

文章编号: 1000-5013(2012)02-0207-05

# 三角延拓与 Beurling-Ahlfors 延拓 之间的双曲距离

陈敏, 陈行堤

(华侨大学 数学科学学院, 福建 泉州 362021)

**摘要:** 估计三角延拓与 Beurling-Ahlfors 延拓之间的双曲距离, 建立上半平面两点之间双曲距离的解析表达式, 改进 Ibragimov 的结果且得到了渐近精确的界限.

**关键词:** 拟对称同胚; 三角延拓; Beurling-Ahlfors 延拓; 双曲距离

**中图分类号:** O 174.55

**文献标志码:** A

Efremovich 等<sup>[1]</sup>证明了上半空间的拟等距的边界值都是拟对称的. Beurling 和 Ahlfors 对任意一个拟对称同胚, 利用其变限积分给出一种拟共形延拓的方法, 称为 Beurling-Ahlfors 延拓. Tukia<sup>[2]</sup>构造了与 Möbius 群兼容的延拓算子, Douady 等<sup>[3]</sup>给出了单位圆周到自身上的共形自然的延拓算子. 众所周知, 拟共形映照本身具有复合性质, 但已有的这些算子对复合并不具有兼容性. Sullivan<sup>[4]</sup>提出是否存在一个具有关于复合可兼容的算子, 且将每一个定义在单位圆周上的拟对称同胚延拓成单位圆盘上的拟共形同胚. 当边界同胚限制在双 Lipschitz 子类时, Norton 等<sup>[5]</sup>利用三角延拓给出了肯定答案; 而对于整个拟对称同胚, Epstein 等<sup>[6]</sup>则给出了否定答案. Ibragimov<sup>[7]</sup>研究了 Sullivan 理想问题的推广情形, 即拟对称同胚的三角延拓在拟等距意义下关于复合的可兼容性问题. 对一个拟对称同胚, 其延拓算子有很多, 这些延拓算子之间的联系与区别一样也引起大家的兴趣. Hardt 等<sup>[8]</sup>通过研究 Beurling-Ahlfors 延拓和 Douady-Earle 延拓与调和拟等距的偏差估计, 证明了球面上的任意一个拟共形映照都可调和拟等距延拓到内部的结论. 陈行堤<sup>[9]</sup>研究了 Beurling-Ahlfors 延拓与调和拟共形延拓的关系. Fotiadis<sup>[10]</sup>借助 Douady-Earle 延拓, 获得对称映照可双曲调和拟共形延拓到内部的另一种证法. 本文继续研究三角延拓和 Beurling-Ahlfors 延拓这两个延拓算子之间的关系.

## 1 预备知识

Ibragimov 通过建立上半平面两点间双曲距离的估计不等式, 得到拟对称同胚的三角延拓和 Beurling-Ahlfors 延拓的双曲距离的定量表达式<sup>[11]</sup>. 即

**定理 1** 如果  $h$  是一个  $\mathbf{R}$  到  $\mathbf{R}$  上的  $M$ -拟对称同胚, 那么, 对于任意的  $z \in H$  有

$$\rho(T(h)(z), B(h)(z)) \leqslant 2 \log \frac{8M^3 + 12M^2 - 1}{2M + 1}. \quad (1)$$

用  $\mathbf{R}$  和  $H = \{z \in \mathbf{C}, \operatorname{Im}[z] > 0\}$  分别表示实数和上半平面. 上半平面  $H$  上的双曲距离定义为

$$\rho(z, w) = \inf_{\gamma} \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}[\gamma(t)]} dt. \quad (2)$$

对于所有连接  $z$  和  $w$  的分段连续可微的弧  $\gamma: [a, b] \rightarrow H$  取下确界.  $\partial H$  表示双曲空间  $(H, \rho)$  的边界  $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ . 利用定义交比的方法, 得到式(2)的等价式为

**收稿日期:** 2011-04-11

**通信作者:** 陈行堤(1976-), 男, 副教授, 主要从事函数论的研究. E-mail: chxtt@hqu.edu.cn.

**基金项目:** 福建省自然科学基金资助项目(S0650019); 华侨大学科研基金资助项目(JB-ZR1136)

$$\rho(z,w)=\log \frac{\left| \frac{z-w^*}{z-z^*} \right| \left| \frac{w-z^*}{w-w^*} \right|}{\left| \frac{z-w^*}{z-z^*} \right| \left| \frac{w-z^*}{w-w^*} \right|}.\tag{3}$$

式(3)中:  $\{z^*,w^*\}=\gamma(z,w)\cap\partial H$ ,点  $z^*,z,w,w^*$  依次位于  $\gamma(z,w)$  上,并且  $\gamma(z,w)$  是唯一通过点  $z$  和  $w$  与  $\partial H$  正交的上半圆周.

实轴  $\mathbf{R}$  上的一个单调递增同胚  $h$ ,如果对于任意的  $x,t\in\mathbf{R}$  且  $t\neq 0$  满足

$$\frac{1}{M}\leqslant\frac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)}\leqslant M.$$

那么,称  $h$  为  $M$ -拟对称同胚. Beurling 和 Ahlfors 对实轴  $\mathbf{R}$  到自身上的拟对称同胚  $h$ ,构造了一个  $H$  到自身上的延拓算子  $B(h)$ ,其定义<sup>[12]</sup>为

$$B(h)(z)=B(h)(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y),$$

其中:  $u(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^1[h(x+ty)+h(x-ty)]dt;v(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^1[h(x+ty)-h(x-ty)]dt.$

利用引理 1,证明延拓  $B(h)$ 在双曲度量下是  $M$ -Lipschitz 的.

**引理 1**<sup>[13]</sup> 设  $h(x)$ 是定义在  $\mathbf{R}$  上一个标准化的  $M$ -拟对称同胚和  $h$ ,即  $h(0)=0$  和  $h(1)=1$ ,则

$$(1+2M)\zeta+\beta\eta\geqslant 1+\beta,\quad \beta(1+2M)\eta+\zeta\geqslant 1+\beta.$$

其中:  $\beta=-h(-1);\zeta=1-\int_0^1h(t)dt;\eta=1+\beta^{-1}\int_0^1h(t)dt.$

对于定义在  $\mathbf{R}$  上的同胚  $h$ ,定义三角延拓  $T$  为

$$T(h)(z)=T(h)(x+iy)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y).$$

其中:  $\alpha(x,y)=\frac{h(x+y)+h(x-y)}{2};\beta(x,y)=\frac{|h(x+y)-h(x-y)|}{2}.$

为了研究三角延拓和 Beurling-Ahlfors 延拓之间的关系,需要

**引理 2** 对于任意的  $z,w\in H$ ,这两点之间的双曲距离  $\rho(z,w)$ 为

$$\rho(z,w)=\log \frac{\left| \frac{z_1-z_1}{z_1+z_1} \right| \left| \frac{z_2-z_2}{z_2+z_2} \right|}{\left| \frac{z_1-z_1}{z_1+z_1} \right| \left| \frac{z_2-z_2}{z_2+z_2} \right|}.\tag{4}$$

式(4)中:  $z_1=z\overline{w}+z\overline{w}-z^2-|w|^2;z_2=w^2+|z|^2-z\overline{w}-\overline{z}w.$

**证明** 由式(2),(3)可知,  $z^*,w^*$  是由  $z,w$  唯一确定的上半圆周  $\gamma$  与  $\partial H$  的交点,并且点  $z^*,z,w,w^*$  依次位于  $\gamma(z,w)$  上. 于是,不妨设其圆心为  $a$ ,半径为  $r$ ,则有  $|z-a|^2=|w-a|^2=r^2$ . 由此可得到

$$\begin{aligned} a &= \frac{|w|^2-|z|^2}{w+\overline{w}-z-\overline{z}}, \\ r &= |z-a| = \frac{|z\overline{w}+z\overline{w}-z^2-|w|^2|}{w+\overline{w}-z-\overline{z}}, \\ z^* &= a-r = \frac{|w|^2-|z|^2-|z\overline{w}+z\overline{w}-z^2-|w|^2|}{w+\overline{w}-z-\overline{z}}, \\ w^* &= a+r = \frac{|w|^2-|z|^2+|z\overline{w}+z\overline{w}-z^2-|w|^2|}{w+\overline{w}-z-\overline{z}}. \end{aligned}$$

将  $z^*,w^*$  代入式(3),便可得到式(4).

## 2 主要结论及其证明

**定理 2** 如果  $h$  是一个  $\mathbf{R}$  到  $\mathbf{R}$  上的  $M$ -拟对称同胚,那么对于任意的  $z\in H$  有

$$\rho(T(h)(z),B(h)(z))\leqslant \log\{1+\frac{M^2(M^2+1)}{(M+1)^3}+[(1+\frac{M^2(M^2+1)}{(M+1)^3})^2-1]^{1/2}\},$$

当且仅当  $h(0)=0,h(1)=1,h(-1)=-M,\int_0^1h(t)dt=\frac{1}{M+1},\int_0^1h(-t)dt=-\frac{M}{1+M}$  时等号成立.

**证明** 由线性变换  $\sigma(z)=c_1z+d_1,\phi(z)=c_2z+d_2,c_1,c_2>0,d_1,d_2\in\mathbf{R},z\in H$ ,以及  $M$ -拟对称同胚  $h$  的定义可知,  $\sigma\circ h,h\circ\phi,\sigma\circ h\circ\phi$  任是  $M$ -拟对称同胚;又由  $c_1,d_1,c_2,d_2$  的任意性可知,只需要研究  $z=i$  时两种延拓之间的双曲距离,即

$$\rho(T(h)(z),B(h)(z))=\rho(T(h)\circ\phi(i),B(h)\circ\phi(i))=\rho(T(h\circ\phi)(i),B(h\circ\phi)(i))=$$

$$\rho(\sigma \circ T(h \circ \phi)(i), \sigma \circ B(h \circ \phi)(i)) = \rho(T(\sigma \circ h \circ \phi)(i), B(\sigma \circ h \circ \phi)(i)).$$

因此, 可设  $h$  是定义在  $\mathbf{R}$  上标准的拟对称同胚, 即  $h$  满足  $h(0)=0, h(1)=1$ . 根据三角延拓  $T$  和 Beurling-Ahlfors 延拓, 延拓算子  $B$  的表达式有

$$\operatorname{Re}[T(h)(i)] = \frac{1}{2}[h(-1) + h(1)] = \frac{1-\beta}{2},$$

$$\operatorname{Im}[T(h)(i)] = \frac{1}{2}[h(-1) - h(1)] = \frac{1+\beta}{2}.$$

类似的有

$$\operatorname{Re}[B(h)(i)] = \frac{1}{2} \int_0^1 [h(-t) + h(t)] dt = \frac{1-\beta-\zeta+\beta\eta}{2},$$

$$\operatorname{Im}[B(h)(i)] = \frac{1}{2} \int_0^1 [h(t) - h(-t)] dt = \frac{1+\beta-\zeta-\beta\eta}{2}.$$

其中:  $\beta = -h(-1); \zeta = 1 - \int_0^1 h(t) dt; \eta = 1 + \beta^{-1} \int_0^1 h(t) dt$ .

利用引理 2, 经过计算可得到

$$\rho(T(h)(i), B(h)(i)) = \log\{1 + f + [(1 + f^2)^2 - 1]^{1/2}\}.$$

其中:  $f = \frac{\zeta^2 + \eta^2 \beta^2}{(1+\beta)(1+\beta-\zeta-\eta\beta)} > 0; \frac{1}{M} \leq \beta \leq M; \frac{1}{1+M} \leq \zeta; \eta \leq \frac{M}{1+M}$ .

显然,  $\rho$  关于  $f$  是单调递增的, 故只需要研究  $f$  在定义域上的最大值即可. 由引理 1 可知, 只需要考虑  $1 \leq \beta \leq M$  的情形即可; 否则, 考虑变换  $-B(-\bar{z})/\beta$ .

$\bar{G}$  表示一个闭的多边形  $ABCDE$ , 如图 1 所示. 边  $AB$  所在的直线可以表示为  $(1+2K)\zeta + \beta\eta = 1 + \beta$ , 其他的边  $BC, CD, DE$  和  $AE$  所在的直线可以分别表示为  $\zeta = \frac{1}{1+K}, \eta = \frac{K}{1+K}, \zeta = \frac{K}{1+K}, \eta = \frac{1}{1+K}$ . 从而仅需求函数  $f(\zeta, \eta)$  在区域  $\bar{G}$  上的最大值即可. 通过计算有

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} = \frac{2\zeta(1+\beta-\eta\beta)}{(1+\beta)(1+\beta-\zeta-\eta\beta)^2} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} = 2 \frac{(1+\beta-\zeta-\eta\beta)}{(1+\beta)(1+\beta-\zeta-\eta\beta)^2} + 2 \frac{2\zeta(1+\beta-\eta\beta) - \zeta^2 + \eta^2 \beta^2}{(1+\beta)(1+\beta-\zeta-\eta\beta)^3} > 0.$$

同时可得

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{2\eta\beta^2}{(1+\beta)(1+\beta-\zeta-\eta\beta)} + \frac{\beta(\zeta^2 + \eta^2 \beta^2)}{(1+\beta)(1+\beta-\zeta-\eta\beta)^2} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = 2 \frac{\beta^2}{(1+\beta)(1+\beta-\zeta-\eta\beta)} + 4 \frac{\eta\beta^3}{(1+\beta)(1+\beta-\zeta-\eta\beta)^2} + 2 \frac{\beta^2(\zeta^2 + \eta^2 \beta^2)}{(1+\beta)(1+\beta-\zeta-\eta\beta)^3} > 0.$$

因为  $\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} > 0$ , 于是函数在边界  $AB \cup \{C, D, E\}$  上取得最大值, 而  $\frac{\partial f}{\partial \zeta} > 0, \frac{\partial f}{\partial \eta} > 0$  即  $f$  的最大值在  $AB \cup \{D\}$  上取得.

在直线  $AB$  上, 将  $\eta\beta = 1 + \beta - (1 + 2M)\zeta$  代入  $f$  的表达式中, 得到  $W(\zeta, \beta)$ . 即

$$W(\zeta, \beta) = \frac{\zeta^2 + [1 + \beta - (1 + 2M)\zeta]^2}{2M\zeta(1 + \beta)},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} = \frac{1 + \beta}{M\zeta^3} > 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} = \frac{[1 + (1 + 2M)^2]\zeta}{M(1 + \beta)^3} > 0.$$

故函数  $W(\zeta, \beta)$  是凸函数, 最大值在边界上取得.

综上所述,  $f$  的最大值在  $\{A, B, D\}$  中取得, 所以只需要考虑以下 3 种情形即可.

1) 在点  $A$ :  $\eta = \frac{1}{1+M}, \zeta = \frac{1+M+M\beta}{(1+M)(1+2M)}$  处, 有

$$f = \frac{(1 + M + M\beta)^2 + (1 + 2M)^2 \beta^2}{2M(1 + M)(1 + 2M)(1 + M + M\beta)(1 + \beta)},$$

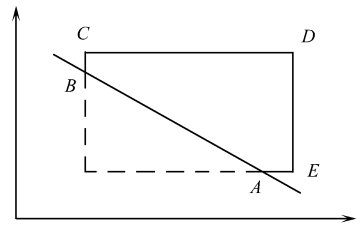


图 1 多边形  $ABCDE$

Fig. 1 Polygon  $ABCDE$

$$f = \frac{-(1+M+M\beta)^2 + (1+2M)^2\beta^2 + 2(1+2M)^2(1+M+M\beta)\beta}{2M(1+M)(1+2M)(1+M+M\beta)^2(1+\beta)^2} > 0,$$

所以关于  $\beta$  是单调递增的. 即当  $\beta=M, \zeta=\frac{1+M+M^2}{(1+M)(1+2M)}, f$  的极大值为

$$f = \frac{(1+M+M^2)^2 + (1+2M^2)M^2}{2M(1+2M)(1+2M)^2(1+M+M^2)}.$$

2) 在点  $B: \zeta=\frac{1}{1+M}, \eta\beta=1+\beta-\frac{2M+1}{M+1}$  处, 有

$$f = \frac{1 + [(1+M)\beta - M]^2}{2M(1+M)(1+\beta)}, \quad f' = \frac{(1+M)^2(\beta^2 + 2\beta) - (3M^2 + 2M + 1)}{2M(1+M)(1+\beta)^2} > 0,$$

所以  $f$  关于  $\beta$  是单调递增的. 即当  $\beta=M, \eta=\frac{M}{1+M}, f$  的极大值为  $f=\frac{M^4+1}{2M(1+M)^2}$ ;

3) 在点  $D: \zeta=\frac{M}{1+M}, \eta=\frac{M}{M+1}$  处, 有

$$f = \frac{M^2(1+\beta^2)}{(M+1)(1+\beta)^2}, \quad f' = \frac{2M^2(\beta-1)}{(M+1)(1+\beta)^3} > 0.$$

即当  $\beta=M$  时,  $f$  取得极大值为  $\frac{M^2(1+M^2)}{(1+M)^3}$ . 经过比较,  $f$  在  $D$  点处取得最大值, 所以有

$$\rho(T(h)(i), B(h)(i)) \leq \log\{1 + \frac{M^2(M^2+1)}{(M+1)^3} + [(1 + \frac{M^2(M^2+1)}{(M+1)^3})^2 - 1]^{1/2}\}.$$

综上所述, 当  $\zeta=\frac{M}{1+M}, \eta=\frac{M}{M+1}, \beta=M$  时,  $T(h)(i)=\frac{1-M}{2}+i\frac{1+M}{2}, B(h)(i)=\frac{1-M}{2(1+M)}+i\frac{1}{2}$ ,

且  $f$  取得最大值. 即  $f=\frac{M^2(1+M^2)}{(M+1)^3}$  时, 上述等号成立.

注 1 对  $h(x)=cx, c>0$  进行延拓, 有

$$B(h)(z) = c(x + i\frac{y}{2}), \quad T(h)(z) = c(x + iy).$$

则  $\rho(T(h)(z), B(h)(z)) = \log 2$ ; 而当  $M \rightarrow 1$  时, 有

$$\log\{1 + \frac{M^2(M^2+1)}{(M+1)^3} + [(1 + \frac{M^2(M^2+1)}{(M+1)^3})^2 - 1]^{1/2}\} \rightarrow \log 2.$$

因此, 当  $h(x)=cx, c>0$  时, 其为 1-拟对称同胚, 证明结果是精确的.

注 2 对于  $M>1$  时, 显然不等式

$$2\log \frac{8M^3 + 12M^2 - 1}{2M + 1} > \log\{1 + \frac{M^2(M^2+1)}{(M+1)^3} + [(1 + \frac{M^2(M^2+1)}{(M+1)^3})^2 - 1]^{1/2}\}$$

成立. 故定理 2 所得到的结果优于 Ibragimov<sup>[7]</sup> 中定理 1 的结果.

根据延拓算子  $T$  的复合兼容性<sup>[7]</sup>, 对于任意的  $\Psi, \Phi$ , 定义在  $\mathbf{R}$  上的拟对称同胚都有  $T(\Phi \circ \Psi) = T(\Phi) \circ T(\Psi)$ . 于是, 得到下面的推论.

推论 1 如果  $\Phi$  和  $\Psi$  都是  $\mathbf{R}$  上的  $M$ -拟对称同胚, 对于任意的  $z \in H$ , 有

$$\rho(B(\Phi \circ \Psi)(z), B(\Phi) \circ B(\Psi)) \leq \mu(M') + (2M + 1)\mu(M),$$

其中:  $\mu(M) = \log\{1 + \frac{M^2(M^2+1)}{(M+1)^3} + [(1 + \frac{M^2(M^2+1)}{(M+1)^3})^2 - 1]^{1/2}\}.$

证明 因为  $\Psi$  和  $\Phi$  都是  $\mathbf{R}$  上的  $M$ -拟对称同胚, 根据拟对称同胚的定义可知,  $\Phi \circ \Psi$  是  $\mathbf{R}$  上的  $M'$ -拟对称同胚, 其中常数  $M'$  只依赖于  $M$ . 对于任意的  $z \in H$ , 有三角不等式, 即

$$\begin{aligned} \rho(B(\Phi \circ \Psi)(z), B(\Phi) \circ B(\Psi)(z)) &\leq \rho(T(\Phi \circ \Psi)(z), B(\Phi) \circ B(\Psi)(z)) + \\ &\quad \rho(T(\Phi) \circ T(\Psi)(z), B(\Phi) \circ B(\Psi)(z)). \end{aligned}$$

令  $z_1 = T(\Phi)(z)$  及  $z_2 = B(\Phi)(z)$ , 则有

$$\rho(T(\Psi)(z_1), B(\Psi)(z_2)) \leq \rho(T(\Psi)(z_1), B(\Psi)(z_1)) + \rho(B(\Psi)(z_1), B(\Psi)(z_2)).$$

根据双曲度量下  $B(\Psi)$  是  $2M$ -Lipschitz 的, 再由定理 2 和引理 2, 可得

$$\rho(B(\Psi)(z_1), B(\Psi)(z_2)) \leq 2M\rho(T(\Phi)(z), B(\Phi)(z)),$$

$$\rho(T(\Psi \circ \Phi)(z), B(\Psi \circ \Phi)(z)) \leq \mu(M').$$

综合以上估计, 有

$$\rho(B(\Phi \circ \Psi)(z), B(\Phi) \circ B(\Psi)(z)) \leq \mu(M') + (2M+1)\mu(M),$$

其中:  $\mu(M) = \log\{1 + \frac{M^2(M^2+1)}{(M+1)^3} + [(1 + \frac{M^2(M^2+1)}{(M+1)^3})^2 - 1]^{1/2}\}$ . 推论 1 得证.

#### 参考文献:

- [1] EFREMOVICH V A, TIKHOMITOVA E. Equiporphisms of hyperbolic spaces[J]. Izv Akad Nauk SSSR Ser Math, 1964, 28(5): 1139-1144.
- [2] TUKIA P. Quasiconformal extension of quasisymmetric mappings compatible with a Möbius group[J]. Acta Math, 1985, 154(3/4): 153-193.
- [3] DOUADY A, EARLE C. Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle[J]. Acta Math, 1986, 157(1): 23-48.
- [4] SULLIVAN D. On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions[J]. Ann of Math Stud, 1981, 97: 456-496.
- [5] NORTON A, SULLIVAN D. Wandering domains and invariant conformal structures for mappings of the 2-torus[J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 1996, 21: 51-68.
- [6] EPSTEIN D B A, MARKOVIC V. Extending homeomorphisms of the circle to quasiconformal homeomorphisms of the disk[J]. Geom Topol, 2007, 11: 517-595.
- [7] IBRAGIMOV Z. Quasi-isometric extensions of quasisymmetric mappings of the real line compatible with composition[J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2010, 35: 221-233.
- [8] HARDT R, WOLF M. Harmonic extensions of quasiconformal maps to hyperbolic space[J]. Indiana Univ Math, 1997, 46: 155-163.
- [9] 陈行堤. Beurling-Ahlfors 延拓与调和映照[J]. 数学年刊: A 辑, 2007, 28(4): 537-544.
- [10] FOTIADIS A. Harmonic extensions of symmetric maps[J]. Calc Var, 2009, 35(3): 271-278.
- [11] BEARDON A F. Geometry of discrete groups[M]. New York: Spring-Verlag, 1995.
- [12] AHLFORS L V. Lectures on quasiconformal mappings[M]. Providence: American Mathematical Society, 2006.
- [13] TAN D L. On the dilatation estimates for Beurling-Ahlfors quasiconformal extension[J]. Acta Math, 1987, 100(4): 655-660.

## Hyperbolic Distance between Triangle Extensions and Beurling-Ahlfors Extensions

CHEN Min, CHEN Xing-di

(School of Mathematical Sciences, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

**Abstract:** In this article, the hyperbolic distance between triangle extension and Beurling-Ahlfors extension is estimated. The bound determined explicitly by the quasisymmetric constant is asymptotically sharp, which improves the one obtained by Ibragimov.

**Keywords:** quasisymmetric homeomorphisms; triangle extensions; Beurling-Ahlfors extensions; hyperbolic distance

(责任编辑: 陈志贤      英文审校: 张金顺, 黄心中)