

文章编号: 1000-5013(2012)03-0354-03

一类纯时滞单种群对数模型的稳定性

吴怀弟^{1,2}, 阮育清¹, 张惠英¹, 陈凤德¹

(1. 福州大学 数学与计算机科学学院, 福建 福州 350108;

2. 福建农林大学 计算机与信息学院, 福建 福州 350002)

摘要: 研究具有弱积分核的纯时滞单种群对数模型. 通过适当的变换将系统转成无时滞二维定常系统, 借助 Bendixson 定理证得新系统的平衡点是全局稳定的. 结果表明: 具有弱积分核的纯时滞单种群对数模型的正平衡点是无条件全局稳定的.

关键词: 纯时滞; 对数模型; Bendixson 定理; 弱积分核; 稳定性

中图分类号: O 175.14

文献标志码: A

1 预备知识

经典的单种群无穷时滞 Logistic 模型可以表达为

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)[a - bx(t) - c \int_{-\infty}^t k(t-s)x(s)ds]. \quad (1)$$

式(1)中: $x(t)$ 为 t 时刻的生物种群密度; a, b, c 均为正常数, 且 a 为内禀增长率; 积分核 k 连续且满足 $\int_0^{\infty} k(s)ds = 1$, 且有 $\int_0^{\infty} sk(s)ds < +\infty$. 当 $b \neq 0$ 时, 系统(1)称为非纯时滞情形, 而当 $b=0$ 时, 系统(1)称为纯时滞情形. 对于非纯时滞情形, 在条件 $b > c$ 下通过构造适当的 Lyapunov 泛函可以证得系统的正平衡点是全局吸引的^[1]; 然而对于纯时滞情形, 此时系统没有无时滞项来控制系统的动力学行为, 时滞将极大地影响系统的动力学行为. 对这一情形, 文献[2]针对具体的积分核, 采用变换的手法将系统转化为常微系统, 进而探讨新系统的稳定性; 文献[3]通过构造新的 Lyapunov 泛函, 探得系统的正平衡点稳定性的充分性条件. 然而, 并不是所有的单种群模型都能用 Logistic 方程来刻画, 文献[2, 4]就发现在某些情形下用如下对数模型来刻画种群增长更为符合实际, 即

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) \ln \left(\frac{K}{x(t)} \right). \quad (2)$$

相对应于系统(1), 文献[5]提出了无穷时滞对数种群模型

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)[a - b \ln x(t) - c \int_{-\infty}^t k(t-s) \ln x(s)ds]. \quad (3)$$

式(3)中: $x(t)$ 为 t 时刻的生物种群密度; a, b, c 均为正常数, a 为内禀增长率; 积分核 k 连续且满足 $\int_0^{\infty} k(s)ds = 1$, 且有 $\int_0^{\infty} sk(s)ds < +\infty$.

对一般情形的积分核, 通过构造适当的 Lyapunov 泛函, 文献[4]表明在条件 $b > c$ 下系统(3)的正平衡点是全局吸引的. 然而, 对于 $b=0$ 的纯时滞情形, 即系统

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) \left[a - c \int_{-\infty}^t k(t-s) \ln x(s)ds \right] \quad (4)$$

的正平衡点的稳定性问题, 至今尚未有学者进行研究.

文中将在系统(4)的积分核是弱积分核的情形下研究其正平衡点的稳定性, 即研究系统

收稿日期: 2011-11-28

通信作者: 陈凤德(1974-), 男, 教授, 主要从事生态数学模型动力学性质的研究. E-mail: fdchen@263.net.

基金项目: 福建省教育厅科研基金资助项目(JB09001); 福建省科技创新平台计划项目(20091007)

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)[a - c \int_{-\infty}^t \exp(-d(t-s)) \ln x(s) ds] \tag{5}$$

的正平衡点的稳定性. 其中: a, c 都是正常数.

定理 1 系统(5)的唯一正平衡点 $x^* = \exp(ad/c)$ 是全局稳定的.

根据生态学含义, 考虑系统(5)的初值问题为

$$x(s) = \phi(s) > 0, \quad s \in (-\infty, 0], \quad \sup_{s \in (-\infty, 0]} \phi(s) < +\infty. \tag{6}$$

式(6)中: $\phi(s)$ 是 $(-\infty, 0]$ 上的连续函数. 由泛函微分方程的基本理论可知: 系统(5)~(6)的解在 $(0, +\infty]$ 存在且是正的, 则称其为系统(5)的正解.

2 主要结果的证明

由 $u = \ln x, v = \int_{-\infty}^t \exp(-d(t-s)) \ln x(s) ds$, 系统(5)变换为

$$\frac{du(t)}{dt} = a - cv(t) := F_1(u, v), \quad \frac{dv(t)}{dt} = u(t) - dv(t) := F_2(u, v). \tag{7}$$

经计算易知, 系统(7)有唯一的正平衡点 $P(u^*, v^*)^T = (ad/c, a/c)^T$.

引理 1 系统(7)的任一正解是有界的.

证明 注意到 $(u^*, v^*)^T$ 满足方程 $a - cv^* = 0, u^* - dv^* = 0$. 代入系统(7), 则有

$$\frac{du(t)}{dt} = -c[v(t) - v^*], \quad \frac{dv(t)}{dt} = [u(t) - u^*] - d[v(t) - v^*]. \tag{8}$$

构造函数 $V(t) = \frac{1}{2}[u(t) - u^*]^2 + \frac{c}{2}[v(t) - v^*]^2$, 计算 $V(t)$ 沿着系统(8)的导数为

$$\frac{dV}{dt} = -c(u - u^*)(v - v^*) + c(v - v^*)[(u - u^*) - d(v - v^*)] = -cd(v - v^*)^2 < 0.$$

由此可知函数 $V(t)$ 是单调减少的, 故 $V(t) = \frac{1}{2}[u(t) - u^*]^2 + \frac{c}{2}[v(t) - v^*]^2 \leq V(0) < +\infty$, 也即系统(7)的任一正解是有界的. 证毕.

定理 1 的证明: 显然要证明系统(5)的正平衡点 x^* 的全局稳定性, 等价于证明系统(7)的正平衡点

$(u^*, v^*)^T$ 在 R^2 平面上是全局稳定的. 注意到变换后系统的变分矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -d \end{pmatrix}$.

于是, 在 $P(u^*, v^*)^T$ 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda & c \\ -1 & \lambda + d \end{vmatrix} = \lambda^2 + d\lambda + c = 0. \tag{9}$$

显然, 方程(9)的两个特征根为 $\lambda_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4c}}{2}$. 考虑到 c, d 均为正实数, 说明方程(9)的两个特征根或为两个具有负数, 或为一对具有负实部的共轭复根, 即正平衡点 $P(u^*, v^*)^T$ 是局部稳定的. 又注意到在 R^2 平面上恒有 $\frac{\partial F_1}{\partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial v} = -d < 0$, 于是由 Bendixson-Dulac 判别法知道系统在全平面不存在极限环. 注意到系统(8)只有一个平衡点 $P(u^*, v^*)^T$, 于是所有的轨线都将以 $P(u^*, v^*)^T$ 作为极限集, 也就是方程的平衡位置 $P(u^*, v^*)^T$ 在 R^2 平面上是全局稳定的. 定理证毕.

3 数值模拟

考虑如下例子

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)[1 - 3 \int_{-\infty}^t \exp(-4(t-s)) \ln x(s) ds]. \tag{10}$$

该例由于是纯时滞系统, 系数不满足文献[5]的定理条件, 其正平衡点的稳定性无法用文献[5]的

相关结论加以判别. 经过变换 $u = \ln x, v = \int_{-\infty}^t \exp(-4(t-s)) \ln x(s) ds$, 后系统(10)等价于系统

$$\frac{du(t)}{dt} = 1 - 3v(t), \quad \frac{dv(t)}{dt} = u(t) - 4v(t). \tag{11}$$

显然, 变换后的系统有唯一的平衡点 $(u^*, v^*)^T = (4/3, 1/3)^T$. 定理表明, 该平衡点是全局稳定的. 初值为 $(0.1, 0.1)^T, (1.1)^T, (-2, 3)^T, (0.6, -1)^T$ 和 $(-1, 3)^T$ 的解的 $u(t), v(t)$ 的数值模拟也支持这一结论, 如图 1 所示.

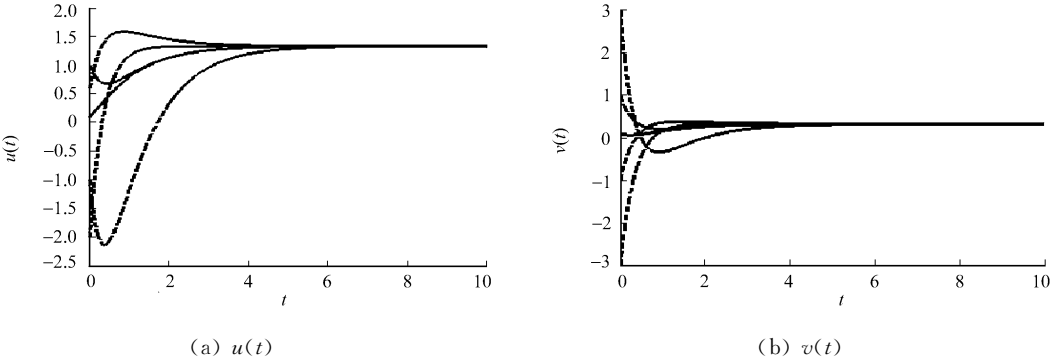


图 1 系统(11)中不同初值解的分量模拟数值
Fig. 1 Dynamic behavior of system (11) with different initial condition

参考文献:

[1] 吴怀弟,张娜,陈凤德. 无穷时滞单种群 Logistic 捕获模型的渐近行为[J]. 福州大学学报:自然科学版,2011,39(3): 325-328.

[2] 陈兰荪,宋新宇,陆征一. 数学生态学模型与研究方法[M]. 成都:四川科学技术出版社,2003.

[3] CHEN Feng-de,SHI Chun-ling. Dynamic behavior of a Logistic type equation with infinite delay[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica,2006,22(2):313-324.

[4] ATKINSON E N,BARTOSZYNSKI R,BROWN B W,et al. On estimating the growth function of tumors[J]. Math Biosci,1989,67(2):121-136.

[5] CHEN Feng-de. Periodic solutions and almost periodic solutions for a delay multispecies Logarithmic population model[J]. Applied Mathematics and Computation,2005,171(2):760-770.

Stability Property of a Pure Delay Single Species Logarithmic Population Model

WU Huai-di^{1,2}, RUAN Yu-qing¹,
ZHANG Hui-ying¹, CHEN Feng-de¹

(1. College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China;
2. College of Computer and Information Science, Fujian Agriculture and Forestry University, Fuzhou 350002, China)

Abstract: In this paper, a weakly integral kernel pure delay single species Logarithmic population model is studied. By intruducing some suitable change, the system is transformed into a two dimensional ordinary differential system. By applying Bendixson theorem we show that the positive equilibrium of the new system is globally stable, which means that the positive equilibrium of the original system is global stability, and delay has no influence on the stability property of the system.

Keywords: pure delay; logarithmic population model; Bendixson theorem; weakly integral kernel; stability