文章编号： 1000-5013(2012)02-0235-06

广义 TKK 代数的一类 Boson 表示

李鸿萍

(华侨大学 数学学院，福建 泉州 362021)

摘要： 研究对应于欧式空间中非格半格 S 的 Tits-Kantor-Koecher(TKK)李代数 $\hat{g}(T(S))$ 的泛中心扩张广义 TKK 代数 $\hat{g}(T(S))$ 的一类 Boson 场表示．首先将广义 TKK 代数 $\hat{g}(T)$ 的结构等式表示为一系列形式幂级数等式，然后利用关于量子环面上 gl_n 型李代数的顶点表示及由群代数与对称代数组成的 Fock 空间，构造一组作用于 Fock 空间的顶点算子．最后，证明这些顶点算子在这 Fock 空间上给出了广义 TKK 代数 $\hat{g}(T)$ 的一个 Boson 场顶点表示.

关键词： TKK 代数；Boson 场；Jordan 代数；顶点算子表示；Fock 空间

中图分类号： O 152.5　　**文献标志码：** A

假设 $T(S)$ 是半格 $S\in \mathbf{R}^v(v\geqslant 1)$ 上的 Jordan 代数，$g(T(S))$ 是利用 Tits-Kantor-Koecher 方法[1]，且由 Jordan 代数 $T(S)$ 构造出的李代数. 因此，称 $g(T(S))$ 的泛中心扩张 $\hat{g}(T(S))$ 为 TKK 代数，而称 $\hat{g}(T(S))=\hat{g}(T(S))\oplus D$ 为广义 TKK 李代数. 本文利用文献[2]中的构造方法，在文献[3]的基础上给出广义 TKK 代数的一类 Boson 场表示．

1　广义 TKK 代数的的结构[3-4]

设 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\delta_1+\mathbf{R}\delta_2$，其中 $\delta_1=(1,0)$，$\delta_2=(0.1)$，$\delta_3=\delta_1+\delta_2\in\mathbf{R}^2$. 如果 S 是 $\mathbf{R}^2$ 中的半格，在同构意义下 $\mathbf{R}^2$ 仅有唯一的非格半格，因此可以假设半格 S 是 $\mathbf{Z}^2$ 关于 $2\mathbf{Z}^2$ 的一些陪集的并，亦可设 $S=S_0\cup S_1\cup S_2\cup S_3\in\mathbf{R}^2$，其中 $S_0=2\mathbf{Z}\delta_1+2\mathbf{Z}\delta_2$ 且 $S_i=S_0+\delta_i$，$i=1,2,3$；$\sigma_i=a_i\delta_1+b_i\delta_2$，$i=1,2$. 记 $\sigma_1\cdot\sigma_2$ 为 σ_1 和 σ_2 在 $\mathbf{R}^2$ 的内积，即 $\sigma_1\cdot\sigma_2=a_1a_2+b_1b_2$，其中 $a_i,b_i\in\mathbf{R}$.

设 x^σ 为对应于 $\sigma\in S$ 的记号，则有 Jordan 代数 $T=T(S)=\bigoplus\limits_{\sigma\in\mathbf{Z}^2}T^\sigma$，其中 $T^\sigma=\mathbf{C}x^\sigma$，$\sigma\in\mathbf{Z}^2$，显然，Jordan 代数 $T(S)$ 为 $\mathbf{Z}^2$-分次.

由文献[3]可知，TKK 代数 $\hat{g}(T(S))$ 是由元素 $x_\pm\otimes x^\sigma$，$h\otimes x^\sigma$，$\langle x^{\delta_1},x^{\rho-\delta_1}\rangle$ 和 $\langle x^{\delta_2},x^{\tau-\delta_2}\rangle$，$\sigma\in S$，$\rho\in S_0\cup S_1\cup S_2\cup S_3$，$\tau\in S_0\cup S_1$，$x_\pm$，$h\in sl_2(\mathbf{C})$ 张成的. 因此，记

$$\left.\begin{aligned}
y(\sigma)=y(m,n):&=\begin{cases} y\otimes t^\sigma, & \sigma\in S_0\cup S_1\cup S_2,\\ -\sqrt{-1}\,y\otimes t^\sigma, & \sigma\in S_3,\end{cases}\\
\beta(\sigma)=\beta(m,n):&=\begin{cases} 0, & \sigma\in S_0,\\ 2\sqrt{-1}\langle x^{\delta_2},x^{\sigma-\delta_2}\rangle, & \sigma\in S_1,\\ -2\sqrt{-1}\langle x^{\delta_1},x^{\sigma-\delta_1}\rangle, & \sigma\in S_2,\\ 2\langle x^{\delta_1},x^{\sigma-\delta_1}\rangle, & \sigma\in S_3,\end{cases}\\
C_i(\sigma)=C_i(m,n):&=\begin{cases}\langle x^{\delta_i},x^{\sigma-\delta_i}\rangle, & \sigma\in S_0,\\ 0, & \sigma\notin S_0.\end{cases}
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

上式中：$h\in sl_2(\mathbf{C})$，$\sigma=m\delta_1+n\delta_2$，$i=1,2$；$m,n\in\mathbf{Z}$.

收稿日期： 2011-07-08

通信作者： 李鸿萍(1979-)，女，讲师，主要从事 Kac-Moody 李代数的研究. E-mail：lhp306@hqu.edu.cn.

基金项目： 华侨大学科研基金资助项目(10HZR24)

利用记号(1)来定义下列关于 z 的形式幂级数,其系数为 $\hat{g}(T(S))$ 中元素:

$$\left.\begin{aligned} C_i(z,m) &= \sum_{j\in\mathbf{Z}} C_i(j,m)z^{-j}, \\ x_\pm(z,m) &= \sum_{j\in\mathbf{Z}} x_\pm(j,m)z^{-j}, \\ h(z,m) &= \sum_{j\in\mathbf{Z}} h(j,m)z^{-j}, \\ \beta(z,m) &= \sum_{j\in\mathbf{Z}} \beta(j,m)z^{-j}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式(2)中:$m\in Z$,$i=1,2$. 注意到:当 $j\delta_1+m\delta_2\notin S_0$ 时,$C_i(j,m)=0$;而当 $j\delta_1+m\delta_2\in S_0$ 时,$\beta(j,m)=0$. 设 $\delta(z)=\sum_{j\in\mathbf{Z}} z^j$ 且 $(D\delta)=\sum_{j\in\mathbf{Z}} jz^j$,由文献[3]可得如下结构等式.

命题 1[3] TKK 代数 $\hat{g}(T(S))$ 的李关系完全由下列形式幂级数等式决定. 即

R1)

$$[x_+(z_1,2m),x_-(z_2,2n)] = h(z_2,2m+2n)\delta(\frac{z_2}{z_1}) + 2C_1(z_2,2m+2n)(D\delta)(\frac{z_2}{z_1}) + 4mC_2(z_2,2m+2n)\delta(\frac{z_2}{z_1}), \tag{3}$$

$$[x_+(z_1,2m),x_-(z_2,2n-1)] = \frac{1}{2}h(z_2,2m+2n-1)(\delta(\frac{z_2}{z_1}) + \delta(-\frac{z_2}{z_1})) + \frac{1}{2}\beta(z_2,2m+2n-1)(\delta(\frac{z_2}{z_1}) - \delta(-\frac{z_2}{z_1})), \tag{4}$$

$$[x_+(z_1,2m+1),x_-(z_2,2n)] = \frac{1}{2}h(z_2,2m+2n+1)(\delta(\frac{z_2}{z_1}) + \delta(-\frac{z_2}{z_1})) - \frac{1}{2}\beta(z_2,2m+2n+1)(\delta(\frac{z_2}{z_1}) - \delta(-\frac{z_2}{z_1})), \tag{5}$$

$$[x_+(z_1,2m+1),x_-(z_2,2n-1)] = \frac{1}{2}h(z_2,2m+2n) + \frac{1}{2}h(-z_2,2m+2n) + (4m+2)C_2(z_2,2m+2n) - \beta(z_2,2m+2n))(\delta(-\frac{z_2}{z_1}) + 2C_2(z_2,2m+2n)(D\delta)(-\frac{z_2}{z_1}), \tag{6}$$

$$[x_\pm(z_1,m),x_\pm(z_2,2n)] = 0. \tag{7}$$

R2)

$$[h(z_1,2m),x_\pm(z_2,2n)] = 2x_\pm(z_2,2m+2n)\delta(\frac{z_2}{z_1}), \tag{8}$$

$$[h(z_1,2m),x_\pm(z_2,2n-1)] = \pm x_\pm(z_2,2m+2n-1)(\delta(\frac{z_2}{z_1}) + \delta(-\frac{z_2}{z_1})), \tag{9}$$

$$[h(z_1,2m+1),x_\pm(z_2,2n)] = \pm x_\pm(z_2,2m+2n+1)(\delta(\frac{z_2}{z_1}) + \delta(-\frac{z_2}{z_1})), \tag{10}$$

$$[h(z_1,2m+1),x_\pm(z_2,2n-1)] = \pm(x_\pm(z_2,2m+2n) + (-z_2,2m+2n))\delta(-\frac{z_2}{z_1}). \tag{11}$$

R3)

$$[\beta(z_1,2m),y(z_2,2n)] = 0, \tag{12}$$

$$[\beta(z_1,2m),y(z_2,2n-1)] = y(z_2,2m+2n-1)(\delta(\frac{z_2}{z_1}) - \delta(-\frac{z_2}{z_1})), \tag{13}$$

$$[\beta(z_1,2m+1),y(z_2,2n)] = -y(z_2,2m+2n-1)(\delta(\frac{z_2}{z_1}) - \delta(-\frac{z_2}{z_1})), \tag{14}$$

$$[\beta(z_1,2m+1),y(z_2,2n-1)] = (y(-z_2,2m+2n) - y(z_2,2m+2n)\delta(-\frac{z_2}{z_1}). \tag{15}$$

其中:$y\in sl_2(\mathbf{C})$.

R4) $$[h(z_1,2m),h(z_2,2n)] = 4C_1(z_2,2m+2n)(D\delta)(\frac{z_2}{z_1}) + 8mC_2(z_2,2m+2n)\delta(\frac{z_2}{z_1}), \tag{16}$$

$$[h(z_1,2m),h(z_2,2n-1)]=\beta(z_2,2m+2n-1)(\delta(\frac{z_2}{z_1})-\delta(-\frac{z_2}{z_1})),\tag{17}$$

$$[h(z_1,2m+1),h(z_2,2n-1)]=((8m+4)C_2(z_2,2m+2n)-2\beta(z_2,2m+2n))\delta(-\frac{z_2}{z_1})+4C_1(z_2,2m+2n)(D\delta)(-\frac{z_2}{z_1}).\tag{18}$$

R5)
$$[\beta(z_1,2m),\beta(z_2,2n)]=2C_1(z_2,2m+2n)((D\delta)(\frac{z_2}{z_1})-(D\delta)(-\frac{z_2}{z_1}))+4mC_2(z_2,2m+2n)\delta(\frac{z_2}{z_1})-\delta(-\frac{z_2}{z_1}),\tag{19}$$

$$[\beta(z_1,2m),\beta(z_2,2n-1)]=\beta(z_2,2m+2n-1)(\delta(\frac{z_2}{z_1})-\delta(-\frac{z_2}{z_1})),\tag{20}$$

$$[\beta(z_1,2m+1),\beta(z_2,2n-1)]=4C_1(z_2,2m+2n)(D\delta)(-\frac{z_2}{z_1})+((8m+4)C_2(z_2,2m+2n)-2\beta(z_2,2m+2n))\delta(-\frac{z_2}{z_1}).\tag{21}$$

R6)
$$[C_i(z_1,2m),\hat{g}(T(S))]=0,\text{且 } D_zC_1(z,2n)=2nC_2(z,2n).\tag{22}$$

其中：$m,n\in\mathbf{Z},i=1,2;D_z=z\dfrac{\partial}{\partial z}$.

将 $g(T(S))$ 的度导子 $d_i(i=1,2)$[3] 扩张到 $\hat{g}(T(S))$，则其外导子集合为 $\{x^\sigma d_i\,|\,\sigma\in S_0,i=1,2\}$. 记

$$d(\sigma)=d(m,n):=\begin{cases}x^\sigma d_2, & \sigma\in S_0,\\ 0, & \sigma\notin S_0.\end{cases}\tag{23}$$

其中：$\sigma=m\delta_1+n\delta_2,m,n\in\mathbf{Z}$.

设 $\mathbf{D}$ 是由 $\{d(m,n),m,n\in 2\mathbf{Z}\}$ 为基元张成的向量空间.

定义 1　称 $\tilde{g}(T(S))=\hat{g}(T(S))\oplus\mathbf{D}$ 为广义 TKK 李代数，其李运算包含(R1)～(R6)及如下关系.

R7)
$$\begin{cases}[d(i,m),x_\pm(j,n)]=nx_\pm(i+j,m+n),\\ [d(i,m),h(j,n)]=nh(i+j,m+n),\\ [d(i,m),\beta(j,n)]=n\beta(i+j,m+n),\\ [d(i,m),C_1(j,n)]=nC_1(i+j,m+n).\end{cases}$$

R8)
$$[d(i,m),C_2(j,n)]=(m+n)C_2(i+j,m+n)+iC_1(i+j,m+n),$$

R9)
$$[d(i,m),d(j,n)]=(n+m)d(i+j,m+n)-mnC_1(i+j,m+n)-2mmC_2(i+j,m+n),$$

设 $d(m,n)$ 对应的形式幂级数 $d(z,n)=\sum\limits_{m\in 2\mathbf{Z}}d(m,n)z^{-m},n\in 2\mathbf{Z}$.

定理 1　广义 TKK 李代数 $\tilde{g}(T(S))$ 的结构关系为满足式(3)～(22)及以下李关系．即

$$[d(z_1,2m),x_\pm(z_2,2n)]=nx_\pm(z_2,2m+2n)(\delta(\frac{z_2}{z_1})+\delta(-\frac{z_2}{z_1})),\tag{24}$$

$$[d(z_1,2m),x_\pm(z_2,2n+1)]=\frac{1}{2}(2n+1)x_\pm(z_2,2m+2n+1)(\delta(\frac{z_2}{z_1})+\delta(-\frac{z_2}{z_1})),\tag{25}$$

$$[d(z_1,2m),h(z_2,2n)]=nh(z_2,2m+2n)(\delta(\frac{z_2}{z_1})+\delta(-\frac{z_2}{z_1})),\tag{26}$$

$$[d(z_1,2m),h(z_2,2n+1)]=\frac{1}{2}(2n+1)h(z_2,2m+2n+1)(\delta(\frac{z_2}{z_1})+\delta(-\frac{z_2}{z_1})),\tag{27}$$

$$[d(z_1,2m),\beta(z_2,2n)]=\beta(z_2,2m+2n)(\delta(\frac{z_2}{z_1})+\delta(-\frac{z_2}{z_1})),\tag{28}$$

$$[d(z_1,2m),\beta(z_2,2n+1)]=\frac{1}{2}(2n+1)\beta(z_2,2m+2n+1)(\delta(\frac{z_2}{z_1})+\delta(-\frac{z_2}{z_1})),\tag{29}$$

$$[d(z_1,2m),C_1(z_2,2n)]=nC_1(z_2,2m+2n)(\delta(\frac{z_2}{z_1})+\delta(-\frac{z_2}{z_1})),\tag{30}$$

$$[d(z_1,2m),C_2(z_2,2n)]=(m+n)C_2(z_2,2m+2n)(\delta(\frac{z_2}{z_1})+\delta(-\frac{z_2}{z_1}))+$$
$$\frac{1}{2}C_1(z_2,2m+2n)((D\delta)(\frac{z_2}{z_1})+(D\delta)(-\frac{z_2}{z_1})),\tag{31}$$
$$[d(z_1,2m),d(z_2,2n)]=(n-m)d(z_2,2m+2n)(\delta(\frac{z_2}{z_1})+\delta(-\frac{z_2}{z_1}))-$$
$$2mnC_1(z_2,2m+2n)((D\delta)(\frac{z_2}{z_1})+(D\delta)(-\frac{z_2}{z_1}))-$$
$$4mnC_2(z_2,2m+2n)(\delta(\frac{z_2}{z_1})+\delta(-\frac{z_2}{z_1})).\tag{32}$$

对 $\forall m,n\in\mathbf{Z},i=1,2$. 其中 $D_z=z\frac{\partial}{\partial z}$.

证明：可利用形式幂级数的定义及定义 1 直接验证.

2 Fock 空间与主要定理

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,c,d$ 为不同符号，定义一个秩为 4 的格 $\Gamma_0=\mathbf{Z}\varepsilon_1\oplus\mathbf{Z}\varepsilon_2\oplus\mathbf{Z}c\oplus\mathbf{Z}d$，并定义其非退化对称双线性型 $(,)$ 为

$$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\delta_{i,j},\qquad (c,d)=4,\qquad (\varepsilon_i,c)=(\varepsilon_j,d)=(c,c)=(d,d)=0.\tag{33}$$

其中：$i,j=1,2$. 将 $(,)$ 线性扩充到 $H:=\mathbf{C}\otimes\mathbf{Z}\Gamma_0$，设 $\varepsilon_i(m),c(2m),d(2m)$ 分别为 ε_i,c,d 的线性对应，$m\in\mathbf{Z}$. 定义一个李代数 $H=\mathrm{span}_C\{\varepsilon_i(m),c(2m),d(2m),c_0\mid i=1,2,m\in\mathbf{Z}\}$，则李运算为

$$\left.\begin{array}{ll}[\varepsilon_i(m),\varepsilon_j(n)]=m(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\delta_{m+n,0}c_0, & [c(2m),d(2n)]=2m(c,d)\delta_{m+n,0}c_0,\\ [\varepsilon_i(m),c(2n)]=[\varepsilon_i(m),d(2n)]=[c(2m),d(2n)]=[d(m),d(2n)]=0. & \end{array}\right\}\tag{34}$$

其中：c_0 是中心元，简记 $c(2m+1)=0=d(2m+1)$.

设 $H^{\pm}=\mathrm{span}_C\{\varepsilon_i(m),c(2m),d(2m),c_0\mid i=1,2,m\in\mathbf{Z}_{\pm}\}$，则 $\hat{H}=H^{+}+\mathbf{C}c_0+H^{-}$ 成为 H 的一个 Heisenberg 子代数.

设 $S(H^-)$ 为交换代数 H^- 的对称代数，设 $\mathbf{C}[\Gamma_0]=\bigoplus_{\alpha\in\Gamma_0}\mathbf{C}e^{\alpha}$ 为扭的群代数，其基元为 $e^{\alpha}(\forall\alpha\in\Gamma_0)$，且 $e^{\alpha}e^{\beta}=\tau(\alpha,\beta)e^{\alpha+\beta}$，$\forall\alpha,\beta\in\Gamma_0$，其中 2-上循环 $\tau:\Gamma_0\times\Gamma_0\to\{\pm1\}$ 定义如下：

$$\tau(x,y)=\begin{cases}-1, & x=\varepsilon_2,y=\varepsilon_1,\\ 1, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中：$x,y\in\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,c,d\}$，则扩充到 $\Gamma_0\times\Gamma_0$ 定义为

$$\tau(m_1\varepsilon_1+m_2\varepsilon_2+m_3c+m_4d,n_1\varepsilon_1+n_2\varepsilon_2+n_3c+n_4d)=(-1)^{m_2\cdot n_1}.$$

其中：$m_i,n_i\in\mathbf{Z},i=1,2,3,4$.

定义 Fock 空间为

$$V=S(H^-)\otimes\mathbf{C}[\Gamma_0].\tag{35}$$

下面定义一些作用于 Fock 空间的算子：

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha(k).u\otimes e^{\beta}=(\alpha(k)u)\otimes e^{\beta}, & k\in\mathbf{Z}_-,\\ \varepsilon_i(k).u\otimes e^{\beta}=k(\frac{\partial}{\partial\varepsilon_i(-k)}u)\otimes e^{\beta}, & k\in\mathbf{Z}_+,\\ c(k).u\otimes e^{\beta}=k(\frac{\partial}{\partial\varepsilon_i(-k)}u)\otimes e^{\beta}, & k\in 2\mathbf{Z}_+,\\ d(k).u\otimes e^{\beta}=k(\frac{\partial}{\partial\varepsilon_i(-k)}u)\otimes e^{\beta}, & k\in 2\mathbf{Z}_+,\\ \alpha(0).u\otimes e^{\beta}=(\alpha,\beta)u\otimes e^{\beta}; & \\ c_0.u\otimes e^{\beta}=u\otimes e^{\beta}; & \\ e^{\gamma}.u\otimes e^{\beta}=\tau(\gamma,\beta)u\otimes e^{\gamma+\beta}. & \end{array}\right\}\tag{36}$$

其中：$\forall\alpha\in H$；$\gamma,\beta\in\Gamma_0$，$i=1,2$；$u\otimes e^{\beta}\in V$.

对 $\forall \alpha \in \Gamma_0$，采用文献[5]中的记号，定义

$$\alpha(z)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\alpha(k)z^{-k}\in(\mathrm{End}\,V)[[z,z^{-1}]],$$

$$E^{\pm}(\alpha,z)=\exp\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}_{\pm}}\frac{\alpha(k)}{k}z^{-k}\Big)\in(\mathrm{End}\,V)[[z,z^{-1}]].$$

另外，定义算子

$$z^{\alpha}.\,u\otimes \mathrm{e}^{\beta}=z^{\alpha,\beta}u\otimes \mathrm{e}^{\beta},\qquad \forall\,\alpha,\beta\in\Gamma_0,\quad u\otimes \mathrm{e}^{\beta}\in V. \tag{37}$$

则 $\forall\, 0\neq a\in\mathbf{C}$，有 $a^{\alpha}.\,u\otimes \mathrm{e}^{\beta}=a^{\alpha,\beta}u\otimes \mathrm{e}^{\beta}$. 为方便，记 $c_0(n)=\delta_{n,0}c_0$. 对 $\alpha\in\Gamma_0$，$\beta\in\Gamma_1:=\mathbf{Z}c\oplus\mathbf{Z}d\oplus\mathbf{Z}c_0$，定义顶点算子为

$$X_{\beta}(\alpha,z)=E^{-}(-\alpha,z)\beta(z)\mathrm{E}^{+}(-\alpha,z)\mathrm{e}^{\alpha}z^{\alpha}z^{(\alpha,\alpha)/2}. \tag{38}$$

其中：$X_{c_0}(\alpha,z)$展开成形式幂级数，$X_{c_0}(\alpha,z)=\sum_{k\in\mathbf{Z}+(\alpha,\alpha)/2}x_k(\alpha)z^{-k}$；$x_k(\alpha)\in\mathrm{End}\,V$，$k\in\mathbf{Z}+(\alpha,\alpha)/2$.

从文献[6]中可知，若$(\alpha,\alpha)=1$，算子$\{x_k(\alpha),x_k(-\alpha)\mid k\in\mathbf{Z}+1/2\}$生成一个 Clifford 代数，其运算关系为$\{x_k(\alpha),x_l(-\alpha)\}=\delta_{k,l}$，$\{x_k(\alpha),x_l(\alpha)\}=0$，$\{x_k(-\alpha),x_l(-\alpha)\}=0$. 其中：$\forall\, k,l\in\mathbf{Z}+1/2$.

关于 Clifford 代数的结构，定义正规序为

$$:x_k(\varepsilon_i)x_{-l}(-\varepsilon_j):=x_k(\varepsilon_i)x_{-l}(-\varepsilon_j)-\delta_{i,j}\delta_{k,l}\,\theta(k). \tag{39}$$

对 $\forall\, k,l\in\mathbf{Z}+1/2$ ，$i,j=1,2$，若 $k<0,\theta(k)=0$；若 $k>1,\theta(k)=1$. 于是，由文献[3]中的证明可以得到如下一个引理 .

引理 1[3]　$\forall\, i=1,2,a\in C^{\times}$，有

$$:X_{c_0}(\varepsilon_i,z)X_{c_0}(-\varepsilon_j,az):=\begin{cases}\tau(\varepsilon_i,\varepsilon_j)z^{1/2}(az)^{1/2}\mathrm{e}^{(\varepsilon_i-\varepsilon_j)}z^{\varepsilon_i}(az)^{-\varepsilon_j}E^{-}(-\varepsilon_i,z)\times & \\ \qquad E^{-}(\varepsilon_j,az)E^{+}(-\varepsilon_i,z)E^{+}(\varepsilon_j,az), & i\neq j,\\ \varepsilon_i(z), & i=j,\quad a=1,\\ \dfrac{a^{1/2}}{1-a}(a^{-\varepsilon_i}E^{-}(-\varepsilon_i,z)E^{-}(\varepsilon_j,az)\times & \\ \qquad E^{+}(-\varepsilon_i,z)E^{+}(\varepsilon_j,az)-1), & i=j,\quad a\neq 1.\end{cases}$$

定义 2　对 $a\in C^{\times}$，$i,j=1,2$ ，定义

$$X_{i,j}(a,z)=:X_{c_0}(\varepsilon_i,z)Xc_0(-\varepsilon_j,az):,$$

则 $X_{i,j}(a,z)$为作用在 Fock 空间 $V=S(H^{-})\otimes\mathbf{C}[\Gamma_0]$上的顶点算子.

定理 2　Fock 空间 $V=S(H^{-})\otimes\mathbf{C}[\Gamma_0]$通过顶点算子

$$\left.\begin{aligned}
d(z,2n)&\mapsto\frac{1}{4}X_d(2nc,z),\\
C_1(z,2n)&\mapsto\frac{1}{2}X_{c_0}(2nc,z),\\
C_2(z,2n)&\mapsto\frac{1}{2}X_c(2nc,z),\\
x_{+}(z,2n)&\mapsto X_{1,2}(1,z)X_{c_0}(2nc,z),\\
x_{+}(z,2n+1)&\mapsto X_{1,2}(-1,z)X_{c_0}((2n+1)c,z),\\
x_{-}(z,2n)&\mapsto X_{1,2}(1,z)X_{c_0}(2nc,z),\\
x_{-}(z,2n+1)&\mapsto X_{1,2}(-1,z)X_{c_0}((2n+1)c,z),\\
h(z,2n)&\mapsto(X_{1,1}(1,z)-X_{2,2}(1,z))X_{c_0}(2nc,z),\\
h(z,2n+1)&\mapsto(X_{1,1}(-1,z)-X_{2,2}(-1,z))X_{c_0}((2n+1)c,z),\\
\beta(z,2n)&\mapsto\frac{1}{2}(X_{1,1}(1,z)-X_{1,1}(1,-z)+X_{2,2}(1,z)-X_{2,2}(1,-z))X_{c_0}(2nc,z),\\
\beta(z,2n+1)&\mapsto(X_{11}(-1,z)+X_{2,2}(-1,z)+\sqrt{-1})X_{c_0}((2n+1)c,z),
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

给出了广义 TKK 代数的一类表示 . 其中：$n\in\mathbf{Z}$.

引理 2[5]　设 z_1,z_2 为形式变量，$Y(z_1,z_2)$为系数属于某向量空间的形式幂级数. 若在 Frenkel-

Lepowsky-Meurman 意义下极限 $\lim_{z_1 \to z_2} Y(z_1, z_2)$存在,记 $D_z = z \frac{\partial}{\partial z}$,则有

$$Y(z_1, z_2)\delta(a \frac{z_1}{z_2}) = Y(az_2, z_2)\delta(a \frac{z_2}{z_1}),$$

$$Y(z_1, z_2)(D\delta)(a \frac{z_1}{z_2}) = Y(az_2, z_2)(D\delta)(a \frac{z_2}{z_1}) + (D_z Y)(z_1, z_2)\delta(a \frac{z_2}{z_1}).$$

其中:$a \in \mathbf{C}^*$.

定理 2 的证明:只需证明顶点算子(40)满足等式(3)~(22)及等式(24)~(32)即可.其中等式(3)~(22)在文献[3]中已证,在这里不详细验证,可利用算子的定义、引理 2 及以下的简单结论验证.

设 A, B 为作用于某向量空间的线性算子,如果交换子$[A, B]$与 A, B 都可交换,则有

$$[A, e^B] = [A, B]e^B, \qquad e^A e^B = e^B e^A e^{[A,B]}.$$

可参阅文献[3-4]验证这些等式.

参考文献:

[1] JACOBSON N. Structure and representation of Jordan algebras[M]. New York: Amer Math Soc Colloq Publ, 1968.

[2] STEPHEN B, GAO Y, TAN S. A unified view of some vertex operator constructions[J]. Israel Journal of Math, 2003, 134(1): 29-60.

[3] MAO X, TAN S. Vertex operator representations for TKK algebras[J]. J Algebra, 2007, 308(2): 704-733.

[4] TAN S. TKK algebras and vertex operator representations[J]. J Algebra, 1999, 211(1): 298-342.

[5] FRENKEL I B, LEPOWSKY J, MEURMAN A. Vertex operator algebras and the monster[M]. Boston: Academic Press, 1989.

[6] FRENKEL I B. Representations of affine Lie algebras, Hecke modular forms and Korteweg-De Vries type equation in a simple quantum torus with two variables[J]. Contemporary Mathematics, 1999, 248: 39-67.

A Class of Boson Representations of the Extended TKK Algebra

LI Hong-ping

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, we study the representation of the extended Tits-Kantor-Koecher (TKK) algebra which is the universal central extension of the TKK Lie algebra obtained from the Jordan algebra which the non-lattice semi-lattice in the Euclidean space. The structure of the Lie algebra in terms of formal power series identities was constructed. The construction is based on a result from the vertex construction of the type Lie algebra over the quantum torus. Finally, it is proved that the vertex operators satisfying all the power series identities gives a Bosonic vertex representation of the Extended TKK algebra in the Fock space.

Keywords: TKK algebra; Boson representations; Jordan algebra; vertex operator representation; Fock space

(**责任编辑**:黄晓楠 **英文审校**:黄心中,张金顺)