文章编号： 1000-5013(2012)03-0342-06

具有脉冲的一阶非线性微分方程边值问题的正解

吴丽娇，王全义

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 研究一类带有脉冲的一阶非线性微分方程边值问题正解的存在问题．通过利用锥不动点定理及一些分析技巧，建立该方程的边值问题存在正解的一些充分条件，推广并改进 LIU Yu-ji 的研究结果．

关键词： 边值问题；脉冲；锥；不动点定理

中图分类号： O 175.14　　**文献标识码：** A

脉冲微分方程是微分方程中一个新的分支，它在物理、化学、生物医学、工业机器人技术和经济学中都有很好的应用．脉冲微分方程周期边值问题的正解的存在性受到许多学者的广泛关注[1-6]．具有脉冲的一阶微分方程的边值问题

$$\left.\begin{aligned} x'(t)+a(t,x(t))x(t)&=f(t,x(t)), & t\in[0,\omega]/\{t_1,\cdots,t_p\},\\ \Delta x(t_k)=x(t_k^+)-x(t_k)&=I_k(x(t_k)), & k=1,2,\cdots,p,\\ x(\omega)&=x(0). \end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式(1)中：$0=t_0<t_1<\cdots<t_p<t_{p+1}=\omega$；$a:[0,\omega]\times[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 连续；$I_k:[0,+\infty)\to[0,+\infty)(k=1,\cdots,p)$是连续的；$f:[0,\omega]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$；$\omega>0$ 是常数．在特殊情况(如 $a(t,x)=a(t)$)下，边值问题(1)就是文献[5]所研究的问题．本文利用锥不动点和一些分析技巧，建立了边值问题(1)存在正解的一些充分条件．

1　一些引理及证明

假设以下条件成立：H_1) 存在$[0,\omega]$上的连续函数 $a_1(t)$，$a_2(t)$，使得对 $\forall(t,x)\in[0,\omega]\times[0,+\infty)$都有 $a_1(t)\leqslant a(t,x)\leqslant a_2(t)$，且对 $a_1(t)$有 $\int_0^\omega a_1(s)\mathrm{d}s>0$．

定义 1　设 X 是一个 Banach 空间，K 是 X 中的一个非空子集，且满足：1) 对任意的 $x,y\in K$，实数 $\alpha,\beta\geqslant 0$，有 $\alpha x+\beta y\in K$；2) 若 $x,-x\in K$，则 $x=0$．那么，称 K 为 X 中的一个锥．

引理 1[7]　设 X 是一个 Banach 空间，K 是 X 中的一个锥．Ω_1 和 Ω_2 是 X 中的两个开集，并且 $\theta\in\Omega_1$，$\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$，$T:K\cap(\bar{\Omega}_2/\Omega_1)\to K$ 是全连续算子，若下列条件之一成立，即

1) 若 $x\in K\cap\partial\Omega_1$，则 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$；若 $x\in K\cap\partial\Omega_2$，则 $\|Tx\|\geqslant\|x\|$；

2) 若 $x\in K\cap\partial\Omega_1$，则 $\|Tx\|\geqslant\|x\|$；若 $x\in K\cap\partial\Omega_2$，则 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$，

则算子 T 在 $K\cap(\bar{\Omega}_2/\Omega_1)$中有不动点．

令 $X=PC([0,\omega],\mathbf{R})=\{x:[0,\omega]\to\mathbf{R}\mid x(0)=x(\omega)$，且 $x(t)$对于 $t\in[0,\omega]/\{t_1,\cdots,t_p\}$是连续的，又当 $t=t_k$ 时 $x(t)$是左连续的且 $x(t_k^+)$存在，$k=1,\cdots,p.\}$．对 $\forall x\in X$，取范数 $\|x\|=\sup\limits_{t\in[0,\omega]}|x(t)|$，则 X 在此范数下是一个 Banach 空间．

定义 2[8]　函数集 $F\subset PC([0,\omega],\mathbf{R})$被称为是在$[0,\omega]$内拟等度连续的，如果对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $x\in F$，$t'_1,t'_2\in(t_{k-1},t_k)\cap[0,\omega](k=1,2,\cdots,p)$，$|t'_1-t'_2|<\delta$ 时，就有$|x(t'_1)-x(t'_2)|<\varepsilon$．

收稿日期： 2010-07-18

通信作者： 王全义(1955-)，男，教授，主要从事常微分方程和泛函微分方程的研究．E-mail：qywang@hqu.edu.cn．

基金项目： 国务院侨办科研基金资助项目(09QZR10)

引理 2　函数集 $F\subset PC([0,\omega],\mathbf{R})$是相对紧的，当且仅当下列条件成立：

1）F 是有界的，即存在常数 $M>0$，使得对任一 $\Psi\in F$ 都有 $\|\Psi\|=\sup\{|\Psi|:t\in[0,\omega]\}\leqslant M$；2）$F$ 在$[0,\omega]$内是拟等度连续的.

定义 3　$f:[0,\omega]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$是一个 L^1-Caratheodory 函数，如果 1）对于 $\forall u\in\mathbf{R}$，$f(\cdot,u)\in X$；2）对于 $t\in[0,\omega]$，$f(t,\cdot)$是连续的；3）对于每个 $q>0$，都存在 $h_q\in L^1[0,\omega]$，使得对于 $t\in[0,\omega]$，$0\leqslant u\leqslant q$，有 $|f(t,u)|\leqslant h_q(t)$.

假设以下条件成立：H_2）$f:[0,\omega]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$是一个 L^1-Caratheodory 函数.

引理 3　如果条件 H_2)成立，则对任意的 $x\in X$ 且 $u(t)\geqslant 0,\theta_k\in\mathbf{R}$，脉冲微分方程的边值问题

$$\left.\begin{aligned} x'(t)+a(t,u(t))x(t)&=f(t,u(t)),\qquad t\in[0,\omega]/\{t_1,\cdots,t_p\},\\ \Delta x(t_k)&=\theta_k,\qquad k=1,2,\cdots,p,\\ x(\omega)&=x(0)\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

有唯一解，即

$$x(t)=\int_0^\omega G(t,s,u)f(s,u(s))\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{p}G(t,t_k,u)\theta_k.$$

式中：当 $0\leqslant s<t\leqslant\omega$ 时，$G(t,s,u)=\dfrac{\exp(\int_0^s a(r,u(r))\mathrm{d}r+\int_t^\omega a(r,u(r))\mathrm{d}r)}{\exp(\int_0^\omega a(r,u(r))\mathrm{d}r)-1}$；而当 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant\omega$ 时，

$G(t,s,u)=\dfrac{\exp(\int_t^s a(r,u(r))\mathrm{d}r)}{\exp(\int_0^\omega a(r,u(r))\mathrm{d}r)-1}$. 假设函数 $a_1(t),a_2(t)$满足条件(H_1)，则定义函数

$$G_1(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\exp(\int_0^s a_1(r)\mathrm{d}r+\int_0^\omega a_1(r)\mathrm{d}r)}{\exp(\int_0^\omega a_2(r)\mathrm{d}r)-1}, & 0\leqslant s<t\leqslant\omega,\\[2ex] \dfrac{\exp(\int_t^s a_1(r)\mathrm{d}r)}{\exp(\int_0^\omega a_2(r)\mathrm{d}r)-1}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant\omega.\end{cases}$$

$$G_2(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\exp(\int_0^s a_2(r)\mathrm{d}r+\int_t^\omega a_2(r)\mathrm{d}r)}{\exp(\int_0^\omega a_1(r)\mathrm{d}r)-1}, & 0\leqslant s<t\leqslant\omega,\\[2ex] \dfrac{\exp(\int_t^s a_2(r)\mathrm{d}r)}{\exp(\int_0^\omega a_1(r)\mathrm{d}r)-1}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant\omega.\end{cases}$$

令 $a_1^-(t)=\min\{0,a_1(t)\}$，$a_2^+(t)=\max\{0,a_2(t)\}$，$K_1=\exp(\int_0^\omega a_1(r)\mathrm{d}r)$，$K_2=\exp(\int_0^\omega a_2(r)\mathrm{d}r)$，$M_1=\exp(\int_0^\omega a_1^-(r)\mathrm{d}r)$，$M_2=\exp(\int_0^\omega a_2^+(r)\mathrm{d}r)$. 从而由条件 H_1)，可得 $K_1\leqslant K_2$，$M_1\leqslant 1<M_2$. 又令 $\delta=\dfrac{M_1(K_1-1)}{M_2(K_2-1)}$，则有 $\delta\in(0,1)$. 于是，又由定积分的性质可得

$$\begin{cases}G_1(t,s)\geqslant\dfrac{M_1}{K_2-1}, & (t,s)\in[0,\omega]\times[0,\omega],\\[2ex] G_2(t,s)\leqslant\dfrac{M_2}{K_1-1}, & (t,s)\in[0,\omega]\times[0,\omega].\end{cases}$$

由 $a_1(t),a_2(t),a(t,x),G_1(t,s),G_2(t,s)$的定义，即得到如下引理 4.

引理 4　如果条件 H_1)，H_2)成立，对任意 $x\in X$，$(t,s)\in[0,\omega]\times[0,\omega]$有

$$\frac{M_1}{K_2-1}\leqslant G_1(t,s)\leqslant G(t,s,x)\leqslant G_2(t,s)\leqslant\frac{M_2}{K_1-1}.$$

定义 $K=\{x\in X: x(t)\geqslant\delta\|x\|, t\in[0,\omega]\}$，易见 K 是 X 中的一个锥. 定义算子 $T: K\to X$ 为

$$(Tx)(t)=\int_0^\omega G(t,s,x)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{p}G(t,t_k,x)I_k(x(t_k)),\qquad \forall x\in K. \tag{3}$$

由于 $G(0,s,x)=G(\omega,s,x)$，因此 $(Tx)(0)=(Tx)(\omega)$. 从而有 $T: K\to X$.

引理 5 如果条件 H_1)，H_2)成立，则算子 $T: K\to K$.

引理 6 如果条件 H_1)，H_2)成立，则算子 $T: K\to K$ 是全连续的.

2 主要结果及证明

做如下 6 点假设：

A_1) 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sup\dfrac{f(t,x)}{x}=b_1(t)$ 对 $t\in[0,\omega]$ 一致地存在，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{I(x)}{x}=v$；

A_2) 极限 $\lim\limits_{x\to0}\inf\dfrac{f(t,x)}{x}=b_2(t)$ 对 $t\in[0,\omega]$ 一致地存在，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{I(x)}{x}=u$；

A_3) 极限 $\lim\limits_{x\to0}\inf\dfrac{f(t,x)}{x}=+\infty$ 对 $t\in[0,\omega]$ 一致地成立；

A_4) 极限 $\lim\limits_{x\to0}\sup\dfrac{f(t,x)}{x}=b_3(t)$ 对 $t\in[0,\omega]$ 一致地存在，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{I(x)}{x}=u$；

A_5) 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\inf\dfrac{f(t,x)}{x}=b_4(t)$ 对 $t\in[0,\omega]$ 一致地存在，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{I(x)}{x}=v$；

A_6) 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\inf\dfrac{f(t,x)}{x}=+\infty$ 对 $t\in[0,\omega]$ 一致地成立.

其中：$b_i(t)$ 在 $[0,\omega]$ 上非负且可积，$i=1,2,3,4$；u,v 为非负常数.

定理 1 如果条件 H_1)，H_2)，A_1)及 A_2) 成立，并且条件

$$\max_{t\in[0,\omega]}\left\{\int_0^\omega G_2(t,s)b_1(s)\mathrm{d}s+v\sum_{k=1}^{p}G_2(t,t_k)\right\}<1,$$

$$\min_{t\in[0,\omega]}\delta\left\{\int_0^\omega G_1(t,s)b_2(s)\mathrm{d}s+u\sum_{k=1}^{p}G_1(t,t_k)\right\}>1$$

成立，则边值问题(1)至少存在一个正解.

证明 由引理 6 知：算子 $T: K\to K$ 是全连续的. 由于 $\max\limits_{t\in[0,\omega]}\left\{\int_0^\omega G_2(t,s)b_1(s)\mathrm{d}s+v\sum\limits_{k=1}^{p}G_2(t,t_k)\right\}<1$，故存在充分小的数 $\varepsilon<0$，使得

$$(1+\varepsilon)\left[\int_0^\omega G_2(t,s)b_1(s)\mathrm{d}s+v\sum_{k=1}^{p}G_2(t,t_k)\right]<1,\qquad t\in[0,\omega].$$

由于极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sup\dfrac{f(t,x)}{x}=b_1(t)$ 对 $t\in[0,\omega]$ 一致地存在，以及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{I(x)}{x}=v$，故对上述的 $\varepsilon<0$，存在 $R>0$，使得当 $x\geqslant R$，$t\in[0,\omega]$ 时，有 $f(t,x)\leqslant b_1(t)(1+\varepsilon)x$，$I(x)\leqslant v(1+\varepsilon)x$.

设 $\Omega_2=\{x\in X: \|x\|<R/\delta\}$，则对 $\forall x\in\partial\Omega_2\cap K$，有 $x(t)\geqslant\delta\|x\|=R$，所以有

$$|(Tx)(t)|=\int_0^\omega G(t,s,x)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{p}G(t,t_k,x)I_k(x(t_k))\leqslant$$

$$(1+\varepsilon)\left[\int_0^\omega G_2(t,s)b_1(s)\mathrm{d}s+v\sum_{k=1}^{p}G_2(t,t_k)\right]\|x\|\leqslant\|x\|,$$

即对 $\forall x\in\partial\Omega_2\cap K$，有 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$.

又由于 $\min\limits_{t\in[0,\omega]}\delta\left\{\int_0^\omega G_1(t,s)b_2(s)\mathrm{d}s+u\sum\limits_{k=1}^{p}G_1(t,t_k)\right\}>1$，所以存在充分小的数 $\varepsilon>0$，使得

$$(1-\varepsilon)\delta\left[\int_0^\omega G_1(t,s)b_2(s)\mathrm{d}s+u\sum_{k=1}^{p}G_1(t,t_k)\right]>1,\qquad t\in[0,\omega].$$

由于极限 $\lim\limits_{x\to0}\inf\dfrac{f(t,x)}{x}=b_2(t)$ 对 $t\in[0,\omega]$ 一致地存在，以及 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{I(x)}{x}=u$，故对上述的 $\varepsilon>0$，存

在 $r>0$，其中 $0<r/\delta<R$，使得当 $0\leqslant x\leqslant r, t\in[0,\omega]$ 时，有 $f(t,x)\geqslant b_2(t)(1-\varepsilon)x, I(x)\geqslant u(1-\varepsilon)x$.

设 $\Omega_1=\{x\in X:\|x\|<r\}$，则对 $\forall x\in\partial\Omega_1\cap K$，有 $0\leqslant x(t)\leqslant\|x\|=r$，所以有

$$|(Tx)(t)|=\int_0^\omega G(t,s,x)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{p}G(t,t_k,x)I_k(x(t_k))\geqslant$$

$$(1-\varepsilon)\delta\Big[\int_0^\omega G_1(t,s)b_2(s)\mathrm{d}s+u\sum_{k=1}^{p}G_1(t,t_k)\Big]\|x\|\geqslant\|x\|.$$

即对 $\forall x\in\partial\Omega_1\cap K$，有 $\|Tx\|\geqslant\|x\|$. 由引理 1 可知：算子 T 在 $K\cap(\bar{\Omega}_2/\Omega_1)$ 中至少有一个不动点．又由引理 3 可知：边值问题(1)至少存在一个正解.

注 1　在特殊情况 $a(t,x)=a(t)$ 下，定理 1 的条件也比文献[5]中定理 3.1.1 的条件弱得多．因此，定理 1 大大推广和改进了文献[5]中的定理 3.1.1.

推论 1　若条件 H_1)，H_2)，A_1)及 A_3)成立，且 $\max\limits_{t\in[0,\omega]}\left\{\int_0^\omega G_2(t,s)b_1(s)\mathrm{d}s+v\sum\limits_{k=1}^{p}G_2(t,t_k)\right\}<1$ 成立，则边值问题(1)至少存在一个正解.

证明　由引理 6 可知，算子 $T:K\to K$ 是全连续的．由于条件 H_1)，H_2)，A_1)成立并且 $\max\limits_{t\in[0,\omega]}\left\{\int_0^\omega G_2(t,s)b_1(s)\mathrm{d}s+v\sum\limits_{k=1}^{p}G_2(t,t_k)\right\}<1$．因此，由定理1的证明可知，存在一个常数 $R>0$ 及 $\Omega_2=\{x\in X:\|x\|<R/\delta\}$，使得对 $\forall x\in\partial\Omega_2\cap K$，有 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$.

又由于极限 $\liminf\limits_{x\to 0}\dfrac{f(t,x)}{x}=+\infty$ 对 $t\in[0,\omega]$ 一致地成立，故存在数 $r>0$，其中 $0<r/\delta<R$，使得当 $0\leqslant x\leqslant r, t\in[0,\omega]$ 时，有 $f(t,x)>\dfrac{K_2-1}{\delta\omega M_1}x$.

设 $\Omega_1=\{x\in X:\|x\|<r\}$，则对 $\forall x\in\partial\Omega_1\cap K$，有 $0\leqslant x(t)\leqslant\|x\|=r$，所以有

$$|(Tx)(t)|=\int_0^\omega G(t,s,x)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{p}G(t,t_k,x)I_k(x(t_k))\geqslant\int_0^\omega G_1(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\omega\cdot\frac{M_1}{K_2-1}\cdot\frac{K_2-1}{\delta\omega M_1}x\geqslant\omega\cdot\frac{M_1}{K_2-1}\cdot\frac{K_2-1}{\delta\omega M_1}\delta\|x\|\geqslant\|x\|,$$

即对 $\forall x\in\partial\Omega_1\cap K$，有 $\|Tx\|\geqslant\|x\|$. 由引理 1 可知，算子 T 在 $K\cap(\bar{\Omega}_2/\Omega_1)$ 中至少有一个不动点，又由引理 3 即知，边值问题(1)至少存在一个正解.

定理 2　若条件 H_1)，H_2)，A_4)及 A_5) 成立，且

$$\max_{t\in[0,\omega]}\{\int_0^\omega G_2(t,s)b_3(s)\mathrm{d}s+u\sum_{k=1}^{p}G_2(t,t_k)\}<1,$$

$$\min_{t\in[0,\omega]}\delta\{\int_0^\omega G_1(t,s)b_4(s)\mathrm{d}s+v\sum_{k=1}^{p}G_1(t,t_k)\}>1$$

成立，则边值问题(1)至少存在一个正解.

证明　与定理 1 的证明类似.

推论 2　若条件 H_1)，H_2)，A_4)及 A_6)成立，且 $\max\limits_{t\in[0,\omega]}\left\{\int_0^\omega G_2(t,s)b_3(s)\mathrm{d}s+u\sum\limits_{k=1}^{p}G_2(t,t_k)\right\}<1$ 成立，则边值问题(1)至少存在一个正解.

证明　与推论 1 的证明类似.

推论 3　若条件 H_1)，H_2)成立且存在正数 $r,R,m,n,0<r<\delta R$ 及$[0,\omega]$上的非负连续函数 $h_1(t)$，$h_2(t)$，使得下列条件

B_1) $f(t,x)\geqslant h_1(t)x$，$I_k(x)\geqslant mx$，$t\in[0,\omega]$，$k=1,2,\cdots,p$，$R\leqslant x\leqslant R/\delta$；

B_2) $f(t,x)\leqslant h_2(t)x$，$I_k(x)\leqslant nx$，$t\in[0,\omega]$，$k=1,2,\cdots,p$，$r\leqslant x\leqslant r/\delta$；

B_3) $\int_0^\omega G_1(t,s)h_1(s)\mathrm{d}s+m\sum\limits_{k=1}^{p}G_1(t,t_k)\geqslant 1/\delta$，$\int_0^\omega G_2(t,s)h_2(s)\mathrm{d}s+n\sum\limits_{k=1}^{p}G_2(t,t_k)\leqslant 1$

成立，则边值问题(1)至少存在一个正解.

证明 由引理 6 可知,算子 $T: K\to K$ 是全连续的. 令 $\Omega_2=\{x\in X: \|x\|<R/\delta\}$, 对 $\forall x\in\partial\Omega_2\cap K$,有 $x(t)\geqslant\delta\|x\|=R$. 那么,由条件 B_1)及 B_2)可得

$$|(Tx)(t)|=\int_0^\omega G(t,s,x)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{p}G(t,t_k,x)I_k(x(t_k))\geqslant$$

$$\int_0^\omega G_1(t,s)h_1(s)x(s)\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{p}G_1(t,t_k)mx(t_k)\geqslant$$

$$\delta\Big[\int_0^\omega G_1(t,s)h_1(s)\mathrm{d}s+m\sum_{k=1}^{p}G_1(t,t_k)\Big]\|x\|\geqslant\|x\|.$$

即对于 $\forall x\in\partial\Omega_2\cap K$,有 $\|Tx\|\geqslant\|x\|$. 又令 $\Omega_1=\{x\in X: \|x\|<r\}$, 则对于 $\forall x\in\partial\Omega_1\cap K$, 有 $0\leqslant x(t)\leqslant\|x\|=r$. 那么,由条件 B_2)及 B_3)可得

$$|(Tx)(t)|=\int_0^\omega G(t,s,x)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{p}G(t,t_k,x)I_k(x(t_k))\leqslant$$

$$\Big[\int_0^\omega G_2(t,s)h_2(s)\mathrm{d}s+n\sum_{k=1}^{p}G_2(t,t_k)\Big]\|x\|\leqslant\|x\|.$$

即对 $\forall x\in\partial\Omega_1\cap K$,有 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$. 由引理 1 可知,算子 T 在 $K\cap(\bar{\Omega}_2/\Omega_1)$ 中至少有一个不动点, 又由引理 3 即知边值问题(1)至少存在一个正解.

推论 4 若条件 H_1),H_2)成立,且存在正数 $r,R,m,n,0<r<\delta R$ 及 $[0,\omega]$ 上的非负连续函数 $h_1(t)$, $h_2(t)$,使得下列条件

B_4) $f(t,x)\leqslant h_1(t)x$, $I_k(x)\leqslant mx$, $t\in[0,\omega]$, $k=1,2,\cdots,p$, $R\leqslant x\leqslant R/\delta$;

B_5) $f(t,x)\geqslant h_2(t)x$, $I_k(x)\geqslant nx$, $t\in[0,\omega]$, $k=1,2,\cdots,p$, $r\leqslant x\leqslant r/\delta$;

B_6) $\int_0^\omega G_2(t,s)h_1(s)\mathrm{d}s+m\sum_{k=1}^{p}G_2(t,t_k)\leqslant 1$, $\int_0^\omega G_1(t,s)h_2(s)\mathrm{d}s+n\sum_{k=1}^{p}G_1(t,t_k)\geqslant 1/\delta$

成立,则边值问题(1)至少存在一个正解.

证明 与推论 1 的证明类似.

注 2 定理 2 以及推论 1,2,3,4 都相应地大大推广和改进了文献[5]中的定理 3.1.2,注解 3.1.1, 3.1.2,3.1.3 和 3.1.4 的结论.

3 例子

例 1 考虑以下系统

$$\left.\begin{aligned}&x'(t)+\frac{1+\sin t}{2}\Big(1+\frac{x(t)}{1+x(t)}\Big)x(t)=f(t,x(t)),\qquad t\in[0,1]/\{\tfrac{1}{4}\},\\&\Delta x(\tfrac{1}{4})=x(\tfrac{1}{4}^{+})-x(\tfrac{1}{4})=x(\tfrac{1}{4})/\exp(x(\tfrac{1}{4})),\\&x(\omega)=x(0).\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

其中:
$$f(t,x)=\begin{cases}0, & t\in[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{1000}],\quad x\in[0,+\infty],\\(1+\frac{1}{e^x})(x+1)(2\,000t-998), & t\in[\frac{1}{2}-\frac{1}{1000},\frac{1}{2}],\quad x\in[0,+\infty],\\(1+\frac{1}{e^x})(x+1)(-2\,000t+1002), & t\in[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{1000}],\quad x\in[0,+\infty],\\0, & t\in[\frac{1}{2}+\frac{1}{1000},1],\quad x\in[0,+\infty].\end{cases}$$

式(4)中,相对应于系统(1) $a(t,x)=\frac{1+\sin t}{2}(1+\frac{x}{1+x})$, $I(x)=\frac{x}{e^x}$, $\omega=1$, $p=1$. 可令 $a_1(t)=\frac{1+\sin t}{2}$, $a_2(t)=1+\sin t$,则有 $a_1(t)\leqslant a(t,x)\leqslant a_1(t)$.

于是,经计算可得 $K_1\approx 2.07$, $K_2\approx 4.286$, $M_1=1$, $M_2\approx 4.286$, $b_2(t)=+\infty$, $u=1$, $v=0$, $b_1(t)=$

$$\begin{cases} 0, & t\in[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{1\,000}],\\ 2\,000t-998, & t\in[\frac{1}{2}-\frac{1}{1\,000},\frac{1}{2}],\\ -2\,000t+1\,002, & t\in[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{1\,000}],\\ 0, & t\in[\frac{1}{2}+\frac{1}{1\,000},1],\end{cases}$$

则有$\int_0^1 b_1(s)\mathrm{d}s=0.002$. 那么，有$\max\limits_{t\in[0,\omega]}\left\{\int_0^\omega G_2(t,s)b_1(s)\mathrm{d}s+v\sum_{k=1}^{p}G_2(t,t_k)\right\}\leqslant\frac{M_2}{K_1-1}(\int_0^\omega b_1(s)\mathrm{d}s+v)\approx 0.008<1$，即满足推论 1 的条件．因此，该边值问题至少存在一个正解.

相对应文献[5]中的系统，方程(4)应改写为

$$x'(t)+\frac{1+\sin t}{2}x(t)=f(t,x(t))-\frac{1+\sin t}{2}\frac{x^2(t)}{1+x(t)}. \tag{5}$$

此时，方程(5)的右端函数是变号函数，故文献[5]中的所有结论的条件都不满足. 因此，文献[5]中的所有结论都无法判别该边值问题正解的存在性.

参考文献：

[1] FRABCO D, NIETO J J. Maximum principles for periodic impulsive first order problems[J]. J Comput Appl Math, 1998, 88(1): 144-159.

[2] NIETO J J. Impulsive resonance periodic problems of first order[J]. Appl Math Lett, 2002, 15(4): 489-493.

[3] NIETO J J. Basic theory for nonresonance impulsive periodic problems of first order[J]. J Math Anal Appl, 1997, 205(2): 423-433.

[4] LI Jian-li, SHEN Jian-hua. New comparison results for impulsive functional differential equations[J]. Appl Math Lett, 2010, 23: 487-493.

[5] LIU Yu-ji. Positive solutions of periodic boundary value problems for nonlinear first-order impulsive differential equations[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 70: 2106-2122.

[6] 韩飞，王全义. 具状态依赖时滞微分方程的周期正解[J]. 华侨大学学报：自然科学版，2005，26(4)：357-360.

[7] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南：山东科学技术出版社，2003：286-330.

[8] BAINOV D, SIMEONOV P S. Impulsive differential equations: Periodic solution and applications[M]. London: Longman Publishing Group, 1993.

Positive Solutions of Boundary Value Problems for Nonlinear First Order Impulsive Differential Equations

WU Li-jiao, WANG Quan-yi

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: We study the existence of positive solutions of a class of boundary value problems for nonlinear first order impulsive differential equations. By applying the cone fixed point theorem and some analysis techniques, we establish some sufficient conditions which determine the existence of positive solutions of boundary value problems for the impulsive differential equations. We extend and improve the research results of LIU Yu-ji in our results..

Keywords: boundary value problems; impulse; cone; fixed point theorem

（**责任编辑**：陈志贤　　**英文审校**：张金顺，黄心中）