

文章编号: 1000-5013(2012)02-0225-04

一类带附加装置的特殊刚体的稳定性分析

梁建莉

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

摘要: 研究一类带有附加装置的特殊刚体的稳定性,通过寻找合适的 Poisson 结构及 Hamilton 函数,将刚体的运动方程转化为广义 Hamilton 系统.运用能量 Casimir 函数法分析得知,这类刚体的运动在一定条件下是稳定的.

关键词: 特殊刚体; 稳定性; Poisson 结构; Hamilton 函数; 能量 Casimir 函数法

中图分类号: O 175.21; O 317

文献标志码: A

1 预备知识

在研究几何空间中刚体的定点转动时,可用刚体相对于固定在质心上的直角坐标的 3 个角动量作为动态变量^[1],其相空间为 $P = \{\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3) | m_i \text{ 为角动量}, i=1,2,3\} \cong \mathbf{R}^3$. 在这个相空间上,自由刚体的运动由 Euler 方程描述为

$$\begin{cases} \dot{m}_1 = (\lambda_3^{-1} - \lambda_2^{-1})m_2m_3, \\ \dot{m}_2 = (\lambda_1^{-1} - \lambda_3^{-1})m_3m_1, \\ \dot{m}_3 = (\lambda_2^{-1} - \lambda_1^{-1})m_1m_2. \end{cases}$$

其中: λ_i 是主惯性矩, $\lambda_i > 0$.

文献[2]应用能量 Casimir 函数法和谱分析法,证明在自由刚体运动中绕长轴和短轴的转动是稳定的,绕中轴的转动是不稳定的.对于带附加装置的特殊刚体,其运动方程为

$$\begin{cases} \dot{m}_1 = (\lambda_3^{-1} - \lambda_2^{-1})m_2m_3 - \lambda_2^{-1}m_2, \\ \dot{m}_2 = (\lambda_1^{-1} - \lambda_3^{-1})m_3m_1 + \lambda_1^{-1}m_1, \\ \dot{m}_3 = (\lambda_2^{-1} - \lambda_1^{-1})m_1m_2. \end{cases} \quad (1)$$

本文通过寻找合适的 Poisson 结构及 Hamilton 函数,运用能量 Casimir 函数法^[2-3]得到如下定理.

定理 1 a) 若主惯性矩 $\lambda_3 > \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$, 则当角动量为

$$m_3 < \min\left\{\frac{\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}, \frac{\lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}\right\}, \quad \text{或 } m_3 > -1$$

时,带附加装置的刚体运动是稳定的;

b) 若主惯性矩 $\lambda_3 < \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ 时,则当角动量为

$$m_3 > \max\left\{\frac{\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}, \frac{\lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}\right\}, \quad \text{或 } m_3 < -1$$

时,带附加装置的刚体运动是稳定的.

2 基本定义和引理

定义 1^[4] 常微分方程

收稿日期: 2011-06-17

通信作者: 梁建莉(1979-),女,讲师,主要从事哈密顿动力系统的研究. E-mail: liangjl@hqu.edu.cn.

基金项目: 国务院侨办科研基金资助项目(08QZR10)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \tag{2}$$

称为广义 Hamilton 系统. 如果存在 Hamilton 函数 $H(\boldsymbol{x})$ 及 n 阶反对称矩阵 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{J}_{i,j}(\boldsymbol{x})]_{n \times n}$, 使得方程可以写成

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla H(\boldsymbol{x}),$$

并且 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ 满足 Jacobi 恒等式

$$\sum_{l=1}^n \left[\boldsymbol{J}_{i,l}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \boldsymbol{J}_{j,k}(\boldsymbol{x})}{\partial x_l} + \boldsymbol{J}_{j,l}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \boldsymbol{J}_{k,i}(\boldsymbol{x})}{\partial x_l} + \boldsymbol{J}_{k,l}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \boldsymbol{J}_{i,j}(\boldsymbol{x})}{\partial x_l} \right] = 0, \quad \forall i, j, k = 1, 2, \cdots, n. \tag{3}$$

式(3)中: 矩阵 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ 称为广义 Hamilton 系统的 Poisson 结构.

定义 2^[4] 如果函数 $C(\boldsymbol{x})$ 满足方程

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla C(\boldsymbol{x}) = 0,$$

则函数 $C(\boldsymbol{x})$ 称为 Poisson 结构 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ 的 Casimir 函数.

通过直接计算可知, 若 $C(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ 的一个 Casimir 函数, 那么对于任意的一元可微函数 $\Phi(z)$, 复合函数 $\Phi[C(\boldsymbol{x})]$ 也是 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ 的 Casimir 函数.

定义 3^[4] 微分方程(2)在奇点 \boldsymbol{x}_0 是形式稳定的, 如果存在方程组(2)的一个满足下列条件的守恒量 $H(\boldsymbol{x})$:

- 1) $DH(\boldsymbol{x}_0) = 0$;
- 2) $D^2 H(\boldsymbol{x}_0)$ 是正定或负定的.

其中: $DH(\boldsymbol{x}_0)$ 是 $H(\boldsymbol{x})$ 在 \boldsymbol{x}_0 点的梯度; $D^2 H(\boldsymbol{x}_0)$ 是 $H(\boldsymbol{x})$ 在 \boldsymbol{x}_0 点的 Hessian 矩阵.

定义 4^[4] 设 $\boldsymbol{x}(t)$ 是微分方程(2)的任一解. 微分方程(2)的奇点 \boldsymbol{x}_0 称为是 Liapunov 稳定 (或非线性稳定) 的, 如果对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_0| < \delta$ 时, 对于一切 $t > 0$, 有 $|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_0| < \delta$; 如果还有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0$, 则称 \boldsymbol{x}_0 是渐近稳定的.

对于有限维系统来说, 形式稳定与 Liapunov 稳定是等价的, 而对于无穷维空间则不是如此.

引理 1^[2] Hamilton 函数和 Casimir 函数都是广义 Hamilton 系统的守恒量.

引理 2^[2] Hamilton 函数加上任何 Casimir 函数仍可作为原系统的 Hamilton 函数.

引理 3^[2] 即 Lagrange-Dirichlet 引理. 设 \boldsymbol{x}_0 是 Hamilton 系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J} \cdot \nabla H(\boldsymbol{x})$$

的奇点. 其中: $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & 0 \end{pmatrix}$, \boldsymbol{I} 为 n 阶单位阵, 则当 $D^2 H(\boldsymbol{x}_0)$ 为正定或负定时, 可知 \boldsymbol{x}_0 是 Liapunov 稳定的.

能量 Casimir 函数法是引理 3 的推广.

对于证明经典 Hamilton 系统的奇点稳定性问题, 一个有效的办法就是利用引理 3. 即寻找系统的一个守恒量, 使其在奇点处具有局部极大或极小值, 在经典 Hamilton 力学中, 这个守恒量通常取 Hamilton 函数. 在广义 Hamilton 系统中, 其 Hamilton 函数在奇点处不一定取到极大或极小值.

由引理 2 可知, Hamilton 函数加上任何 Casimir 函数仍为原系统的 Hamilton 函数, 因此要寻找守恒量 $C(\boldsymbol{x})$, 用 $H(\boldsymbol{x}) + C(\boldsymbol{x})$ 替代 $H(\boldsymbol{x})$ 成为系统新的守恒量, 使其在奇点处可以取到极大或极小值.

能量 Casimir 函数法有如下 3 个主要步骤:

- 1) 构造适当的 Poisson 结构及 Hamilton 函数 $H(\boldsymbol{x})$, 使系统成为广义 Hamilton 系统;
- 2) 求 Casimir 函数 $C(\boldsymbol{x})$, 对系统的奇点 \boldsymbol{x}_0 有 $D(H + C)(\boldsymbol{x}_0) = 0$;
- 3) 验证 $D^2 (H + C)(\boldsymbol{x}_0) = 0$ 的定性.

3 定理的证明

3.1 Poisson 结构及 Hamilton 函数

首先, 取反对称矩阵为

$$\mathbf{J}(\mathbf{m}) = \begin{pmatrix} 0 & -m_3 - 1 & m_2 \\ m_3 + 1 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{pmatrix},$$

由此可以验证 $\mathbf{J}(\mathbf{m})$ 满足 Jacobi 恒等式(3).

其次,取哈密顿函数为

$$H(\mathbf{m}) = \frac{1}{2}(m_1^2 \lambda_1^{-1} + m_2^2 \lambda_2^{-1} + m_3^2 \lambda_3^{-1}),$$

则刚体的运动方程(1)可以写为

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{J}(\mathbf{m}) \cdot \nabla H(\mathbf{m}).$$

即系统(1)是一个广义 Hamilton 系统,且 $\mathbf{J}(\mathbf{m})$ 为此系统的 Poisson 结构.

3.2 Casimir 函数

设 Casimir 函数为 $C(\mathbf{m})$,由 $\mathbf{J}(\mathbf{m}) \cdot \nabla C(\mathbf{m}) = 0$,得到偏微分方程组为

$$\left. \begin{aligned} (-m_3 - 1) \frac{\partial C(\mathbf{m})}{\partial m_2} + m_2 \frac{\partial C(\mathbf{m})}{\partial m_3} &= 0, \\ (m_3 + 1) \frac{\partial C(\mathbf{m})}{\partial m_1} - m_1 \frac{\partial C(\mathbf{m})}{\partial m_3} &= 0, \\ -m_2 \frac{\partial C(\mathbf{m})}{\partial m_1} + m_1 \frac{\partial C(\mathbf{m})}{\partial m_2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

利用偏微分方程原理^[5],通过计算可知, $m_1^2 + m_2^2 + (m_3 + 1)^2$ 为 $\mathbf{J}(\mathbf{m})$ 的 Casimir 函数,若 $\Phi(z)$ 为一个一元可微函数,则 $C(\mathbf{m}) = \Phi(m_1^2 + m_2^2 + (m_3 + 1)^2)$ 也是 $\mathbf{J}(\mathbf{m})$ 的 Casimir 函数,所以系统(1)的另一个哈密顿函数为

$$H_c(\mathbf{m}) = H(\mathbf{m}) + C(\mathbf{m}) = \frac{m_1^2 \lambda_1^{-1} + m_2^2 \lambda_2^{-1} + m_3^2 \lambda_3^{-1}}{2} + \Phi(m_1^2 + m_2^2 + (m_3 + 1)^2).$$

其梯度为

$$DH_c(\mathbf{m}) = (m_1 \lambda_1^{-1} + 2m_1 \Phi', m_2 \lambda_2^{-1} + 2m_2 \Phi', m_3 \lambda_3^{-1} + 2(m_3 + 1) \Phi').$$

考虑系统的奇点 $\mathbf{m}_0 = (0, 0, m_3)$,即 m_3 轴上的点均为系统的奇点.

令 $DH_c(\mathbf{m}_0) = 0$,则

$$\Phi' \Big|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0} = -\frac{m_3}{2\lambda_3(m_3 + 1)}, \quad (5)$$

即所选取的 Casimir 函数 $C(\mathbf{m})$ 要满足式(5).

3.3 验证 $D^2 H_c(\mathbf{m}_0)$ 的定性

令

$$D^2 H_c(\mathbf{m}) = \left(\frac{\partial^2 H_c(\mathbf{m})}{\partial m_i \partial m_j} \right)_{3 \times 3} = (H''_{c,i,j}(\mathbf{m}))_{3 \times 3} = (X_{i,j}(\mathbf{m}))_{3 \times 3}.$$

上式中: $X_{i,i}(\mathbf{m}) = \lambda_i^{-1} + 2\Phi' + 4(m_i + \sigma)^2 \Phi''$; $X_{i,j}(\mathbf{m}) = 4(m_i + \sigma)(m_j + \sigma) \Phi''$ ($i, j = 1, 2, 3$), 且 $i \neq j, \sigma = \begin{cases} 0, & i, j = 1, 2 \\ 1, & i, j = 3. \end{cases}$

由此可得,在奇点 \mathbf{m}_0 处, $X_{i,j}(\mathbf{m}_0) = 0, i \neq j$, 所以得到矩阵为

$$D^2 H_c(\mathbf{m}_0) = \text{diag}(X_{1,1}(\mathbf{m}_0), X_{2,2}(\mathbf{m}_0), X_{3,3}(\mathbf{m}_0)).$$

上式中: $X_{i,i}(\mathbf{m}_0) = \frac{1}{\lambda_i} - \frac{m_3}{\lambda_3(m_3 + 1)}$ ($i = 1, 2$); $X_{3,3}(\mathbf{m}_0) = \frac{1}{\lambda_3(m_3 + 1)} + 4(m_3 + 1)^2 \Phi'' \Big|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0}$.

若 $D^2 H_c(\mathbf{m}_0)$ 正定,则其所有顺序主子式为正,从而 $X_{i,i}(\mathbf{m}_0) > 0$ ($i = 1, 2, 3$),即

$$\left. \begin{aligned} m_3 &< \frac{\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}, \\ m_3 &< \frac{\lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}, \\ \Phi'' \Big|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_0} &> -\frac{1}{4\lambda_3(m_3 + 1)^3}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

因此,只要取一元可微函数为

$$\Phi(z)=-\frac{m_3}{2\lambda_3(m_3+1)}z-\frac{1}{8\lambda_3(m_3+1)^2(m_3+2)}(z-(m_3+1)^2)^2,$$

则 $\Phi(z)$ 满足式(5),(6)的第 3 式.

由式(6)的前两式可得,若主惯性矩 $\lambda_3>\max\{\lambda_1,\lambda_2\}$,则当角动量

$$m_3<\min\left\{\frac{\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_3},\frac{\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3}\right\}<-1,\quad\text{或 } m_3>-1$$

时,刚体的转动是稳定的.

同理,若 $D^2H_c(m_0)$ 负定,则 $X_{i,i}(m_0)<0(i=1,2,3)$. 此时,只要取一元可微函数为

$$\Phi(z)=-\frac{m_3}{2\lambda_3(m_3+1)}z-\frac{1}{8\lambda_3(m_3+1)^2m_3}(z-(m_3+1)^2)^2,$$

通过计算可知,若主惯性矩 $\lambda_3<\min\{\lambda_1,\lambda_2\}$,当角动量为

$$m_3>\max\left\{\frac{\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_3},\frac{\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3}\right\}>-1,\quad\text{或 } m_3<-1$$

时,刚体的转动是稳定的. 定理得证.

参考文献:

[1] 李继彬,赵晓华,刘正荣. 广义哈密顿系统理论及其应用[M]. 北京:科学出版社,1999.
[2] 高普云. 非线性动力学:分叉、混沌与孤立子[M]. 长沙:国防科技大学出版社,2005.
[3] 王照林,匡金炉. 利用能量 Casimir 方法研究充液对称刚体的非线性稳定性[J]. 力学与实践,1993,15(2):34-37.
[4] 赵晓华,黄克累. 广义 Hamilton 系统与高维微分动力系统的定性研究[J]. 应用数学学报,1994,17(2):182-191.
[5] 管志诚,李俊杰. 常微分方程与偏微分方程[M]. 浙江:浙江大学出版社,2001.

Stability of a Special Rigid Body with Additional Devices

LIANG Jian-li

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, we study the stability of a special kind of rigid body with additional devices. The rigid body's motion equations is transform into a generalized Hamilton system by means of a suitabl Poisson structure and Hamiltonian function. Through these analysis, we found that the motion of such rigid body with additional devices, under certain conditions, is stable.

Keywords: special rigid body; stability; Poisson structure; Hamilton function; energy Casimir function

(责任编辑: 陈志贤 英文审校: 张金顺, 黄心中)