \\ 6B_{N,1}b + 2C_{N,1}b^{-3} + D_{N,1}b^{-1} &= 6B_{W,1}b + 2C_{W,1}b^{-3} + D_{W,1}b^{-1} - \\ (A_{N,1} - A_{W,1})b^{-2} + 9(B_{N,1} - B_{W,1}) - 3(C_{N,1} - C_{W,1})b^{-4} - (D_{N,1} - D_{W,1})b^{-2}, \\ - (D_{N,1} - D_{W,1})b^{-2} \ln b &= \frac{F_z}{\pi b D}. \end{aligned} \right\} \quad (12b)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{N,m}a^m + B_{N,m}a^{-m} + C_{N,m}a^{m+2} + D_{N,m}a^{-m+2} &= 0, \\ mA_{N,m}a^{m-1} - mB_{N,m}a^{-m-1} + (m+2)C_{N,m}a^{m+1} + (2-m)D_{N,m}a^{-m+1} &= 0, \\ m(m-1)(1-u)A_{W,m}c^{m-2} + m(m+1)(1-u)B_{W,m}c^{-m-2} + (m+1) \times \\ [m+2+(2-m)u]C_{W,m}c^m + (1-m)[2-m+(m+2)u]D_{W,m}c^{-m} &= 0, \\ m^2(1-u)(1-m)A_{W,m}c^{m-3} + m^2(1-u)(1+m)B_{W,m}c^{-m-3} + m(m+1) \times \\ (mu-m+4)C_{W,m}c^{m-1} + m(m-1)(m-mu+4)D_{W,m}c^{-m-1} &= 0, \\ A_{N,m}b^m + B_{N,m}b^{-m} + C_{N,m}b^{m+2} + D_{N,m}b^{-m+2} &= A_{W,m}b^m + B_{W,m}b^{-m} + C_{W,m}b^{m+2} + D_{W,m}b^{-m+2}, \\ mA_{N,m}b^{m-1} - mB_{N,m}b^{-m-1} + (m+2)C_{N,m}b^{m+1} - (m-2)D_{N,m}b^{-m+1} &= \\ mA_{W,m}b^{m-1} - mB_{W,m}b^{-m-1} + (m+2)C_{W,m}b^{m+1} - (m-2)D_{W,m}b^{-m+1}, \\ m(m-1)A_{N,m}b^{m-2} + m(m+1)B_{N,m}b^{-m-2} + (m+2)(m+1)C_{N,m}b^m + \\ (m-1)(m-2)D_{N,m}b^{-m} &= m(m-1)A_{W,m}b^{m-2} + m(m+1)B_{W,m}b^{-m-2} + \\ (m+2)(m+1)C_{W,m}b^m + (m-1)(m-2)D_{W,m}b^{-m} &4m(m+1) \times \\ (C_{N,m} - C_{W,m})b^{m-1} + 4m(m-1)(D_{N,m} - D_{W,m})b^{-m-1} &= \frac{F_z}{\pi b D}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

解方程组(11)~(13),并将解得的系数代入式(3),在求出 $R_m(m \geq 0)$ 的表达式后再代入式(4),即可得到轴向力作用下圆锯片的轴向变形公式。

2 轴向变形和轴向力实验

锯切石材时,圆锯片的轴向变形和轴向力的实验研究所采用的装置及条件与文献[4]中的相同。图2为装置实物图。花岗石工件用专门的夹具固定在锯机的工作台上,选用基于无线传感装置的方法测量圆锯片的横向振动,采用 Kistler 9257BA 型压电晶体测力仪测量花岗石所受的轴向力 F_z 。根据圆锯片与花岗石之间的力为作用力与反作用力的关系,推出该作用力即为圆锯片在锯切弧区内所受的轴向力。取圆锯片完全切入石材时的横向振动信号,通过

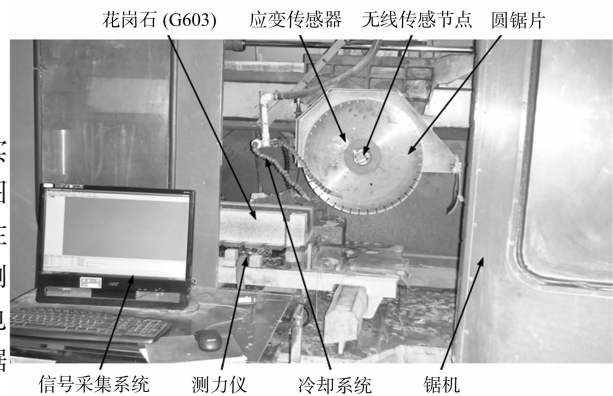


图2 锯切实验装置图

Fig. 2 Experimental device of the sawing

上限截止频率为 50 Hz 的低通滤波器对横向振动信号进行滤波,得到圆锯片的轴向变形信号。

在进给速度为 $5 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$,圆周线速度为 $40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,切深为 20 mm 的锯切参数下,圆锯片的轴向变形信号如图3所示。由图3可以看出:圆锯片完全切入石材时的轴向变形信号具有明显的周期性,信号的周期长度为圆锯片旋转一周所需的时间。实验中的花岗石工件为非均质材料,其组成成分分布的随机性很大,锯片节块上的金刚石颗粒分布也具有一定的随机性,但圆锯片轴向变形信号却表现出较好的周期性,说明被加工石材材料成分的分布和节块上金刚石的分布状态对锯片的轴向变形影响不大。

石材锯切过程中,圆锯片的轴向变形主要由锯片基体的初始应力状态、锯片的结构、节块与被加工石材工件的初始接触状态等因素决定的。圆锯片所受轴向力由静态轴向力和动态轴向力组成。静态轴向力主要取决于圆锯片是否正确安装,圆锯片在旋转状态下的应力分布情况,以及圆锯片锯切石材的切口面是否平整等因素。动态轴向力主要决定于锯片节块上金刚石的状态,锯切加工工艺参数,锯切弧区

岩屑与锯片的作用,以及锯路上石材的成分分布等因素.因此,动态轴向力作用机理复杂,具有很多的不确定性因素,故此处选用静态轴向力作为分析对象.业界普遍认为原信号的低频分量即信号的直流部分,也是静态量,故实验数据处理时的轴向力是由采集信号经过上限频率为 10 Hz 的低通滤波得到^[10].

3 轴向变形解析解与实验结果比较

要直接求出式(4)中圆锯片轴向变形的解析解比较困难,因此需要利用数值分析软件 Matlab 来计算圆锯片上各点的轴向变形值.计算所用圆锯片的基体材料为 65 Mn,相应的参数:密度为 $7\,800\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$;弹性模量为 210 GPa;泊松比为 0.3;内径为 50 mm;外径为 600 mm;基体厚度为 3 mm;节块高度为 10 mm.

圆锯片在锯切石材时受到石材对节块的集中轴向力作用,设力的作用点在节块高度的中点上,即作用在 $r=295\text{ mm},\theta=0^\circ$ 的位置上,而实验中所测得圆锯片的轴向变形量为在半径 108 mm 上的轴向变形情况.

为了对实验结果和解析模型计算结果作对比分析,解析模型计算也在该半径上进行.对不同的锯切参数下,圆锯片一个整周期的轴向变形实验结果与解析模型计算结果进行对比,结果如图 4 所示.解析模型计算时,轴向力集中作用在极坐标系下坐标为 $(r=295\text{ mm},\theta=0^\circ)$ 的点上,所施加的轴向力来源于与实验锯切参数相对应的实验数据.

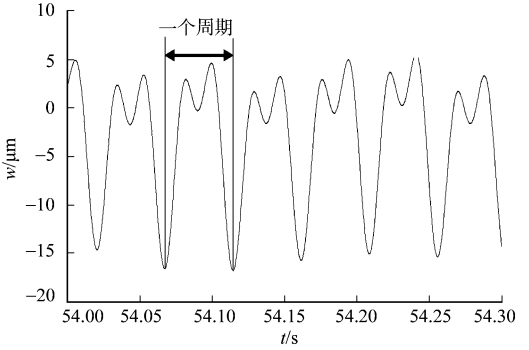
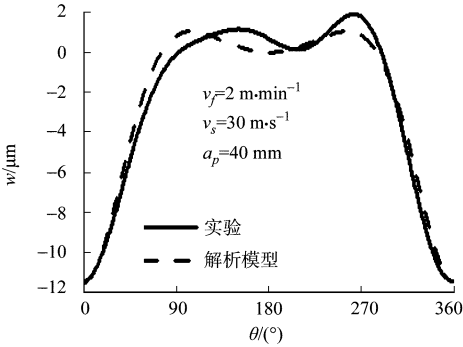
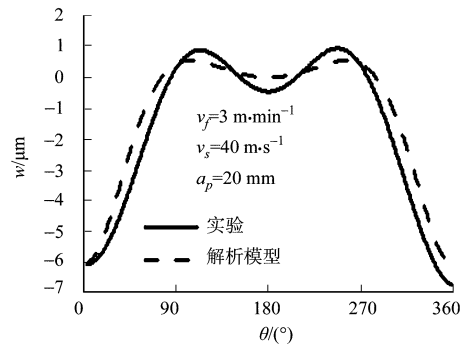


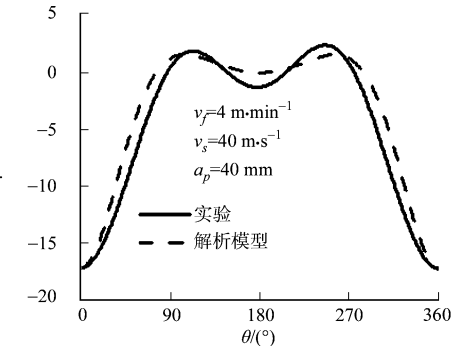
图 3 圆锯片的轴向变形信号
Fig. 3 Axial deformation signal of the circular saw



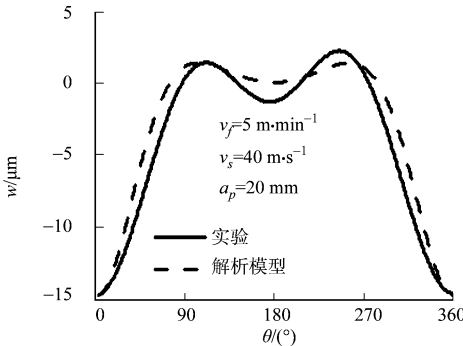
(a) $F_z = 35.543\text{ N}$



(b) $F_z = 18.795\text{ N}$



(c) $F_z = 53.592\text{ N}$



(d) $F_z = 45.755\text{ N}$

图 4 不同锯切参数下轴向变形的解析解与实验结果比较

Fig. 4 Comparison of the axial deformation analytical solutions and its experimental results under the different cutting parameters

由图 4 可以看出:解析模型计算结果与实验结果能比较好地吻合;解析模型计算结果的正向轴向变形区域小于实验结果的正向轴向变形区域.这是由于理论建模时的轴向力是集中力,而锯切实验过程

中的轴向力却作用于整个锯切弧区内的节块上,力的作用面较大,从而使正向轴向变形区域向 180°位置偏移. 锯片上的 90°~270°区域内解析模型计算结果的轴向变形幅度比实验结果小,这是由于实验中的锯片在空转时已经发生了一定的轴向变形.

从图 4 还可以看出:实验中的锯片的轴向变形并没有像解析模型结果那样相对于 0°所在的半径对称. 这是因为在理论建模时,通常认为圆锯片上各点的材料分布均匀,应力分布也均匀,但实际实验锯片的基体不可能做到这一点;再者,理论建模将圆锯片简化成一个标准的圆盘,而实验锯片的基体周围焊有节块,节块的不共面也会引起锯片轴向变形的不对称.

4 结论

运用弹性薄板的小挠度弯曲理论,建立了轴向力作用下圆锯片轴向变形的解析模型,并对石材锯切过程中圆锯片的轴向变形及所受的轴向力进行实验研究. 采用数值分析的方法求解实验所得的轴向力作用下圆锯片轴向变形的解析解,并与实验结果进行了对比分析,结果基本吻合,从而验证了所建解析模型的正确性. 圆锯片在锯切石材过程中轴向变形的测量方法复杂,通过上述研究发现,可以通过测量锯片轴向力的方法,结合解析模型,比较全面地了解锯片在锯切石材过程中的轴向变形情况.

参考文献:

[1] 徐西鹏. 岩石材料的金刚石锯切研究进展[J]. 机械工程学报,2003,39(3):17-21.
[2] 谈耀麟. 薄型金刚石圆锯片结构设计探讨[J]. 超硬材料工程,2007,19(1):34-36.
[3] FANG Huai-ying, LI Yuan, HUANG Hui, et al. Effects of cutting parameters on the transverse vibration of diamond circular saw blade[J]. Advanced Materials Research, 2010, 126/127/128: 667-671.
[4] 李庆华. 高速回转圆盘薄片刀具横向振动的控制研究[D]. 长春: 吉林大学, 2007: 26-27.
[5] 徐东镇. 锯切时夹盘圆锯片横向振动特性研究[D]. 南京: 南京林业大学, 2006: 21-26.
[6] 解振华. 硅晶片内圆锯切过程的振动研究[D]. 广州: 广东工业大学, 2005.
[7] TIAN J F, HUTTON S G. Cutting-induced vibration in circular saws[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 242(5): 907-922.
[8] 寿楠椿. 弹性薄板弯曲[M]. 北京: 高等教育出版社, 1987.
[9] 刘鸿文. 板壳理论[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1987: 139-140.
[10] 房怀英, 李远, 徐西鹏. 轴向力对圆锯片轴向变形的影响研究[J]. 中国机械工程, 2011, 22(8): 966-970.

Analytical Model and Experimental Verification on Axial Deformation of Circular Saw in Sawing of Stone

FANG Huai-ying, LI Yuan, XU Xi-peng

(MOE Engineering Research Center for Brittle Materials Machining, Huaqiao University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In order to study axial deformation of the circular saw in the stone sawing process and the relationship between axial deformation and axial force, in this paper, theoretical derivation was done firstly on axial deformation of the circular saw under axial force according to the bending theory of small deformation for thin elastic plate. And the numerical solution was done by programming. Then, the signals of axial deformation and axial force were measured by the stone sawing experiments. The experimental results were compared with the analytical solutions about axial deformation of a whole circle on the circular saw. Studies show that the results by two methods agree well with each other. And the axial deformation of the circular saw can be derived from the axial force acting on it.

Keywords: circular saw; axial deformation; axial force; elastic thin plate; minor deflection bending