第 33 卷 第 2 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 33 No. 2
2012 年 3 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Mar. 2012

文章编号： 1000-5013(2012)02-0229-03

$\tilde{\rho}$ 混合随机变量列 L_p 收敛性

郭津，吴群英，夏宝飞

(桂林理工大学 理学院，广西 桂林 541004)

摘要： 设 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是 $\tilde{\rho}$ 混合随机变量序列，$\{a_{n,k};1\leqslant k\leqslant n\}$ 是实数阵列，利用矩不等式和截尾方法，研究 $\sum_{k=1}^{n} a_{n,k}X_k$ 的 L_p 收敛性，所获的结论推广和改进了前人的相关结果.

关键词： $\tilde{\rho}$ 混合；随机变量；矩不等式；截尾方法；L_p 收敛

中图分类号： O 212.1　　**文献标志码：** A

1 预备知识

设 $\{X_i;i\in N\}$ 是概率空间 $\{\Omega,B,P\}$ 上的随机变量序列，$F_s=\sigma(X_i;i\in S\subset N)$ 为 σ 域，在 B 中给定 σ 域 F，R，$L_p(B)$ 为所有 B 可测且 p 阶矩有限的随机变量全体，令

$$\rho(F,R)=\sup\{|\operatorname{corr}(X,Y)|;\ X\in L_2(F),\ Y\in L_2(R)\},$$

其中：$\operatorname{corr}(X,Y)=\dfrac{E(X\cdot Y)-E(X)E(Y)}{\sqrt{\operatorname{var}X\cdot\operatorname{var}Y}}$ 为相关系数，X，Y 为随机变量乘，E 为期望．对于 $k\geqslant 0$，文献[1]引入的相关系数为

$$\tilde{\rho}(k)=\sup\{\rho(F_S,F_T);\text{有限子集 } S,T\subset N,\text{且 } \operatorname{dist}(S,T)\geqslant k\}. \tag{1}$$

显然，$0\leqslant\tilde{\rho}(k+1)\leqslant\tilde{\rho}(k)\leqslant 1$，且 $\tilde{\rho}(0)=1$.

定义 1 设随机变量序列 $\{X_i;i\in N\}$，若存在 $k\in N$，使 $\tilde{\rho}(k)<1$，则称 $\{X_i;i\in N\}$ 是 $\tilde{\rho}$ 混合序列. $\tilde{\rho}$ 混合与通常的 ρ 混合有一定的类似，但并不相同，它们互不包含. 事实上，在通常的 ρ 混合系数 $\rho(k)$ 中，式(1)的 S，T 分别是 $[1,n]$ 和 $[n+k,\infty]$ 中的子集；另外，$\tilde{\rho}$ 混合只要求存在某 $k\in N$，使 $\tilde{\rho}(k)<1$，在这一点上要比 ρ 混合的要求 $\rho(n)\to 0$，$n\to\infty$ 弱得多，因此，$\tilde{\rho}$ 混合是一类极为广泛的相依混合序列，对其进行研究是很有价值的．

自文献[1]引入 $\tilde{\rho}$ 混合的概念以来，已经引起许多学者的关注与兴趣，并取得了许多研究成果[2-4]，如文献[3]给出了 $\tilde{\rho}$ 混合序列的一些强收敛性质；文献[4]中给出了 $\tilde{\rho}$ 混合序列的重对数律. 但是有关 $\tilde{\rho}$ 混合随机变量序列的平均收敛的研究并不多．本文利用 $\tilde{\rho}$ 混合序列的矩不等式[5]，并参考文献[6-7]，推广了 $\tilde{\rho}$ 混合序列平均收敛.

定义 2 称随机序列 $\{X_k;k\geqslant 1\}$ 关于 $\{|a_{n,k}|;1\leqslant k\leqslant n,n\in N\}$ 一致可积[8]，若

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{n\in N}\sum_{k=1}^{n}|a_{n,k}|E|X_k|I_{(|X_k|\geqslant x)}=0; \tag{2}$$

则称随机序列 $\{X_k;k\geqslant 1\}$ 关于 $\{|a_{n,k}|;1\leqslant k\leqslant n,n\in N\}$ 阶一致可积，若

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{n\in N}\sum_{k=1}^{n}|a_{n,k}|^pE|X_k|^pI_{(|X_k|\geqslant x)}=0. \tag{3}$$

式(3)的相关条件为

收稿日期： 2011-10-19

通信作者： 吴群英(1961-)，女，教授，主要从事概率统计的研究. E-mail：wqy666@glite.edu.cn.

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11061012)；广西自然科学基金资助项目(2010GXNSFA013120)；广西研究生教育创新计划资助项目(2010105960202M32)

$$E\mid X_k\mid^p I_{(\mid X_k\mid\geqslant x)}=(\int_0^{x^p}+\int_{x^p}^{\infty})P(\mid X_k\mid^p I_{(\mid X_k\mid\geqslant x)}>t)\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^{x^p}P(\mid X_k\mid\geqslant x)\mathrm{d}t+\int_{x^p}^{\infty}P(\mid X_k\mid^p>t)\mathrm{d}t=$$

$$x^pP(\mid X_k\mid\geqslant x)+\int_{x^p}^{\infty}P(\mid X_k\mid^p>t)\mathrm{d}t.$$

由此可知,式(3)等价于

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{n\in N}\sum_{k=1}^{n}\mid a_{n,k}\mid^p x^p E(\mid X_k\mid\geqslant x)=0,\tag{4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{n\in N}\sum_{k=1}^{n}\mid a_{n,k}\mid^p\int_{x^p}^{\infty}P(\mid X_k\mid^p>t)\mathrm{d}t=0.\tag{5}$$

2 基本引理

引理1[5] 设$\{X_k;k\geqslant1\}$为$\tilde{\rho}$混合序列$EX_i=0$,$E|X_i|^p<\infty$,$0<p\leqslant2$,则存在仅与p有关的正常数c,使得对所有$n\geqslant1$,有

$$E\mid\sum_{k=1}^{n}X_i\mid^p\leqslant c\sum_{k=1}^{n}E\mid X_i\mid^p.\tag{6}$$

引理2[6] 设$\{X_n;n\geqslant1\}$是$\tilde{\rho}$随机变量序列,$\{|a_{n,k}|;1\leqslant k\leqslant n,n\in N\}$是实数阵列,$p>0$,若式(4)成立,且

$$a_n=(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mid a_{n,k}\mid)^{-1}\to\infty,\qquad n\to\infty,\tag{7}$$

则对$\forall\beta>p$,有

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mid a_{n,k}\mid^\beta E\mid X_k\mid^\beta I_{(\mid X_k\mid\leqslant a_n)}=0.\tag{8}$$

记$S_n\triangleq\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}X_k$,$a_{n,k}^{+}\triangleq\max(a_{n,k},0)$,$a_{n,k}^{-}\triangleq\max(-a_{n,k},0)$,一律以$c$记与$n$无关的常数.

3 主要结果与证明

定理 设$\{X_n;n\geqslant1\}$是$\tilde{\rho}$混合随机变量序列,$\{a_{n,k};1\leqslant k\leqslant n,n\in N\}$是实数阵列,当$1<p<2$时,式(3)和式(7)成立,则

$$(S_n-ES_n)\xrightarrow{L_p}0.\tag{9}$$

证明 因为$a_{n,k}=a_{n,k}^{+}-a_{n,k}^{-}$,$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}^{+}X_k-\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}^{-}X_k\triangleq S_{n,1}-S_{n,2}$,而$S_{n,1}$与$S_{n,2}$的$L_p$收敛性质完全类似,故只需讨论$S_{n,1}$的情形即可.为讨论方便,不失一般性,设$a_{n,k}>0$,$1\leqslant k\leqslant n\in N$,对$X_k$截尾,$1\leqslant k\leqslant n$,记$Y_k=X_kI_{(\mid X_k\mid<a_n)}$,$Z_k=X_k-Y_k=X_kI_{(\mid X_k\mid\geqslant a_n)}$,并记$T_n=\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}Y_k$,$U_n=\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}Z_k$,则$S_n=U_n+T_n$.

因为$|S_n-ES_n|=|U_n-EU_n+T_n-ET_n|\leqslant|U_n-EU_n|+|T_n-ET_n|\triangleq I_{1,n}-I_{2,n}$,所以要证式(9)成立,只需证$I_{1,n}\xrightarrow{L_p}0$,$I_{2,n}\xrightarrow{L_p}0$.

由引理1,C_r不等式和式(3),可得

$$E\mid I_{1,n}\mid^p=E\mid U_n-EU_n\mid^p=E\mid\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}(Z_k-EZ_k)\mid^p\leqslant c\sum_{k=1}^{n}\mid a_{n,k}\mid^pE\mid Z_k\mid^p=$$

$$c\sum_{k=1}^{n}\mid a_{n,k}\mid^pE\mid X_k\mid^pI_{(\mid X_k\mid\geqslant a_n)}\leqslant c\sup_{n\in N}\sum_{k=1}^{n}\mid a_{n,k}\mid^pE\mid X_k\mid^pI_{(\mid X_k\mid\geqslant a_n)}.\tag{10}$$

因$\forall\varepsilon>0$,故由式(3),即$\lim\limits_{x\to\infty}\sup\limits_{n\in N}\sum_{k=1}^{n}\mid a_{n,k}\mid^pE\mid X_k\mid^pI_{(\mid X_k\mid\geqslant x)}=0$,$\exists M>0$,使

$$\sup_{n\in N}\sum_{k=1}^{n}|a_{n,k}|^pE|X_k|^pI_{(|X_k|\geqslant M)}<\varepsilon. \tag{11}$$

又因为 $a_n\to\infty$，所以对上述找到的 M，$\exists M$，使当 $n>N$ 时，有 $a_n>M$. 因此，由式(10)和式(11)可得

$$E|I_{1,n}|^p\leqslant c\sup_{n\in N}\sum_{k=1}^{n}|a_{n,k}|^pE|X_k|^pI_{(|X_k|\geqslant a_n)}\leqslant$$

$$c\sup_{n\in N}\sum_{k=1}^{n}|a_{n,k}|^pE|X_k|^pI_{(|X_k|\geqslant M)}<\varepsilon. \tag{12}$$

所以 $E|I_{1,n}|^p\to 0$，$n\to\infty$，即 $I_{1,n}\xrightarrow{L_p}0$.

以下证明 $I_{2,n}\xrightarrow{L_p}0$. 根据引理 1，可得

$$EI_{2,n}^2=E|T_n-ET_n|^2=E|\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}(Y_k-EY_k)|^2\leqslant$$

$$c\sum_{k=1}^{n}|a_{n,k}|^2EY_k^2=c\sum_{k=1}^{n}|a_{n,k}|^2EX_k^2I_{(|X_k|\geqslant a_n)}.$$

再由引理 2，$1<p<2$，令 $\beta=2$，可得

$$\sum_{k=1}^{n}|a_{n,k}|^2EX_k^2I_{(|X_k|<a_n)}\to 0,\qquad n\to\infty.$$

即 $I_{2,n}\xrightarrow{L_p}0$，$n\to\infty$. 而 $p<2$，所以 $I_{2,n}\xrightarrow{L_p}0$，$n\to\infty$. 定理得证.

参考文献：

[1] BRADLEY R C. Equivalent mixing conditions for random fields[J]. The Annals of Probability，1993，21(4)：1921-1926.

[2] BRADLEY R C. On the spectral density and asymptotic normality of weakly dependent random fields[J]. Theorem Probably，1992，5(2)：355-374.

[3] WU Qun-ying，JIANG Yuan-ying. Some strong limit theorems for $\tilde{\rho}$-mixing sequences of random variables[J]. Statistics and Probability Letters，2008，78(8)：1017-1023.

[4] WU Qun-ying，JIANG Yuan-ying. Chover-type laws of the k-iterated logarithm for $\tilde{\rho}$-mixing sequences of random variables[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2010，366(2)：435-443.

[5] BRYC W，SMOLENSKI W. Moment condition for almost sure convergence of weakly correlated random variables [J]. Proceedings of American Math Society，1993，119(2)：629-635.

[6] 吴永锋. 列与两两列的 L_p 收敛性[J]. 纯粹数学与应用数学，2009，25(2)：377-383.

[7] 吴群英. 混合序列的概率极限理论[M]. 北京：科学出版社，2006.

[8] ORDÓÑÓEZ C M. Convergence of weighted sums of random variables and uniform integerbility concerning the weights[J]. Collect Math，1994，45(2)：121-132.

L_p Convergence for $\tilde{\rho}$-Mixing Random Variables

GUO Jin，WU Qun-ying，XIA Bao-fei

(College of Science，Guilin University of Technology，Guilin 541004，China)

Abstract： Let $\{X_n;n\geqslant 1\}$ be a sequence of $\tilde{\rho}$-mixing random variables，$\{a_{n,k};1\leqslant k\leqslant n\}$ be an array of real numbers. By the moment inequality and truncated method，the authors study the L_p convergence for the weighted sums $\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}X_k$，the results extend and improve the corresponding results made in some previous papers.

Keywords： $\tilde{\rho}$-mixing；random variables；moment inequality；truncated method；L_p convergence

(**责任编辑：**钱筠　　**英文审校：**张金顺，黄心中)