第33卷 第3期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 33 No. 3
2012年5月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) May. 2012

文章编号: 1000-5013(2012)03-0348-06

一类具多时滞二阶非线性微分方程的周期解

曹君艳，王全义

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 研究一类具有多变时滞的二阶非线性微分方程 $x''(t)+f_1(x(t))x'(t)+f_2(x(t-\tau_1(t)))(x'(t))^2+g(t,x(t-\tau_2(t)))$ 的周期解的存在性问题．利用重合度理论中的连续定理和一些分析技巧，得到该方程存在周期解的一些新结果，所得结果推广和改进了刘斌的结果.

关键词： 泛函微分方程；重合度理论；可变时滞；周期解

中图分类号： O 175　　**文献标志码：** A

二阶非线性常微分方程解的有界性、周期解存在性等问题已被广泛研究[1-8]．然而，在物理学、生物学等各种领域的模型中，具有时滞的二阶非线性泛函微分方程更为常见．近年来，具有时滞的二阶非线性微分方程的相关问题，尤其是周期解存在性问题引起了人们的极大关注[3-8]，文献[5]利用重合度理论研究了方程

$$x''(t)+f_1(x(t))x'(t)+f_2(x(t))(x'(t))^2+g(x(t-\tau(t)))=0 \tag{1}$$

的周期解存在性问题．其中：f_1，f_2，g，$\tau\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$，且 τ 是以 $T(T>0)$ 为周期的周期函数.本文将研究更为一般的,具有多个可变时滞的二阶非线性微分方程

$$x''(t)+f_1(x(t))x'(t)+f_2(x(t-\tau_1(t)))(x'(t))^2+g(t,x(t-\tau_2(t)))=0 \tag{2}$$

的周期解存在性问题.其中：$f_1,f_2,\tau_1,\tau_2\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$，$g\in C(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$，对任意的 $t,x\in\mathbf{R}$，有 $g(t,x)=g(t+T,x)$，τ_1,τ_2 是以 T 为周期的函数.

1 预备知识

为了方便，首先引入重合度理论的连续性定理[9].

设 X 和 Y 是实 Banach 空间，定义线性映射 L：$\mathrm{Dom}\,L\subset X\to Y$，以及定义连续映射 N：$X\to Y$．若 $\dim\mathrm{Ker}\,L=\mathrm{co}\dim\mathrm{Im}\,L<+\infty$，且 $\mathrm{Im}\,L$ 为 Y 中闭子集，则称 L 是指标为零的 Fredholm 映射.

若 L 是指标为零的 Fredholm 映射，且存在连续投影 P：$X\to X$ 及 Q：$Y\to Y$，使得 $\mathrm{Im}\,P=\mathrm{Ker}\,L$，$\mathrm{Im}\,L=\mathrm{Ker}\,Q=\mathrm{Im}(I-Q)$，$X=\mathrm{Ker}\,L\oplus\mathrm{Ker}\,P$ 和 $Y=\mathrm{Im}\,L\oplus\mathrm{Im}\,Q$，则 $L|_{\mathrm{Dom}\,L\cap\mathrm{Ker}\,P}$：$\mathrm{Dom}\,L\cap\mathrm{Ker}\,P\to\mathrm{Im}\,L$ 可逆，设其逆映射为 K_P．设 Ω 为 X 中的有界开集，若 QN：$\bar{\Omega}\to X$ 和 $K_P(I-Q)N$：$\bar{\Omega}\to X$ 都是紧的，则称 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L-紧的.

引理1[9]　设 X 和 Y 为 Banach 空间，L：$\mathrm{Dom}\,L\subset X\to Y$ 是指标为零的 Fredholm 算子，$\Omega\subset X$ 是一个有界开集，连续映射 N 在 $\bar{\Omega}$ 是 L-紧的.如果满足 a) $Lx\neq\lambda Nx$，$\forall x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Dom}\,L$，$\lambda\in(0,1)$；b) $Nx\notin\mathrm{Im}\,L$，$\forall x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L$；c) $\deg(QN,\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L,0)\neq0$，则方程 $Lx=Nx$ 在 $\bar{\Omega}\cap\mathrm{Dom}\,L$ 上至少存在一个解.

2 主要结果及其证明

定理1　假设以下条件成立，即有

收稿日期： 2011-10-13

通信作者： 王全义(1955-)，男，教授，主要从事常微分方程和泛函微分方程的研究. E-mail：qywang@hqu.edu.cn.

基金项目： 国务院侨办科研基金资助项目(09QZR10)

A_1）$\exists M>0$，使得当$|u|>M$时，$ug(t,u)>0$，$\forall t\in\mathbf{R}$；

A_2）$\exists \mu_1>0$，μ_2，$\mu_3\geqslant 0$，使得 $|f_2(u)|\geqslant\mu_1$，$|g(t,u)|\leqslant\mu_2|u|^2+\mu_3$，$\forall t,u\in\mathbf{R}$，$\mu_2T^2<\mu_1$，则方程(2)至少存在一个 T-周期解.

证明　假设 $X=\{x\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}):x(t+T)=x(t)\}$，$Y=\{y\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}):y(t+T)=y(t)\}$. 定义范数 $\|x\|_1=\max\{\|x\|_0,\|x'\|_0\}$，$\|x\|_0=\max\limits_{t\in[0,T]}|x(t)|$，则$(X,\|\cdot\|_1)$与$(Y,\|\cdot\|_0)$都为 Banach 空间. 分别定义线性算子 L 及连续映射 N 为 $L:\mathrm{Dom}\,L\to Y$，$Lx=x''$，$x\in\mathrm{Dom}\,L=C_T^2=\{x\in C^2(\mathbf{R},\mathbf{R}):x(t+T)=x(t)\}$，$N:X\to Y$，$Nx=-\{f_1(x(t))x'(t)+f_2(x(t-\tau_1(t)))x'(t))^2+g(t,x(t-\tau_2(t)))\}$. 其中：$x\in X$.

要证明方程(2)至少存在一个 T-周期解，就等价于证明算子方程

$$Lx=Nx,\qquad x\in\mathrm{Dom}\,L,\tag{3}$$

至少存在一个解.

分别定义投影算子 $P:X\to X$ 及 $Q:Y\to Y$ 为

$$Px=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t,\qquad\forall x\in X,$$

$$Py=\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\mathrm{d}t,\qquad\forall y\in Y.$$

从而有 $\mathrm{Ker}\,L=\mathbf{R}$，$\mathrm{Im}\,L=\{y\in Y:\int_0^T y(t)\mathrm{d}t=0\}$ 为 Y 中的闭子集，且有 $\dim\mathrm{Ker}\,L=\dim\mathbf{R}=\mathrm{co}\dim\mathrm{Im}\,L=1<+\infty$，所以 L 是指标为零的 Fredholm 映射，而 P，Q 连续投影，且使得 $\mathrm{Im}\,P=\mathrm{Ker}\,L$，$\mathrm{Im}\,L=\mathrm{Ker}\,Q=\mathrm{Im}(I-Q)$，$X=\mathrm{Ker}\,L\oplus\mathrm{Ker}\,P$，$Y=\mathrm{Im}\,L\oplus\mathrm{Im}\,Q$，则 $L_{|\mathrm{Dom}\,L\cap\ker P}:\mathrm{Dom}\,L\cap\mathrm{Ker}\,P\to\mathrm{Im}\,L$ 是可逆映射，其逆映射 $K_P:\mathrm{Im}\,L\to\mathrm{Dom}\,L\cap\mathrm{Ker}\,P$ 可表示为

$$\begin{aligned}(K_Py)(t)=&\int_0^t\{\int_0^s y(\xi)\mathrm{d}\xi-\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^\eta y(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\}\mathrm{d}s-\frac{t}{T}\int_0^T\{\int_0^t\{\int_0^s y(\xi)\mathrm{d}\xi-\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^\eta y(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\}\mathrm{d}s\}\mathrm{d}t=\\&\int_0^t y(\xi)(t-\xi)\mathrm{d}\xi-\frac{t}{T}\int_0^T y(\xi)(T-\xi)\mathrm{d}\xi-\\&\frac{1}{T}\int_0^T\{\int_0^t y(\xi)(t-\xi)\mathrm{d}\xi-\frac{t}{T}\int_0^T y(\xi)(T-\xi)\mathrm{d}\xi\}\mathrm{d}t=\\&\int_0^t y(s)(t-s)\mathrm{d}s-\frac{t}{T}\int_0^T y(s)(T-s)\mathrm{d}s-\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^t y(s)(t-s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^T y(s)(T-s)\mathrm{d}s=\\&\int_0^t y(s)(t-s)\mathrm{d}s+(\frac{t}{T}+\frac{1}{2})\int_0^T sy(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{2T}\int_0^t s^2y(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}QNx=&-\frac{1}{T}\int_0^T\{f_1(x(t))x'(t)+f_2(x(t-\tau_1(t)))(x'(t))^2+g(t,x(t-\tau_2(t)))\}\mathrm{d}t=\\&-\frac{1}{T}\int_0^T\{f_2(x(t-\tau_1(t)))(x'(t))^2+g(t,x(t-\tau_2(t)))\}\mathrm{d}t,\qquad\forall x\in X.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_P(I-Q)Nx=&\int_0^t Nx(s)(t-s)\mathrm{d}s+(\frac{t}{T}+\frac{1}{2})\int_0^T sNx(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{2T}\int_0^T s^2Nx(s)\mathrm{d}s-\\&(\frac{t^2}{2T}+\frac{t}{2}+\frac{T}{12})\int_0^T Nx(s)\mathrm{d}s=\int_0^t Nx(s)(t-s)\mathrm{d}s-\frac{1}{2T}\int_0^T s^2Nx(s)\mathrm{d}s+\\&(\frac{t}{T}+\frac{1}{2})\int_0^T sNx(s)\mathrm{d}s-(\frac{t^2}{2T}+\frac{t}{2}+\frac{T}{12})\int_0^T Nx(s)\mathrm{d}s,\qquad\forall x\in X,\end{aligned}$$

其中：$Nx(s)=-f_1(x(s))x'(s)-f_2(x(s-\tau_1(s)))(x'(s))^2-g(s,x(s-\tau_2(s)))$.

利用 Lebesgue 收敛定理，容易证明 $QN:X\to Y$ 和 $K_P(I-Q)N:X\to X$ 是连续的；再利用 Arzela-Ascoli 定理可以证明，对于 X 中的任意有界开子集 Ω，$QN(\bar{\Omega})$以及 $K_P(I-Q)N(\bar{\Omega})$是紧的，因此 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L-紧的.

设 $\Omega_1=\{x:x\in\mathrm{Dom}\,L\subset X,Lx=\lambda Nx,\lambda\in(0,1)\}$，$x=x(t)\in\Omega_1$，则至少存在一个 $\lambda\in(0,1)$，使得 $x=x(t)$是方程

$$x''(t)=-\lambda\{f_1(x(t))x'(t)+f_2(x(t-\tau_1(t)))(x'(t))^2+g(t,x(t-\tau_2(t)))\} \tag{4}$$

在 X 中的一个解.

假设 $t_1,t_2\in[0,1]$分别是 $x(t)$的极小点和极大点，那么 $x'(t_1)=x'(t_2)=0,x''(t_1)\geqslant 0,x''(t_2)\leqslant 0$. 由此式及式(4)可得

$$g(t_1,x(t_1-\tau_2(t_1)))=-\frac{1}{\lambda}x''(t_1)\leqslant 0, \tag{5}$$

$$g(t_2,x(t_2-\tau_2(t_2)))=-\frac{1}{\lambda}x''(t_2)\geqslant 0. \tag{6}$$

存在 $t_0\in[0,T)$，使得

$$|x(t_0)|\leqslant M. \tag{7}$$

事实上，可由式(5),(6)分两种情况给予证明.

情况 1 如果 $g(t_1,x(t_1-\tau_2(t_1)))$与 $g(t_2,x(t_2-\tau_2(t_2)))$至少有一个等于零,不妨设 $g(t_1,x(t_1-\tau_2(t_1)))=0$. 于是有$|x(t_1-\tau_2(t_1))|\leqslant M$. 因为如果$|x(t_1-\tau_2(t_1))|>M$，则由条件 A_1)可得

$$x(t_1-\tau_2(t_1))\cdot g(t_1,x(t_1-\tau_2(t_1)))>0.$$

这与假设矛盾. 记 $t_1-\tau_2(t_1)=nT+t_0$，n 为整数，$t_0\in[0,T)$,于是有

$$|x(t_0)|=|x(t_1-\tau_2(t_1))|\leqslant M.$$

同理可证,当 $g(t_2,x(t_2-\tau_2(t_2)))=0$ 时,$\exists\, t_0\in[0,T]$,式(7)成立. 这就附带了证明当 $g(t_1,x(t_1-\tau_2(t_1)))=0$ 及 $g(t_2,x(t_2-\tau_2(t_2)))=0$ 时,式(7)成立.

情况 2 如果 $g(t_1,x(t_1-\tau_2(t_1)))<0$,而 $g(t_2,x(t_2-\tau_2(t_2)))>0$，令 $F(t)=g(t,x(t-\tau_2(t)))$,即有 $F(t_1)<0$，$F(t_2)>0$. 记 $t'=\min\{t_1,t_2\}$，$t''=\max\{t_1,t_2\}$，由于 $F(t)$在$[t',t'']$上连续，于是由连续函数的介值定理可知存在 $t_3\in[t',t'']$,使得 $F(t_3)=0$，即 $g(t_3,x(t_3-\tau_2(t_3)))=0$. 与上一种情况的证明相同，可得

$$|x(t_3-\tau_2(t_3))|\leqslant M.$$

记 $t_3-\tau_2(t_3)=mT+t_0$，m 为整数，$t_0\in[0,T)$，于是有

$$|x(t_0)|=|x(t_3-\tau_2(t_3))|\leqslant M.$$

综合情况 1,2 可知,式(7)总是成立的. 由式(7)可得

$$\begin{aligned}|x(t)|&=|x(t_0)+\int_0^t x'(s)\mathrm{d}s|\leqslant|x(t_0)|+|\int_0^t x'(s)\mathrm{d}s|\leqslant\\&M+\int_0^T|x'(s)|\mathrm{d}s,\qquad\forall\, t\in[0,T).\end{aligned} \tag{8}$$

由条件(A_2)及 $f_2\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$可知，对任意的 $u\in\mathbf{R}$，有

$$f_2(u)<-\mu_1<0,\quad 或\ f_2(u)>\mu_1>0,\qquad\forall\, u\in\mathbf{R}. \tag{9}$$

将式(4)两边同时从 0 到 T 积分,可得

$$\int_0^T f_2(x(t-\tau_1(t)))(x'(t))^2\mathrm{d}t=-\int_0^T g(t,x(t-\tau_2(t)))\mathrm{d}t.$$

由上式和式(9)可得

$$\int_0^T|f_2(x(t-\tau_1(t)))(x'(t))^2|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^T|g(t,x(t-\tau_2(t)))|\mathrm{d}t. \tag{10}$$

再由式(9)，(10)和条件 A_2)可得

$$\begin{aligned}\mu_1\int_0^T|x'(t))^2|\mathrm{d}t&\leqslant\int_0^T|f_2(x(t-\tau_1(t)))(x'(t))^2|\mathrm{d}t\leqslant\\&\int_0^T|g(t,x(t-\tau_2(t)))|\mathrm{d}t\leqslant\\&\mu_2\int_0^T|x(t-\tau_2(t))|^2\mathrm{d}t+\mu_3T\leqslant\mu_2T\|x\|_0^2+\mu_3T,\end{aligned} \tag{11}$$

即 $$\int_0^T|x'(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{\mu_2}{\mu_1}T\|x\|_0^2+\frac{\mu_3}{\mu_1}T.$$

由式(8),(11)可得

$$\|x\|_0=\max_{t\in[0,T]}|x(t)|\leqslant M+\sqrt{T}(\int_0^T|x'(s)|^2\mathrm{d}s)^{1/2}\leqslant$$
$$M+\sqrt{T}(\frac{\mu_2 T}{\mu_1}\|x\|_0^2+\frac{\mu_3 T}{\mu_1})^{1/2}=M+T(\frac{\mu_2}{\mu_1}\|x\|_0^2+\frac{\mu_3}{\mu_1})^{1/2}\leqslant$$
$$M+T(\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\|x\|_0+\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_1}}),$$

于是有

$$\|x\|_0(1-T\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}})\leqslant M+T\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_1}}. \tag{12}$$

由式(12)及条件 A_2)可得

$$\|x\|_0\leqslant\frac{M\sqrt{\mu_1}+T\sqrt{\mu_3}}{\sqrt{\mu_1}-T\sqrt{\mu_2}}=:M_1. \tag{13}$$

又因为 $x(0)=x(T)$，所以 $\exists t^*\in[0,T]$，使得 $x'(t^*)=0$，于是有

$$|x'(t)|=|x'(t^*)+\int_{t^*}^t x''(s)\mathrm{d}s|\leqslant\int_0^T|x''(s)|\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,T]. \tag{14}$$

因为 $f_1(u)$在$[-M_1,M_1]$上连续，于是存在常数 $M_2>0$,使得

$$|f_1(u)|\leqslant M_2,\qquad\forall u\in[-M_1,M_1]. \tag{15}$$

由条件 A_2)及式(4),(13),(15)可得

$$\begin{aligned}\int_0^T|x''(t)|\mathrm{d}t\leqslant&\int_0^T|f_1(x(t))x'(t)|\mathrm{d}t+\\&\int_0^T|f_2(x(t-\tau_1(t)))(x'(t))^2|\mathrm{d}t+\int_0^T|g(t,x(t-\tau_2(t)))|\mathrm{d}t\leqslant\\&\int_0^T|f_1(x(t))x'(t)|\mathrm{d}t+2\int_0^T|g(t,x(t-\tau_2(t)))|\mathrm{d}t\leqslant\\&M_2\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t+2\mu_2\int_0^T|x(t-\tau_2(t))|^2\mathrm{d}t+2\mu_3 T\leqslant\\&M_2\sqrt{T}(\int_0^T|x'(t)|^2\mathrm{d}t)^{1/2}+2\mu_2 T\|x\|_0^2+2\mu_3 T\leqslant\\&M_2(\frac{\mu_2}{\mu_1}\|x\|_0^2+\frac{\mu_3}{\mu_1})^{1/2}T+2\mu_2 T\|x\|_0^2+2\mu_3 T\leqslant\\&M_2(\frac{\mu_2}{\mu_1}M_1^2+\frac{\mu_3}{\mu_1})^{1/2}T+2\mu_2 TM_1^2+2\mu_3 T=:M_3.\end{aligned} \tag{16}$$

由式(14),(16)可得

$$\|x'\|_0=\max_{t\in[0,T]}|x'(t)|\leqslant M_3. \tag{17}$$

再由式(12),(16)可得

$$\|x\|_1=\max\{\|x\|_0,\|x'\|_0\}\leqslant\max\{M_1,M_3\}=:M_4. \tag{18}$$

因此,对任意的 $x\in\Omega_1$,有 $\|x\|_1\leqslant M_4$，即 Ω_1 是有界的.

假设 $\Omega_2=\{x:x\in\mathrm{Ker}\,L,Nx\in\mathrm{Im}\,L\}$,对于 $x\in\Omega_2$，有 $x=c\in\mathbf{R}$，$QNx=0$，从而有 $-\frac{1}{T}\int_0^T g(t,c)\mathrm{d}t=0$. 因此,由积分中值定理可知存在 $\bar{t}\in[0,T]$，使得 $g(\bar{t},c)=0$. 又由条件 A_1)可知

$$|c|\leqslant M. \tag{19}$$

于是,Ω_2 是有界的.

设 $\Omega=\{x:x\in X,\|x\|_1<1+M+M_4\}$，则由式(18),(19)可知 $\Omega\supset\Omega_1\cup\Omega_2$. 再由前面的证明可知,引理 1 中的条件 a)和 b)成立. 现在作同伦映射

$$H(x,\mu)=-\mu x+(1-\mu)QNx,\qquad\forall x\in\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L,\qquad\mu\in[0,1].$$

则对任意的 $x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L,\mu\in[0,1]$,有 $x=c\in\mathbf{R}$,且$|c|>M$ 成立，于是有

$$xH(x,\mu)=-\mu x^2-\frac{1-\mu}{T}\int_0^T xg(t,x)\mathrm{d}t<0,\qquad x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L.$$

再由条件 A_1)可得 $H(x,\mu)\neq 0$, $x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L$. 故由同伦不变性可得

$$\deg(JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L,0)=\deg(QN,\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L,0)=$$
$$\deg(H(x,0),\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L,0)=\deg(H(x,1),\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L,0)=-1\neq 0.$$

于是引理 1 的条件 c)也成立. 因此由引理 1 可知,方程(3) 在 $\bar{\Omega}$ 上至少存在一个不动点,也即方程(2)至少存在一个 T-周期解.

注 1 显然,定理 1 的证明方法不同于文献[5]所使用的方法,并且由于 $f_2(x(t-\tau_1(t)))$中含有可变时滞函数 $\tau_1(t)$,因而文献[5]所使用的变量替换是不能应用到方程(2)的.

在方程(2)中,当 $\tau_1(t)=0,\tau_2(t)=\tau(t)$ 及 $g(t,x(t-\tau_2(t)))=g(x(t-\tau_2(t)))$时,就得到方程(1). 因此由定理 1 直接得到.

推论 1 假设以下条件成立:A'_1) 存在常数 $M>0$ 使得 $ug(u)>0$, $|u|>M$;A'_2) 存在常数 $\mu_1>0$, $\mu_2,\mu_3\geqslant 0$. 使得 $|f_2(u)|\geqslant\mu_1$, $|g(u)|\leqslant\mu_2|u|^2+\mu_3$, $\forall\, u\in\mathbf{R}$,其中 $\mu_2T^2<\mu_1$. 那么方程(1)至少有一个 T-周期解.

定理 2 假设条件 A_2) 及条件 A_3) 存在常数 $M>0$,使得 $ug(t,u)<0$, $|u|>M,t\in\mathbf{R}$ 成立,那么方程(2)至少存在一个 T-周期解.

此定理的证明与定理 1 的证明完全类似(同伦映射取为 $H(x,\lambda)=\lambda x+(1-\lambda)QNx$, $x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L$ 即可),此处证明从略.

由定理 2,可以直接得到

推论 2 假设条件 A'_2)及条件 A'_3) 存在常数 $M>0$,使得 $ug(u)<0$, $|u|>M$ 成立,那么方程(1)至少存在一个 T-周期解.

注 2 条件 $|g(u)|\leqslant\mu_2|u|+\mu_3(u\in\mathbf{R})$,其中:$\mu_2>0$ 及 $\mu_3\geqslant 0$ 是常数,隐含了 $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{|g(u)|}{u^2}=0$,从而也包含了条件 $|g(u)|\leqslant\mu_4u^2+\mu_5$, $u\in\mathbf{R}$, $0<\mu_4\ll 1$, $\mu_5\geqslant 0$ 是常数.

注 3 显然,推论 1 和推论 2 中的条件比文献[5]中定理 A 的条件弱得多. 例如,改进了 $g(x)$的增长条件;对可变时滞 $\tau(t)$的振幅和函数 $f_1(x)$没有任何限制条件;不必计算 $a(u)=\exp(\int_0^u f_2(s)\mathrm{d}s)$ 及 $b(s)=\int_0^u a(s)f_1(s)\mathrm{d}s$ 的值. 因此,结果大大推广和改进了文献[5]的结果.

3 例子

例 1 考虑方程

$$x''(t)+\exp(x^2)x'(t)+(\pi\sin(x(t-\sin t))+3\pi)(x'(t))^2+g(t,x(t-5\pi\cos t))=0. \tag{20}$$

其中:$g(t,x(t-\tau_2(t)))=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi}x^2(t-5\pi\cos t)+\sin t, x\geqslant 0, t\in\mathbf{R},\\ -\dfrac{1}{4\pi}x^2(t-5\pi\cos t)+\sin t, x<0, t\in\mathbf{R}.\end{cases}$

对应于方程(2),则有 $T=2\pi$, $f_1(x)=\exp(x^2)$, $f_2(x)=\pi\sin x+3\pi$, $\tau_1(t)=\sin t$, $\tau_2(t)=5\pi\cos t$,

$$g(t,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi}x^2+\sin t, x\geqslant 0, t\in\mathbf{R},\\ -\dfrac{1}{4\pi}x^2+\sin t, x<0, t\in\mathbf{R}.\end{cases}$$

取 $M=2\pi$, $\mu_1=2\pi$, $\mu_2=\dfrac{1}{4\pi}$, $\mu_3=1$, 容易验证定理 1 中的条件 A_1)及 A_2)成立. 于是,由定理 1 可知方程(2)至少存在一个 2π-周期解.

例 2 考虑方程

$$x''(t)-x^3x'(t)+[30+x^2(t-10\sin t)](x'(t))^2+g(t,x(t-20\cos t))=0. \tag{21}$$

式中：$g(t,x)=g_1(x)+h(t)$，$g_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{10},x\geqslant 0,\\ \dfrac{-x^2}{10},x<0,\end{cases}$ $h(t)=\exp(\sin t)(\sin t-\cos^2 t)+\exp(4\sin t)\times$ $\cos t-\cos^2 t\cdot[30+\exp(2\sin(t-10\sin t))]\exp(2\sin t)-\dfrac{\exp(2\sin(t-20\cos t))}{10},t\in\mathbf{R}.$

对应于方程(2)，$T=2\pi$，$f_1(x)=-x^3$，$f_2(x)=30+x^2$，$\tau_1(t)=10\sin t$，$\tau_2(t)=20\cos t$. 易见，当 t，$x\in\mathbf{R}$ 时，$|h(t)|\leqslant 35\mathrm{e}^4$，$|f_2(x)|\geqslant 30$.

取 $M=35\mathrm{e}^4$，$\mu_1=30$，$\mu_2=1/10$，$\mu_3=35\mathrm{e}^4$. 容易验证定理 3 中的条件 A_1)及 A_2)都满足．于是，由定理 1 可知方程至少存在一个 2π-周期解.

事实上，将 $x(t)=\exp(\sin t)$代入方程，可知它满足方程，即 $x(t)=\exp(\sin t)$是方程的一个 2π-周期解.

显然，文献[5]的结果是无法判断方程(20)及方程(21)的 2π-周期解的存在性.

参考文献：

[1] GUIDORIZZI H L. Oscillating and periodic solutions of equations of the type $x''+f_1(x)x'+f_2(x)(x')^2+g(x)=0$[J]. J Math Anal Appl，1993，176(1)：11-23.

[2] POURNAKI M R，RAZANI A. On the existence of periodic solutions for a class of generalize forced Liénard equations[J]. Appl Math Lett，2007，20(3)：248-254.

[3] 余志炜，王全义. 一类具有偏差变元的二阶泛函微分方程周期解[J]. 华侨大学学报：自然科学版，2009，30(6)：709-714.

[4] LU Shi-ping，GE Wei-gao. Periodic solutions for a kind of second-order differential equations with multiple deviating arguments[J]. Appl Math Comput，2003，146：195-209.

[5] LIU Bing. Periodic solutions of a nonlinear second-order differential equation with deviating argument[J]. J Math Anal Appl，2005，309(1)：313-321.

[6] LU Shi-ping，GE Wei-gao，ZHENG Zu-xiou. Periodic solutions to neutral differential equation with deviating arguments[J]. Appl Math Comput，2004，152(1)：17-27.

[7] LU Shi-ping，GE Wei-gao. Periodic solutions for a kind of Liénard equation with a deviating argument[J]. J Math Anal Appl，2004，289(1)：231-243.

[8] LIU Bin-wen，HUANG Li-hong. Periodic solutions for a kind of Rayleigh equation with a deviating argument[J]. J Math Anal Appl，2006，321(2)：491-500.

[9] GAME R E，MAWHIN J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations[M]. Berlin：Springer-Verlag，1977.

Periodic Solutions for Second-Order Differential Equations with Deviating Arguments

CAO Jun-yan，WANG Quan-yi

(School of Mathematical Sciences，Huaqiao University，Quanzhou 362021，China)

Abstract： In this paper，we study the problem on the existence of periodic solutions for a class of nonlinear second-order differential equations with deviating arguments $x''(t)+f_1(x(t))x'(t)+f_2(x(t-\tau_1(t)))(x'(t))^2+g(t,x(t-\tau_2(t)))$. By means of the continuation theorem of coincidence degree theory and some analysis techniques，we obtain some news results on the existence of periodic solutions for the equations. Our results generalize and improve the one made by Liu Bin.

Keywords： nonlinear differential equation；coincidence degree theory；deviating argument；periodic solution

（责任编辑：陈志贤　　英文审校：张金顺，黄心中）