第 33 卷 第 3 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 33 No. 3
2012 年 5 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) May. 2012

文章编号: 1000-5013(2012)03-0357-04

弱紧集上的 2-Rotund 范数

罗正华

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 设 C 是 Banach 空间$(X,\|\cdot\|)$弱紧凸子集,P 为 X 上等价范数的全体,证明 X 在 C 上满足 weakly 2-Rotund(w2R)性质的等价范数全体为 P 的剩余集;当 C 是可分时,上述 w2R 性质可替换为 2R 性质,推广了罗正华的研究结论.

关键词: Banach 空间; 弱紧集; 2R 范数; w2R 范数

中图分类号: O 177.2 **文献标志码:** A

1 预备知识

由于弱紧集在 Banach 空间理论及其应用中的重要性,人们对弱紧集的研究已经持续了 80 多年,并取得许多重要的成果,如 James 弱紧集特征定理,Eberlein-Smulian 定理,Choquet 积分表示定理,Davis-Fiegel-Johnson-Pelzynski 引理,Rainwater 定理,Orlicz-Pettis 定理,Krein-Smulian 定理,Krein-Milman 定理,等等. 而自反空间与弱紧集密切相关,其上的拓扑及再赋范性质的研究也引起了数学家们极大的兴趣. 寻找空间自反性的几何特征是其中一重要问题. 这方面最著名的结果是一致凸 Banach 空间是自反的[1-2]. 同时,自反空间未必是可一致凸化的[3],这说明一致凸性是严格强于自反性的. 于是,数学家们努力去寻找能与自反性等价的几何性质.

利用 Milman 定义的 2-Rotund(2R)及弱 2-Rotund(w2R)这两种几何性质[4-7],人们对这一问题作出了完美的回答,即可分 Banach 空间 X 是自反的当且仅当 X 上存在等价的(2R)w2R 范数[8-9]. 文献[10]的研究还指出:自反空间等价的(2R)w2R 范数的全体构成了一个剩余集. 为了从自反性到弱紧性,程立新等[11-12]引入的 2R(w2R)范数的局部化定义,即设空间$(X,\|\cdot\|)$是 Banach 空间,$C\subset X$ 是非空有界闭凸集,称$\|\cdot\|$在 C 上是 2R(相应地,w2R)的,如果序列$\{x_n\}\subset C$ 满足

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{x_m+x_n}{2}\right\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|,$$

则$\{x_n\}$收敛(相应地,弱收敛),且证明了如下定理.

定理 A Banach 空间 X 的有界闭凸子集(相应地,可分有界闭凸子集)C 是弱紧的当且仅当 X 上存在等价的范数,其在 C 上是 w2R (相应地,2R)的.

2 主要结果与证明

设$(X,\|\cdot\|)$是 Banach 空间,令 $P=\{p: p$ 是 X 上等价范数$\}$,定义 P 上度量如下:

$$\rho(p,q) = \sup\{|p(x)-q(x)|: \|x\|\leqslant 1\},\qquad \forall p,q\in P.$$

则(P,ρ)是第二纲的度量空间[9].

定理 1 设$(X,\|\cdot\|)$是 Banach 空间,$C\subset X$ 是弱紧凸集,则:

ⅰ) 在 C 上满足 w2R 性质的等价范数的全体在(P,ρ)中是一个剩余集;

收稿日期: 2011-07-19

通信作者: 罗正华(1977-),男,讲师,主要从事基础数学泛函分析的研究. E-mail:luo_zhenghua@hotmail.com.

基金项目: 华侨大学高层次人才科研启动项目(11BS223)

ⅱ)当 C 是可分时，X 在 C 上满足 2R 性质的等价范数的全体在 (P,ρ) 中是一个剩余集.

引理1　设 $(X,\|\cdot\|)$ 是Banach空间,则序列 $\{x_n\}\subset X$ 满足

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{x_m+x_n}{2}\right\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|,$$

当且仅当其满足

$$\lim_{m,n\to\infty}(2\|x_n\|^2+2\|x_m\|^2-\|x_n+x_m\|^2)=0.$$

证明　一方面,其必要性是易见的.另一方面,设

$$\lim_{m,n\to\infty}(2\|x_n\|^2+2\|x_m\|^2-\|x_n+x_m\|^2)=0,$$

由于有

$$2\|x_n\|^2+2\|x_m\|^2-\|x_n+x_m\|^2\geqslant 2\|x_n\|^2+2\|x_m\|^2-(\|x_n\|+\|x_m\|)^2=(\|x_n\|-\|x_m\|)^2.$$

所以有

$$(\|x_n\|-\|x_m\|)^2\to 0,\qquad n,m\to\infty.$$

即 $\{\|x_n\|\}$ 是Cauchy列,因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|$ 存在，进而有

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{x_m+x_n}{2}\right\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|.$$

证毕.

引理2　设 $(X,\|\cdot\|)$ 是Banach空间，$C\subset X$ 是非空有界闭凸集,则 $\|\cdot\|$ 在 C 上是2R(相应地 w 2R)的,当且仅当如果序列 $\{x_n\}\subset C$ 满足：

$$\lim_{m,n\to\infty}(2\|x_n\|^2+2\|x_m\|^2-\|x_n+x_m\|^2)=0,$$

则 $\{x_n\}$ 收敛(相应地,弱收敛).

证明　由引理1即得.证毕.

定理1的证明　ⅰ)由定理A可知，X 上存在等价的范数 r_0,而 r_0 在 C 上是w2R的.对 $p\in(P,\rho)$,$j\in N$,令

$$G(p,j)=\{q\in(P,\rho):\sup\{|p^2(x)+\frac{1}{j}r_0^2(x)-q^2(x)|:\|x\|\leqslant 1\}<\frac{1}{j^2}\}.$$

显然,$\sqrt{p^2+\frac{1}{j}r_0^2}\in G(p,j)$,且 $G(p,j)$ 是开集.事实上,设 $p\in G(p,j)$,若 $q'\in(P,\rho)$,且 $\rho(q,q')<\varepsilon$ (ε 待定)，则对 $\|x\|\leqslant 1$，有

$$\begin{aligned}|p^2(x)+\frac{1}{j}r_0^2(x)-q'^2(x)|&\leqslant|p^2(x)+\frac{1}{j}r_0^2(x)-q^2(x)|+|q^2(x)-q'^2(x)|=\\&|p^2(x)+\frac{1}{j}r_0^2(x)-q^2(x)|+|q(x)+q'(x)|\times|q(x)-q'(x)|\leqslant\\&|p^2(x)+\frac{1}{j}r_0^2(x)-q^2(x)|+\varepsilon(2q(x)+\varepsilon),\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}&\sup\{|p^2(x)+\frac{1}{j}r_0^2(x)-q'^2(x)|:\|x\|\leqslant 1\}\leqslant\\&\sup\{|p^2(x)+\frac{1}{j}r_0^2(x)-q^2(x)|:\|x\|\leqslant 1\}+\sup\{\varepsilon(2q(x)+\varepsilon):\|x\|\leqslant 1\}.\end{aligned}$$

因为 $q\in G(p,j)$，即有

$$\sup\{|p^2(x)+\frac{1}{j}r_0^2(x)-q^2(x)|:\|x\|\leqslant 1\}<\frac{1}{j^2},$$

所以当 ε 充分小时,有

$$\sup\{|p^2(x)+\frac{1}{j}r_0^2(x)-q'^2(x)|:\|x\|\leqslant 1\}<\frac{1}{j^2},$$

即 $q'\in G(p,j)$,所以 $G(p,j)$ 是开集.

对 $k\in N$，令 $G_k=\bigcup\limits_{p\in(p,\rho),j\geqslant k}G(p,j)$，则 G_k 是开集 .

下面证明 G_k 是稠密的.

设 $p\in(P,\rho)$，则对 $\forall j\geqslant k$，$\sqrt{p^2+\frac{1}{j}r_0^2}\in G(p,j)\subset G_k$，且

$$\rho\left(\sqrt{p^2+\frac{1}{j}r_0^2},p\right)=\sup\left\{\sqrt{p^2(x)+\frac{1}{j}r_0^2(x)}-p(x):\ \|x\|\leqslant 1\right\}=$$
$$\sup\left\{\frac{\frac{1}{j}r_0^2(x)}{\sqrt{p^2(x)+\frac{1}{j}r_0^2(x)}+p(x)}:\ \|x\|\leqslant 1\right\}\leqslant$$
$$\sup\left\{\frac{1}{\sqrt{j}}r_0(x):\ \|x\|\leqslant 1\right\}=$$
$$\frac{1}{\sqrt{j}}\sup\{r_0(x):\ \|x\|\leqslant 1\}\to 0,\qquad j\to\infty.$$

即：$p\in\overline{G}_k$. 所以 G_k 是稠密的.

令 $G=\bigcap\limits_{k\in N}G_k$. 由 (P,ρ) 的第二纲性知：G 是稠密的 G_δ 集. 记 X 在 C 上满足 w2R 性质的等价范数的全体为 H. 下面再证 $G\subset H$.

设 $p_0\in G$，又假设序列 $\{x_n\}\subset C$ 满足

$$2p_0^2(x_n)+2p_0^2(x_m)-p_0^2(x_n+x_m)\to 0,\qquad n,m\to\infty.$$

不妨设 $C\subset B(\|\cdot\|,1/2)$，因为 $p_0\in G$，所以对每个 $k\in N$，存在 $p_k\in(P,\rho)$ 及 $j_k>k$，s. t. ，则有

$$\sup\left\{\left|p_k^2(y)+\frac{1}{j_k}r_0^2(y)-p_0^2(y)\right|:\ \|y\|\leqslant 1\right\}<\frac{1}{j_k^2}.$$

注意到

$$2p_k^2(x_n)+2p_k^2(x_m)-p_k^2(x_n+x_m)\geqslant(p_k(x_m)-p_k(x_n))^2\geqslant 0,$$

则有

$$\frac{1}{j_k}[2r_0^2(x_n)+2r_0^2(x_m)-r_0^2(x_n+x_m)]\leqslant\frac{1}{j_k}[2r_0^2(x_n)+2r_0^2(x_m)-r_0^2(x_n+x_m)]+$$
$$2p_k^2(x_n)+2p_k^2(x_m)-2p_k^2(x_n+x_m)=$$
$$2\left[p_k^2(x_n)+\frac{1}{j_k}r_0^2(x_n)\right]+2\left[p_k^2(x_m)+\frac{1}{j_k}r_0^2(x_m)\right]-$$
$$\left[p_k^2(x_n+x_m)+\frac{1}{j_k}r_0^2(x_n+x_m)\right]\leqslant$$
$$2\left[\frac{1}{j_k^2}+p_0^2(x_n)\right]+2\left[\frac{1}{j_k^2}+p_0^2(x_m)\right]-\left[p_0^2(x_n+x_m)-\frac{1}{j_k^2}\right]=$$
$$\frac{5}{j_k^2}+2p_0^2(x_n)+2p_0^2(x_m)-p_0^2(x_n+x_m).$$

所以有

$$\limsup_{n,m\to\infty}\ \frac{1}{j_k}[2r_0^2(x_n)+2r_0^2(x_m)-r_0^2(x_n+x_m)]\leqslant\frac{5}{j_k^2}.$$

进而可得

$$\limsup_{n,m\to\infty}\ [2r_0^2(x_n)+2r_0^2(x_m)-r_0^2(x_n+x_m)]\leqslant\frac{5}{j_k}\leqslant\frac{5}{k},\qquad\forall k\in N.$$

所以有

$$\limsup_{n,m\to\infty}\ [2r_0^2(x_n)+2r_0^2(x_m)-r_0^2(x_n+x_m)]=0.$$

即有

$$\lim_{n,m\to\infty}\ [2r_0^2(x_n)+2r_0^2(x_m)-r_0^2(x_n+x_m)]=0.$$

由 r_0 在 C 上是 w2R 的可知，$\{x_n\}$ 弱收敛，所以 p_0 在 C 上也是 w2R 的，即 $p_0\in H$，从而 $G\subset H$，所

以 H 是剩余集.

ⅱ) 由定理 A 可知，X 上存在等价范数 r_0，而 r_0 在 C 上是 2R 的. 其他证明与ⅰ)的证明类似，只需将证明ⅰ)中的 w2R 和弱收敛相应地改为 2R 和收敛即可.

定理 1 证毕.

参考文献:

[1] MILMAN D P. On some criteria for the regularity of spaces of the type (B)[J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1938, 20: 243-246.

[2] PETTIS B J. A proof that every uniformly convex spaces is reflexive[J]. Duke Math J, 1939, 5(2): 249-253.

[3] DAY M M. Reflexive spaces not isomorphic to uniformly convex Banach spaces[J]. Bull Amer Math Soc, 1941, 47(4): 313-317.

[4] MILMAN V D. Geometric theory of Banach spaces (Ⅱ): Geometry of the unit sphere[J]. Russian Math Survey, 1971, 26(6): 79-163.

[5] DAY M M. Normed linear spaces[D]. New York: Springer-Verlag, 1973.

[6] TROYANSKI S. On locally uniformly convex and differentiable norms in certain nonseparable Banach spaces[J]. Studia Math, 1972, 43: 125-138.

[7] DEVILLE R, GODEFROY G, ZIZLER V. Smoothness and renormings in Banach spaces[M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 1993.

[8] HAJEK P, JOHANIS M. Characterization of reflexivity by equivalent renorming[J]. J Funct Anal, 2004, 211(1): 163-172.

[9] ODELL E, SCHLUMPRECHT T. Asymptotic properties of Banach spaces under renormings[J]. J Amer Math Soc, 1998, 11(1): 175-188.

[10] 罗正华. 关于 2R(w2R)范数的一个注记[J]. 数学研究, 2010, 43(4): 387-392.

[11] CHENG Li-xin, CHENG Qing-jin, LUO Zheng-hua. On some new characterizations of weakly comapct sets in Banach spaces[J]. Studia Math, 2010, 201: 155-166.

[12] CHENG Li-xin, CHENG Qing-jin, LUO Zheng-hua, et al. Every weakly compact convex set can be uniformly embedded into a reflexive space[J]. Acta Math Sin (Engl Ser), 2009, 25(7): 1109-1112.

2-Rotund Norms on the Weakly Comapct Sets

LUO Zheng-hua

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: Let C be a weakly compact convex subset of a Banach space $(X, \|\cdot\|)$ and P be the set of all the equivalent norms on X, we prove that all the equivalent norms on X which satisfy the weakly 2-Rotund (w2R) property on C form a residual set of P. In Addition, if C is separable, the above w2R property can be replaced by 2R property. This result generalize the one made by LUO Zheng-hua.

Keywords: Banach spaces; weakly compact sets; 2R norms; w2R norms

(**责任编辑**: 黄晓楠 **英文审校**: 张金顺，黄心中)