第 33 卷 第 2 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 33 No. 2
2012 年 3 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Mar. 2012

文章编号: 1000-5013(2012)02-0212-06

一类二阶奇异微分方程三点积分边值问题的正解

林秋莲，王全义

(华侨大学 数学科学学院，福建 泉州 362021)

摘要: 研究一类带有积分边值的二阶奇异微分方程正解的存在性问题，应用锥不动点定理及一些分析技巧，得到该边值问题正解存在性的一些新结果.

关键词: 三点边值问题；二阶奇异微分方程；锥不动点；积分边值；正解

中图分类号: O 175　　**文献标志码**: A

常微分方程的多点边值问题起源于各种不同的应用数学问题，在物理学、化学工程、弹性力学等方面都有着广泛的应用. 对于二阶微分方程的三点边值问题，已有许多作者研究并取得一些成果[1-8]. 然而，对于二阶微分方程的三点积分边值问题还很少有人研究过. 对于二阶奇异微分方程边值问题

$$x''(t) = -\lambda h(t) f(t, x(t)), \qquad t \in (0,1), \tag{1}$$

$$\delta x'(0) - x(\xi) = \int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_1(s), \qquad x(1) = \int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_2(s). \tag{2}$$

其中: $\lambda>0$, $\delta\geqslant\xi$, $\xi\in[0,1]$; $\eta_1(s)$, $\eta_2(s)$ 在 $[0,1]$ 上是 Riemann-Stieltjes 可积; $f:[0,1]\times(0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是连续的; $h(t):(0,1)\to[0,+\infty)$ 是连续的, $h(t)$ 在 $t=0,1$ 和 $f(t,x)$ 在 $x=0$ 处还可能奇异. 本文利用锥不动点定理及一些分析技巧，得到了边值问题(1)，(2)正解的存在性的一些新结果.

1　预备知识及引理

设 X 是 Banach 空间，$K\subset X$ 是一个非空子集，且满足 1) 对任意的 $u,v\in K$ 和实数 $\alpha,\beta\geqslant 0$, $\alpha u+\beta v\in K$ 成立; 2) 若 $u,-u\in K$, 则必有 $u=0$. 那么，称 K 是 X 中的一个锥.

引理 1[9]　设 X 是 Banach 空间，K 是 X 中的一个锥. Ω_1, Ω_2 是 X 中的开集，$0\in\Omega_1$, $\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$, $T: K\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to K$ 是全连续算子. 若满足如下两个条件之一，则算子 T 在 $K\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 中有不动点.

1) 若 $x\in K\cap\partial\Omega_1$, 则 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$; 若 $x\in K\cap\partial\Omega_2$, 则 $\|Tx\|\geqslant\|x\|$.

2) 若 $x\in K\cap\partial\Omega_1$, 则 $\|Tx\|\geqslant\|x\|$; 若 $x\in K\cap\partial\Omega_2$, 则 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$.

设 $X=\{x\mid x\in C[0,1]\}$，取范数 $\|x\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$, 则在此范数下 X 是一个 Banach 空间.

定义 $K=\{x\mid x\in X, x(t)\geqslant 0, x(t)\geqslant t(1-t)\|x\|, t\in[0,1]\}$，易知 K 是 X 中的一个锥. 对任意正常数 $r,R,R>r$, 记

$$K_r=\{x\in K: \|x\|<r\}, \qquad \bar{K}_r=\{x\in K: \|x\|\leqslant r\},$$

$$K_{r,R}=\{x\in K: r<\|x\|<R\}, \qquad \bar{K}_{r,R}=\{x\in K: r\leqslant\|x\|\leqslant R\}.$$

假设下列条件成立，有

H_1) $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$, $[(\delta-\xi)\eta_2(t)-\eta_1(t)]$ 在 $[0,1]$ 上是非减函数，且

$$\int_0^1\mathrm{d}\eta_1(s)+\int_0^1\mathrm{d}\eta_2(s)=:M'<+\infty, \qquad \int_0^1\mathrm{d}\eta_2(s)=:M<1.$$

H_2) $h\in C((0,1),[0,+\infty))$, 且在 $(0,1)$ 的任一子区间上有

收稿日期: 2011-05-23

通信作者: 王全义(1955-)，男，教授，主要从事常微分方程和泛函微分方程的研究. E-mail: qywang@hqu.edu.cn.

基金项目: 国务院侨办科研基金资助项目(09QZR10)

$$h(t)\not\equiv 0,\qquad \int_0^1 h(s)(1-s)\mathrm{d}s=:M_1<+\infty.$$

H$_3$）$f\in C([0,1]\times(0,+\infty),[0,+\infty))$，$f(t,x)\not\equiv 0$，且对任意的 $0<r<R<+\infty$，有

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in \overline{K}_{r,R}}\int_{D(n)}\lambda(1-s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s=0,\qquad D(n)=[0,1/n]\cup[n-1/n,1].$$

引理 2　对于 $C([0,1]\times[0,1],[0,1))$ 的函数，有

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}(\delta-\xi+t)(1-s), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\\[2mm] \dfrac{1}{\rho}(\delta-\xi+s)(1-t), & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}\tag{3}$$

式(3)中：$\rho=1+\delta-\xi\geqslant 1$，有如下几点性质：

A$_1$）当 $0\leqslant t,s\leqslant 1$ 时，$G(t,s)\geqslant 0$，而当 $0<t,s<1$ 时，$G(t,s)>0$；

A$_2$）当 $0\leqslant t,s\leqslant 1$ 时，$0\leqslant G(t,s)\leqslant G(t,t)\leqslant 1-t$，$G(t,s)\leqslant G(s,s)\leqslant 1-s$；

A$_3$）当 $0\leqslant t,s\leqslant 1$ 时，$G(t,s)\geqslant t(1-t)\cdot G(s,s)$，$G(t,s)\geqslant s(1-s)\cdot G(t,t)$；

A$_4$）对任意给定的 $\theta\in(0,1/2)$，当 $t\in[\theta,1-\theta]$，$s\in[0,1]$时，有 $G(t,s)\geqslant\theta(1-\theta)\cdot G(s,s)$.

引理证略.

现定义线性算子 $A_1: K\to X$ 为

$$(A_1x)(t)=\frac{1}{\rho}\Big[(\delta-\xi)\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_2(s)-\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_1(s)\Big]+\frac{t}{\rho}\Big[\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_2(s)+\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_1(s)\Big],\qquad \forall x\in K.\tag{4}$$

定义算子 $A_2: K\backslash\{\theta\}\to X$ 为

$$(A_2x)(t)=\int_0^1 G(t,s)\lambda h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\frac{1-t}{\rho}\int_0^\xi(\xi-s)\lambda h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s,\qquad \forall x\in K\backslash\{\theta\}.\tag{5}$$

式(5)中：$\rho=1+\delta-\xi$，$G(t,s)$由式(3)给出. 易见在条件 H$_1$）～H$_3$）下，上述定义的算子 A_1x，A_2x 的右边积分都是存在的.

引理 3　在条件 H$_1$）下，线性算子 $A_1: K\to K$ 是全连续算子. 引理证略.

引理 4　在 H$_2$），H$_3$）条件下，算子 $A_2: K\backslash\{\theta\}\to K$ 是全连续的. 引理证略.

再定义算子 $T: K\backslash\{\theta\}\to K$ 为

$$(Tx)(t)=(A_1x+A_2x)(t)=\frac{1}{\rho}\Big[(\delta-\xi)\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_2(s)-\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_1(s)\Big]+\frac{t}{\rho}\Big[\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_2(s)+\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_1(s)\Big]+\int_0^1\lambda G(t,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\frac{1-t}{\rho}\int_0^\xi(\xi-s)\lambda h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s,\qquad \forall x\in K\backslash\{\theta\}.\tag{6}$$

由算子 T 的定义和上述的引理 3，4 可知，$T: K\backslash\{\theta\}\to K$ 是全连续算子.

引理 5　假设条件 H$_1$）～H$_3$）成立，如果 $x=x(t)$是全连续算子 $T: K\backslash\{\theta\}\to K$ 的一个不动点，则 $x=x(t)$是积分边值问题（1），（2）的一个正解.

证明　若 $x=x(t)$是算子方程 $Tx=x$ 的解，则由式(6) 可知

$$x(t)=(Tx)(t)=\frac{1}{\rho}\Big[(\delta-\xi)\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_2(s)-\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_1(s)\Big]+\frac{t}{\rho}\Big[\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_2(s)+\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_1(s)\Big]+\Big[\frac{1-t}{\rho}\int_0^t(\delta-\xi+s)\lambda h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\frac{\delta-\xi+t}{\rho}\int_t^1(1-s)\lambda h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\Big]+\frac{1-t}{\rho}\int_0^\xi(\xi-s)\lambda h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s.\tag{7}$$

在上式中，分别令 $t=\xi,1$，则可得

$$x(\xi)=\frac{1}{\rho}\left[(\delta-\xi)\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_2(s)-\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_1(s)\right]+\frac{\xi}{\rho}\left[\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_2(s)+\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_1(s)\right]+$$
$$\left[\frac{1-\xi}{\rho}\int_0^\xi(\delta-\xi+s)\lambda h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\frac{\delta}{\rho}\int_\xi^1(1-s)\lambda h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\right]+$$
$$\frac{1-\xi}{\rho}\int_0^\xi(\xi-s)\lambda h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s=\frac{1}{\rho}\left[\delta\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_2(s)+(\xi-1)\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_1(s)\right]+$$
$$\frac{\delta(1-\xi)}{\rho}\int_0^\xi\lambda h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\frac{\delta}{\rho}\int_\xi^1(1-s)\lambda h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s, \tag{8}$$
$$x(1)=\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_2(s). \tag{9}$$

又在式(7)两端对 t 求导,可得

$$x'(t)=\frac{1}{\rho}\left[\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_2(s)+\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_1(s)\right]+\left[\frac{-1}{\rho}\int_0^t(\delta-\xi+s)\lambda h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\right.$$
$$\left.\frac{1}{\rho}\int_t^1(1-s)\lambda h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\right]+\frac{-1}{\rho}\int_0^\xi(\xi-s)\lambda h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s. \tag{10}$$

把 $t=0$ 代入 $x'(t)$ 可得

$$x'(0)=\frac{1}{\rho}\left[\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_2(s)+\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_1(s)\right]+\frac{1}{\rho}\int_0^1(1-s)\lambda h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s+$$
$$\frac{-1}{\rho}\int_0^\xi(\xi-s)\lambda h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s=\frac{1}{\rho}\left[\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_2(s)+\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_1(s)\right]+$$
$$\frac{1}{\rho}\int_\xi^1(1-s)\lambda h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\frac{1-\xi}{\rho}\int_0^\xi\lambda h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s. \tag{11}$$

于是,由式(8),(11)可得

$$\delta x'(0)-x(\xi)=\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_1(s). \tag{12}$$

由式(9),(12)即可知式(2)的边值条件也成立. 在式(10)两端对 t 求导,可得

$$x''(t)=-\lambda h(t)f(t,x(t)),\qquad t\in(0,1).$$

所以,$x=x(t)$ 是积分边值问题 (1),(2) 的一个正解. 引理 5 证毕.

2 主要结果及其证明

记 $f^0=\limsup\limits_{x\to0^+}\max\limits_{t\in[0,1]}\dfrac{f(t,x)}{x}$, $f_\infty=\liminf\limits_{x\to+\infty}\min\limits_{t\in[\theta,1-\theta]}\dfrac{f(t,x)}{x}$, $f^\infty=\limsup\limits_{x\to+\infty}\max\limits_{t\in[0,1]}\dfrac{f(t,x)}{x}$, $f_0=\liminf\limits_{x\to0^+}\min\limits_{t\in[\theta,1-\theta]}\dfrac{f(t,x)}{x}$.

定理 1 假设条件 H_1)~H_3)成立,且条件

H_4) $0<f^0<+\infty$, $0<f_\infty<+\infty$, $\dfrac{4}{lf_\infty}<\dfrac{1-M}{2M_1f^0}$

成立,其中 $l=\theta(1-\theta)\int_\theta^{1-\theta}(1-s)h(s)\mathrm{d}s>0$, $\theta\in(0,1/2)$. 那么, 当 $\lambda\in\left(\dfrac{4}{lf_\infty},\dfrac{1-M}{2M_1f^0}\right)$时, 边值问题(1),(2)至少有一个正解.

证明 对任意给定的 $\lambda\in\left(\dfrac{4}{lf_\infty},\dfrac{1-M}{2M_1f^0}\right)$, 存在一个 $\varepsilon>0$,使得

$$f_\infty-\varepsilon>0,\qquad \frac{4}{l(f_\infty-\varepsilon)}\leqslant\lambda\leqslant\frac{1-M}{2M_1(f^0+\varepsilon)}.$$

由 f^0 的定义可知, 对上述的 $\varepsilon>0$ 存在一个正数 r,使得当 $0<x\leqslant r$ 时, 有

$$f(t,x)\leqslant(f^0+\varepsilon)\cdot x,\qquad \forall t\in[0,1]. \tag{13}$$

令 $\Omega_1=\{x\in K: \|x\|\leqslant r\}$,对任意的 $x\in\partial\Omega_1$, $\|x\|=r$, $\forall t\in[0,1]$,再由式(6),(13)可得

$$|(Tx)(t)|\leqslant\int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_2(s)+\int_0^1\lambda(1-s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\frac{1-t}{\rho}\int_0^1\lambda(1-s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\leqslant$$

$$M\|x\|+2\int_0^1\lambda(1-s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\leqslant M\|x\|+2\int_0^1\lambda(1-s)h(s)(f^0+\varepsilon)x(s)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$M\|x\|+2\lambda(f^0+\varepsilon)\int_0^1(1-s)h(s)\mathrm{d}s\cdot\|x\|\leqslant M\|x\|+\frac{1-M}{M_1}\cdot M_1\|x\|=\|x\|=r.$$

所以，$\|Tx\|\leqslant\|x\|,\forall x\in\partial\Omega_1$，

再由 f_∞ 的定义可知，对上述的 $\varepsilon>0$，存在一个足够大的 $R_0>0$，使得当 $x\geqslant R_0$ 时，有

$$f(t,x)\geqslant(f_\infty-\varepsilon)\cdot x,\qquad\forall t\in[\theta,1-\theta].\tag{14}$$

取 $R_1=\max\{2r,[\theta(1-\theta)]^{-1}R_0\}$. 令 $\Omega_2=\{x\in K:\|x\|\leqslant R_1\}$，对任意的 $x\in\partial\Omega_2$，$\|x\|=R_1$. 于是，当 $t\in[\theta,1-\theta]$时，$x(t)\geqslant\theta\cdot(1-\theta)\|x\|=\theta\cdot(1-\theta)R_1\geqslant R_0$. 因此，由式(6)可得

$$(Tx)(t)=(A_1x+A_2x)(t)\geqslant\int_0^1\lambda G(t,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant$$

$$t(1-t)\int_0^1\lambda(1-s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s.$$

故由式(14)及上式可得

$$(Tx)(\frac{1}{2})\geqslant\frac{1}{4}\int_0^1\lambda(1-s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{4}\int_\theta^{1-\theta}\lambda(1-s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\frac{1}{4}\lambda\int_\theta^{1-\theta}(1-s)h(s)(f_\infty-\varepsilon)x(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{4}\lambda(f_\infty-\varepsilon)\theta(1-\theta)\|x\|\int_\theta^{1-\theta}(1-s)h(s)\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\frac{1}{4}\lambda l\cdot(f_\infty-\varepsilon)\cdot\|x\|\geqslant\|x\|=R_1.$$

所以，$\|Tx\|\geqslant\|x\|,x\in\partial\Omega_2$.

再由引理 1 可得，算子 T 在 $K\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$中有不动点 x^*. 又因为 $x^*(t)\geqslant rt(1-t)>0,\forall t\in(0,1)$，所以 x^* 是一个正解. 又由引理 5 可知，边值问题(1)，(2)存在一个正解. 定理 1 证毕.

由定理 1 的证明，易见以下推论 1 成立.

推论 1　假设条件 H_1)～H_3)成立，如果下列条件之一成立：

1) $0<f^0<+\infty,f_\infty=+\infty$，且 $\lambda\in(0,\dfrac{1-M}{2M_1f^0})$；

2) $f^0=0,f_\infty=+\infty$，且 $\lambda\in(0,+\infty)$；

3) $f^0=0,0<f_\infty<+\infty$，且 $\lambda\in(\dfrac{4}{lf_\infty},+\infty)$. 那么，边值问题(1)，(2)至少有一个正解.

定理 2　假设条件 H_1)～H_3)成立，使得条件

H_5) $0<f^\infty<+\infty,0<f_0<+\infty,\dfrac{4}{lf_0}<\dfrac{1-M}{2M_1f^\infty}$

成立. 那么，当 $\lambda\in(\dfrac{4}{lf_0},\dfrac{1-M}{2M_1f^\infty})$时，边值问题(1)，(2)至少有一个正解.

证明　对任意给定的 $\lambda\in(\dfrac{4}{lf_0},\dfrac{1-M}{2M_1f^0})$，存在一个 $\varepsilon>0$，使得 $f_0-\varepsilon>0$，且 $\dfrac{4}{l(f_0-\varepsilon)}\leqslant\lambda\leqslant\dfrac{1-M}{2M_1(f^\infty+2\varepsilon)}$. 由 f_0 的定义可知，对上述的 $\varepsilon>0$，存在一个正数 r，使得

$$f(t,x)\geqslant(f_0+\varepsilon)x,\qquad\forall 0<x\leqslant r,\forall t\in[\theta,1-\theta].\tag{15}$$

令 $\Omega_r=\{x\in K:\|x\|\leqslant r\}$. 对任意的 $x\in\partial\Omega_r$，$\|x\|=r$，再由式(6)可得

$$(Tx)(t)\geqslant\int_0^1\lambda G(t,s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant t(1-t)\int_0^1\lambda(1-s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s.$$

故由式(15)及上式可得

$$(Tx)(\frac{1}{2})\geqslant\frac{\lambda}{4}\int_0^1(1-s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant\frac{\lambda}{4}\int_\theta^{1-\theta}(1-s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\frac{\lambda}{4}\int_\theta^{1-\theta}(1-s)h(s)(f_0-\varepsilon)x(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{\lambda}{4}(f_0-\varepsilon)\theta(1-\theta)\|x\|\int_\theta^{1-\theta}(1-s)h(s)\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\frac{\lambda}{4}l\cdot(f_0-\varepsilon)\|x\|\geqslant\|x\|.$$

所以,$\| Tx \| \geqslant \| x \|$,$\forall x \in \partial \Omega_r$.

又由 f^∞ 的定义可得,对上述的 $\varepsilon>0$,存在一个足够大的 $R_0>0(R_0>2r)$,使得当 $x\geqslant R_0$ 时,有

$$f(t,x) < (f_\infty+\varepsilon)\cdot x, \qquad \forall t\in[0,1]. \tag{16}$$

令 $M_0=\sup\limits_{x\in\partial K_{R_0}}\lambda\int_0^1(1-s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s$. 由条件 H$_3$)可知,$M_0<+\infty$. 取 $R_1=\max\{\dfrac{M_0}{\lambda M_1\varepsilon},2R_0\}$,则 $M_0\leqslant\lambda M_1\varepsilon R_1$. 令 $\Omega_{R_1}=\{x\in K: \|x\|\leqslant R_1\}$,对于任意给定的 $x\in\partial\Omega_{R_1}$,$\|x\|=R_1$,并记 $D_x(t)=\{t\mid t\in[0,1],x(t)\geqslant R_0\}$,$x_0(t)=\min\{R_0,x(t)\}$. 于是,有 $x_0\in\partial\Omega_{R_0}$. 因此,对于 $\forall t\in[0,1]$,由式(6),(16)可得

$$\begin{aligned}
|(Tx)(t)| \leqslant & \int_0^1 x(s)\mathrm{d}\eta_2(s)+\int_0^1\lambda(1-s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s+\frac{1-t}{\rho}\int_0^1\lambda(1-s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\leqslant \\
& M\|x\|+2\lambda\int_0^1(1-s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\leqslant M\|x\|+2\lambda\Big[\int_{D_x(t)}(1-s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s+ \\
& \int_{[0,1]\backslash D_x(t)}(1-s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\Big]\leqslant M\|x\|+2\lambda\cdot\int_{D_x(t)}(1-s)h(s)(f^\infty+\varepsilon)x(s)\mathrm{d}s+ \\
& 2\lambda\int_0^1(1-s)h(s)f(s,x_0(s))\mathrm{d}s\leqslant M\|x\|+2\lambda(f^\infty+\varepsilon)\|x\|\int_0^1(1-s)h(s)\mathrm{d}s+ \\
& 2\sup_{x\in\partial K_{R_0}}\lambda\int_0^1(1-s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\leqslant M\|x\|+2\lambda M_1\cdot(f^\infty+\varepsilon)\|x\|+2M_0\leqslant \\
& MR_1+2\lambda M_1\cdot(f^\infty+\varepsilon)R_1+2M_0\leqslant MR_1+(1-M)R_1-2\lambda M_1R_1\varepsilon+2M_0\leqslant R_1=\|x\|.
\end{aligned}$$

所以,$\|Tx\|\leqslant\|x\|$,$\forall x\in\partial\Omega_{R_1}$.

再由引理 1 可得,算子 T 在 $K\cap(\bar{\Omega}_{R_1}\backslash\Omega_r)$ 中有不动点,且 $x(t)\geqslant rt(1-t)>0$,$\forall t\in(0,1)$. 所以 x 是一个正解. 又由引理 5 可知,边值问题(1),(2)存在一个正解. 定理 2 证毕.

同理由定理 2 的证明,易见以下推论 2 成立.

推论 2 假设条件 H$_1$)～H$_3$)成立,如果下列条件之一成立:

1) $0<f^\infty<+\infty$,$f_0=+\infty$,且 $\lambda\in(0,\dfrac{1-M}{2M_1f^\infty})$;

2) $f^\infty=0$,$f_0=+\infty$,且 $\lambda\in(0,+\infty)$;

3) $f^\infty=0$,$0<f_0<+\infty$,且 $\lambda\in(\dfrac{4}{lf_0},+\infty)$,那么,边值问题(1),(2)至少有一个正解.

注 1 在推论 2 中,$f_0=+\infty$ 可以对应于 $f(t,x)$ 在 $x=0$ 奇异的情形.

3 应用举例

考虑如下的二阶奇异微分方程的积分边值问题

$$\left.\begin{aligned}
& x''(t)+\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}x^{-1/3}(t)=0, \qquad t\in(0,1), \\
& x'(0)-x(\frac{1}{2})=\int_0^1 x(s)d\,\frac{2s-1}{8}, \qquad x(1)=\int_0^1 x(s)d\,\frac{s}{2}
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

正解的存在性. 对应于边值问题(1),(2),有 $\lambda=1$,$\eta_1(s)=\dfrac{2s-1}{8}$,$\eta_2(s)=\dfrac{s}{2}$,$\delta=1$,$\xi=\dfrac{1}{2}$,$h(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$,$f(t,x)=x^{-1/3}$. 所以,有

$$[(\delta-\xi)\eta_2(t)-\eta_1(t)]=\frac{s}{4}-\frac{2s-1}{8}=\frac{1}{8}, \qquad M=\int_0^1\mathrm{d}\eta_2(s)=\frac{1}{2}<1,$$

$$M_1=\int_0^1(1-t)\,\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}, \qquad \frac{1-M}{2M_1}=\frac{1}{2\pi},$$

$$M'=\int_0^1\mathrm{d}\eta_2(s)+\int_0^1\mathrm{d}\eta_1(s)=\int_0^1\mathrm{d}\,\frac{2s-1}{8}+\int_0^1\mathrm{d}\,\frac{s}{2}=\frac{3}{8}<+\infty.$$

$$l=\theta(1-\theta)\int_{\theta}^{1-\theta}(1-t)\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\mathrm{d}t<\theta(1-\theta)\int_{0}^{1}(1-t)\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\mathrm{d}t<+\infty,\qquad \forall\theta\in(0,\frac{1}{2}).$$

$$f^{\infty}=\limsup_{x\to+\infty}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^{-4/3}=0,$$

$$f_{0}=\liminf_{x\to0^{+}}\min_{t\in[\theta,1-\theta]}\frac{f(t,x)}{x}=\lim_{x\to0^{+}}x^{-4/3}=+\infty.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\overline{K}_{r,R}}\int_{D(n)}(1-s)h(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s=\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\overline{K}_{r,R}}\int_{D(n)}\sqrt{\frac{1-s}{s}}\,x^{-1/3}(s)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\overline{K}_{r,R}}\int_{D(n)}\sqrt{\frac{1-s}{s}}[rs(1-s)]^{-1/3}\mathrm{d}s<+\infty,$$

其中：$D(n)=[0,1/n]\cup[n-1/n,1]$. 又 $\lambda=1\in(0,+\infty)$，故推论 2 中条件 2)的所有条件都被满足，因此边值问题(17)至少有一个正解.

参考文献：

[1] KONG Ling-ju. Second order singular boundary value problems with integral boundary conditions[J]. Nonlinear Analysis,2010,72(5):2628-2638.

[2] JIANG Ji-qiang,LIU Li-shan,WU Yong-hong. Second-order nonlinear singular Sturm-Liouville problems with integral boundary conditions[J]. Applied Mathematics and Computation,2009,215(4):1573-1582.

[3] SUN Yan,LIU Li-shan,ZHANG Ji-zhou,et al. Positive solutions of singular three-point boundary value problems second-order differential equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2009,230(2):738-750.

[4] 曹君艳,王全义. 一类二阶微分方程两点边值问题的正解存在性[J]. 华侨大学学报：自然科学版，2010,31(1):113-117.

[5] ZHANG Xue-mei,FENG Mei-qiang,GE Wei-gao. Multiple positive solutions for a class of m-point boundary value problems[J]. Applied Mathematics Letters,2009,22(1):12-18.

[6] FAN Hong-xia,MA Ru-yun. Loss of positivity in a nonlinear second order ordinary differential equations[J]. Nonlinear Analysis,2009,71(1/2):437-444.

[7] LI Gao-shang,LIU Xi-ping,JIA Mei. Positive solutions to a type of nonlinear three-point boundary value problems with sign changing nonlinearities[J]. Computers and Mathematics with Applications,2009,57(3):348-355.

[8] ZHAO Jun-fang,GE Wei-gao. A necessary and sufficient conditions for the existence of positive solutions to a kind of singular three-point boundary value problem[J]. Nonlinear Analysis,2009,71(9):3973-3980.

[9] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南：山东科学技术出版社，2001.

Positive Solutions of Three-Point Integral Boundary Value Problems for A Kind of Second-Order Singular Differential Equations

LIN Qiu-lian, WANG Quan-yi

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

Abstract: In this paper, we study the problems on the existence of positive solutions for a kind of second-order singular differential equations with integral boundary value. By means of the cone fixed point theorem and some analysis skills, we get some new results on the existence of positive solutions for the boundary value problem.

Keywords: three-point boundary value problem; second-order singular differential equations; cone fixed point; integral boundary value; positive solutions

（责任编辑：钱筠　　英文审校：张金顺，黄心中）